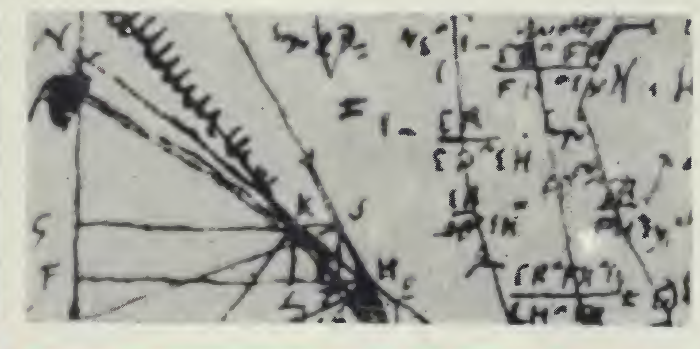
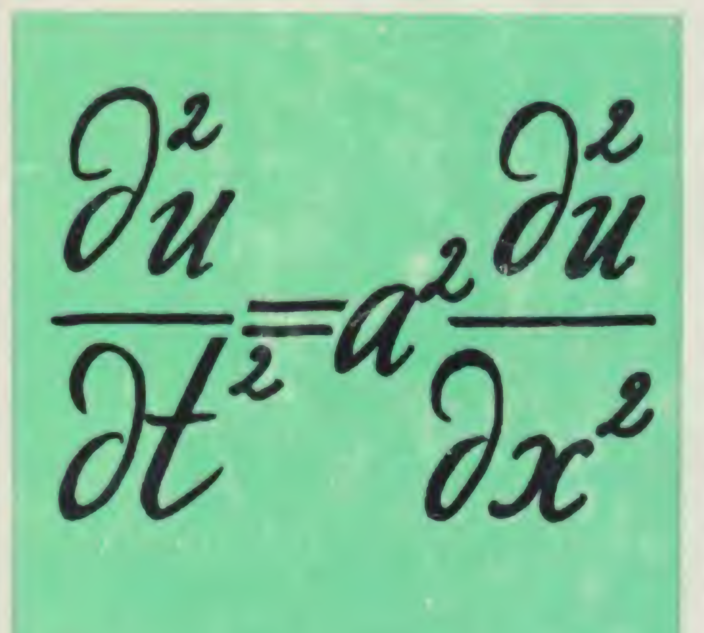
ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ

3

МАТЕМАТИКА
XVIII
СТОЛЕТИЯ







АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ИНСТИТУТ ИСТОРИИ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ И ТЕХНИКИ

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ
С ДРЕВНЕЙШИХ ВРЕМЕН ДО НАЧАЛА XIX СТОЛЕТИЯ

В трех томах

Под редакцией А. П. ЮШКЕВИЧА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
Москва 1972

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ

Том третий

МАТЕМАТИКА
XVIII СТОЛЕТИЯ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

Москва 1972

УДК 51(09) «17»

Авторский коллектив тома:
кандидат физ.-матем. наук В. И. АНТРОПОВА
доктор физ.-матем. наук И. Г. БАШМАКОВА
кандидат физ.-матем. наук А. В. ДОРОФЕЕВА
кандидат философ. наук Л. Е. МАЙСТРОВ
кандидат физ.-матем. наук Е. П. ОЖИГОВА
доктор физ.-матем. наук Б. А. РОЗЕНФЕЛЬД
доктор физ.-матем. наук Н. И. СИМОНОВ
кандидат физ.-матем. наук О. Б. ШЕЙНИН
доктор физ.-матем. наук А. П. ЮШКЕВИЧ

2-2-1
169-71(II)

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПЕРВАЯ ГЛАВА

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА МАТЕМАТИКИ XVIII ВЕКА

Век просвещения

XVIII в. в Европе был веком дальнейшего укрепления капиталистического строя, технической революции и перехода от мануфактурного производства к фабричному. В ведущей стране того времени Англии после буржуазной революции XVII в. власть феодального дворянства была окончательно подорвана. Аграрный переворот в середине XVIII в. и промышленный переворот в конце XVIII и начале XIX в. еще более укрепили английскую буржуазию и ее роль в политическом руководстве страной. В это же время Англия завоевывает Индию, Канаду и многие другие колонии, вытесняя из них Францию, Испанию и Португалию. В XVIII в. колониальная империя Англия терпит только одно серьезное поражение — в войне с ее северо-американскими колониями, объявившими себя независимыми Соединенными Штатами.

На европейском континенте буржуазия, экономическая мощь которой также быстро возрастала, еще не получила политической власти. В отличие от Англии, где власть фактически принадлежала парламенту, страны континентальной Европы представляли собой абсолютные дворянские монархии. Наиболее крупными из них были Франция, Австро-Венгрия (до 1806 г. еще именовавшаяся «Священной римской империей германской нации») и Россия. Сильнее всего буржуазия была во Франции, где назревала и в 1789 г. произошла Великая Французская революция. Идеологической подготовкой революции была деятельность французских просветителей Вольтера, Руссо и др., определившая одно из названий XVIII столетия — «век просвещения». Крупнейшим событием духовной жизни страны явилось издание «Энциклопедии или Толкового словаря наук, искусств и ремесел» (Encyclopédie ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers, Paris, 1751—1772) — 28 томов. «Энциклопедия» была проникнута материалистическим и демократическим духом; ее издание наряду с философом Дени Дидро некоторое время возглавлял математик и механик Даламбер. Революция значительно ускорила развитие науки во Франции. Выдающееся значение имело, в частности, создание высших учебных заведений нового типа,— об этом нам еще придется говорить.

Влияние французских идеологов «века просвещения» в той или иной степени сказывалось на всех странах континента. Даже абсолютизм во многих государствах принимал форму «просвещенного абсолютизма», и такие монархи, как прусский король Фридрих II и русская императрица

Екатерина II, оказывали, иногда вопреки своим личным желаниям, поддержку различным мероприятиям в области образования и науки.

Германия и Италия в рассматриваемое время были раздроблены на большое количество соперничавших государств, крупнейшим из которых было Прусское королевство, но среди которых имелись и княжества в несколько квадратных километров. Политической и экономической отсталостью Германии и Италии в значительной степени объясняется, что в XVIII в. они выдвинули меньше крупных ученых, чем Англия и Франция. Голландия, потерпевшая военное поражение от Англии в XVIII в. и потерявшая большую часть своих колоний (в том числе Новые Нидерланды с Новым Амстердамом — нынешним Нью-Йорком), в XVIII в. отошла на второй план.

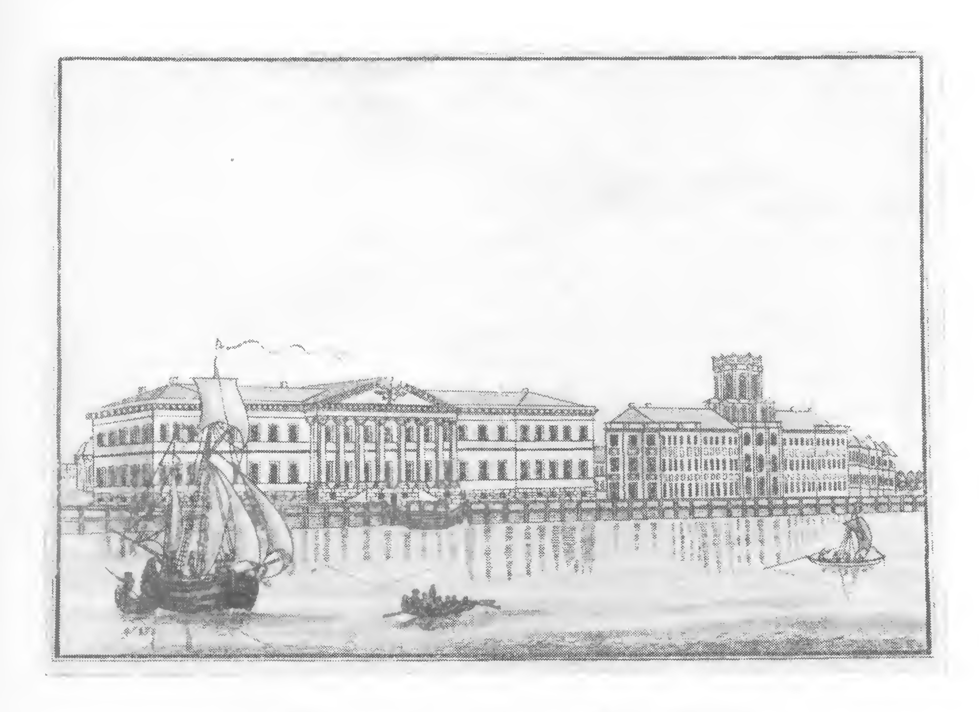
В конце XVII и в первой четверти XVIII в. реформы Петра I коренным образом преобразовали ранее отсталую Русь, которая вступила в число великих держав. Важную роль сыграли перемены в системе образования, создание сети чисто светских школ, где преподавалась и математика, а также издание учебной литературы. Впервые в широких масштабах началась подготовка технических и научных специалистов высокой квалификации. В 1703 г., одновременно с основанием новой столицы России — Санкт-Петербурга выходит в свет книга преподавателя Московской школы математических и навигационных наук Леонтия Филипповича Магницкого (1669—1739) «Арифметика, сиречь наука числительная» (Москва, 1703). Во II томе мы неоднократно цитировали эту книгу, являвшуюся учебником не только арифметики, но и алгебры, геометрии и тригонометрии, изложенных применительно к потребностям русских читателей того времени. Венцом научных преобразований была организация по указу Петра в 1725 г. Петербургской академии наук, сразу же занявшей одно из ведущих мест в Европе.

Трагично сложилась в XVIII в. судьба Польши. Раздираемая внутренними неурядицами, эта страна, выдвинувшая ряд блестящих деятелей культуры, к концу века потеряла политическую независимость, оказавшись разделенной между Россией, Австрией и Пруссией. Югославия оставалась подвластной Турции и частично Австрии; важнейшим центром югославской культуры в XVIII в. была Дубровницкая республика, тесно связанная с Венецианской республикой.

Во втором томе мы говорили о возникновении и развитии в XVII в. механической картины физического мира. В XVIII в. механистическая концепция получила дальнейшее развитие и распространение. Этому способствовали успехи как отдельных наук, так и материалистической философии, яркими представителями которой были Дидро, Гельвеций, Гольбах во Франции, Толанд в Англии, Ломоносов в России и многие другие выдающиеся мыслители. Маркс писал: «*Механистический* французский материализм примкнул к *физике Декарта* в противоположность его метафизике» [1]. Если Декарт уподобил машине животных, но еще не человека, то Ламеттри, полагая, что различие между человеком и животным только количественное, одно из из своих сочинений озаглавил «Человек — машина» (L'homme-machine. La Haye, 1747).

В физических науках механистическая концепция господствовала почти безраздельно, и ее придерживались даже ученые, мировоззрение которых в целом не было материалистическим. С особенной яркостью

[1] *К. Маркс* и *Ф. Энгельс*. Сочинения, т. 2. Изд-е 2. Госполитиздат, 1955, стр. 140.



Петербургская Академия наук и Кунсткамера
(с гравюры конца XVIII в. Архив АН СССР, Ленинград)

концепцию универсальной механики выразил в начале XIX в. Лаплас в предисловии к своему «Опыту философии теории вероятностей» (Essai philosophique sur les probabilités, 1814): «Ум, которому были бы известны для какого-либо данного момента все силы, одушевляющие природу, и относительное положение всех ее составных частей, если бы вдобавок он оказался настолько обширным, чтобы подчинить эти данные анализу, обнял бы в одной формуле движение величайших тел вселенной наравне с движениями легчайших атомов: не осталось бы ничего, что было бы для него недостоверно, и будущее, так же, как прошедшее, предстало бы перед его взором» [1]. Ньютон еще допускал бога в качестве творца мира, сообщившего ему первый толчок; для Лапласа мир извечно развивается уже по собственным законам. Поэтому, излагая картину мира в своей пятитомной «Небесной механике» (Mécanique céleste, Paris, 1799—1825), Лаплас ни разу не упоминает о боге. Говорят, что на замечание Наполеона по этому поводу Лаплас ответил: «Государь, я не нуждался в этой гипотезе».

Ведущая роль механики

В приведенных словах из «Опыта» Лапласа нашли выражение то господствующее положение, которое продолжала занимать в системе естественных наук механика, и, вместе с тем, перемены, которые произошли в самой механике. Всеобъемлющей формулой, которая в принципе заключает в себе все законы движения материи, ничего не оставляя на долю случая, должна была быть некоторая система дифференциальных уравне-

[1] *П. С. Лаплас.* Опыт философии теории вероятностей. Перевод А. К. Власова, М., 1908, стр. 11.

ний с сответствующими данными начальными условиями и ее интегралы — какое-то гигантское обобщение законов механики, установленных на протяжении XVII—XVIII вв.

Развитие механики в рассматриваемое время происходило в непосредственном переплетении с прогрессом математического анализа, гораздо более тесном, чем ранее. В XVII в. задачи механики оказывали мощное влияние на математику, и к их решению постоянно привлекались различные инфинитезимальные приемы. Однако, как говорилось во II томе, новое исчисление бесконечно малых не было еще положено в основу великой системы механики, разработанной Ньютоном. Только в XVIII в., и притом со второй трети его, структура анализа, именно дифференциального и интегрального исчисления Лейбница, переносится в механику Ньютона. Впервые в широком объеме этот перенос был осуществлен в 1736 г. Эйлером в двухтомной «Механике, или науке о движении, изложенной аналитическим методом» (Mechanica, sive motus scientia analytice exposita, Petropoli, 1736).

Предисловие к этому классическому труду ярко выражает положение дел в механике, как оно рисовалось ученым, владевшим исчислением бесконечно малых, и мы приведем из него несколько выдержек.

Кратко охарактеризовав математические методы, примененные в «Математических началах натуральной философии» Ньютона и в одном (впрочем, малозначительном) сочинении Я. Германа (1716), Эйлер писал: «Однако, если анализ где-либо и необходим, так это особенно относится к механике. Хотя читатель и убеждается в истине выставленных предложений, но он не получает достаточно ясного и точного их понимания, так что, если чуть-чуть изменить те же самые вопросы, он едва ли будет в состоянии разрешить их самостоятельно, если не прибегнет сам к анализу и те же предложения не разрешит аналитическим методом» [1]. Это случилось и с самим Эйлером, и он решил «выделить анализ из этого синтетического метода», благодаря чему «нашел много новых методов», обогативших и механику, и анализ. «Таким образом и возникло это сочинение о движении, в котором я изложил аналитическим методом и в удобном порядке как то, что я нашел у других в их работах о движении тел, так и то, что я получил в результате своих размышлений» [2].

После того как Эйлер аналитически разработал в цитированном труде динамику точки, новые методы быстро становятся преобладающими во всех областях механики. За исключением Маклорена, следовавшего в решении некоторых вопросов за Ньютоном, все крупные механики — они же математики — того времени (Клеро, Даламбер, Лагранж и Лаплас), а за ними и другие применяли анализ беконечно малых Лейбница. Рамки теоретической механики при этом чрезвычайно раздвинулись. Эйлер, помимо динамики точки, разработал систему динамики твердого тела (1765); Д. Бернулли внес крупный вклад в гидравлику и гидродинамику (1738), основные дифференциальные уравнения которой для идеальной жидкости дал Эйлер (1757); Маклорен (1742), Клеро (1743) и Даламбер исследовали первые задачи теории фигур равновесия вращающейся тяжелой жидкой массы, а Лежандр и Лаплас с начала 80-х годов далеко продвинули вперед теорию потенциала... Перечисление успехов теоретической

---

[1] *Л. Эйлер*. Основы динамики точки. Перевод В. С. Гохмана и С. П. Кондратьева под редакцией В. П. Егоршина. М.—Л., 1938, стр. 33—34.

[2] Там же, стр. 34.

механики можно было бы продолжить далеко. Мы упомянем по крайней мере такое выдающееся достижение механики упругих и гибких тел, как решения задачи о колебаниях струны, т. е. решения волнового уравнения, предложенные Даламбером, Эйлером и Д. Бернулли (1747—1755), а также огромный цикл работ по небесной механике Клеро, Даламбера, Эйлера и Лапласа, укрепивших систему Ньютона и подтвердивших предложенный им закон всемирного тяготения, которому, казалось, противоречили видимое движение Луны, фигура Земли и некоторые другие факты. Все эти исследования сопровождались поисками общих принципов, позволяющих дедуктивно строить систему механики, исходя из немногих начал. Вехами на пути этих поисков, которые вели еще Стевин, Галилей, Я. Бернулли, Герман и другие ученые, были принцип Даламбера (1743), сводящий динамические задачи к статическим, и принцип наименьшего действия, высказанный Мопертюи и в более удачной форме Эйлером (1744). Дальнейшее развитие и, главное, современную трактовку принципы механики получили у Лагранжа, который дал своему основополагающему в этой области труду характерное название «Аналитическая механика» (Mécanique analytique. Paris, 1788). В предисловии к этому сочинению Лагранж подчеркивал, что в нем «совершенно отсутствуют какие бы то ни было чертежи. Излагаемые мною методы не требуют ни построений, ни геометрических или механических рассуждений; они требуют только алгебраических операций, подчиненных планомерному и однообразному ходу. Все любящие анализ с удовольствием убедятся в том, что механика становится новой отраслью анализа, и будут мне благодарны за то, что этим путем я расширил область его применения» [1].

Многие трудные задачи общей и небесной механики были тесно связаны с практическими работами. Такова была давно поставленная проблема определения долготы в открытом море. Еще в 1733 г. английский парламент назначил премию в 20 000 фунтов стерлингов за удовлетворительное решение этой проблемы, хотя бы с точностью до полградуса (впоследствии требования к точности повысились). Одним из способов здесь могло служить достаточно точное знание местоположения Луны относительно Солнца или неподвижных звезд. Однако определение движения Луны, в котором требовалось учитывать совместное действие притяжения Солнца и Земли (это частный случай «задачи трех тел»), оказывалось более трудным, чем анализ движения планет. Еще в конце XVII в. ошибка в предсказании лунных затмений достигала часа и даже более. На аналогичные трудности наталкивалось использование таблиц движения спутников Юпитера. Когда гёттингенский астроном Тобиас Майер (1723—1762), используя методы Эйлера и свои личные наблюдения, составил новые лунные таблицы (1753), они получили высокую оценку прославившегося открытием аберрации света и нутации земной оси Джемса Брадлея (1693—1762) и затем Невиля Маскелайна (1732—1811). В 1765 г., уже после смерти Майера, его труды были премированы суммой в 3000 ф. ст., Эйлеру было присуждено 300 ф. ст., а 10 000 ф. ст. получил замечательный конструктор Джон Гаррисон (1693—1776), хронометр которого с маятником, почти не подверженным температурным влияниям, отличался удивительной точностью; за месяц путешествия его ошибка была меньше полминуты. Но и лунные таблицы широко применялись мореплавателями

---

[1] *Ж. Лагранж.* Аналитическая механика, т. I. Перевод В. С. Гохмана, под редакцией Л. Г. Лойцянского и А. И. Лурье. М.—Л., 1950, стр. 9—10.

еще более ста лет и с 1767 до 1915 г. включались в морские справочники,— после этого их полностью вытеснили радиосигналы, позволяющие всегда знать точное время на корабле и при посредственном хронометре.

Академии наук специально поощряли исследования по прикладной математике, организуя международные конкурсы и назначая высокие премии за лучшие работы. Таковы были многочисленные конкурсы по теории движения планет и комет, неоднократно объявлявшиеся Парижской и Петербургской академиями, конкурс Парижской академии по теории морских приливов и отливов 1740 г., целый ряд конкурсов по вопросам кораблестроения и кораблевождения, компасному делу, оптической технике и т. д.

Математиков привлекали и непосредственно, как экспертов, к решению различных технических вопросов, что, разумеется, в той или иной мере направляло их теоретические интересы. Укажем, для примера, на многолетние занятия Эйлера в 30-е и 40-е годы проблемами «морской науки» по поручению Петербургской академии, а в 40-е и 50-е годы — баллистикой и каналостроением по поручению короля Фридриха; добавим к этому работы Эйлера по конструированию и расчету реактивных водяных турбин, которыми он заинтересовался в ходе переписки с И. А. Зегнером, профессором естествознания и математики в Иене, Гёттингене и Галле, имя которого известно и сейчас каждому школьнику («Сегнерово колесо»). Глубокие исследования Эйлера по гидродинамике приходятся на то же время, что и по гидротехнике, и это не случайно. Другое дело, что здесь, как и во многих других случаях, практическое применение теории оказывалось возможным далеко не сразу, частично потому, что теория сперва строилась для слишком упрощенных физических моделей, частично потому, что требовалось время для преодоления чисто математических трудностей.

Заметим, что столь популярная в XVIII в. паровая машина еще не возбудила тогда математических исследований, так как учение о теплоте находилось еще в совершенно неразвитом состоянии. Однако уже в самом начале следующего столетия одна из сторон этого учения — теория теплопроводности — была подвергнута глубокой аналитической разработке Фурье.

Основные направления математики

Если механика оставалась в XVIII в. ведущей среди наук о природе, то в математике доминирующее положение продолжал занимать анализ, который — опять-таки подобно механике — разделялся на несколько относительно самостоятельных дисциплин. Эта дифференциация была обусловлена как внутренними потребностями самой математики, так и запросами естествознания, более всего механики, контакт с которой особенно усилился после придания ей аналитической структуры. Собственно дифференциальное и интегральное исчисление распространяется на функции многих переменных; впервые вводятся элементарные функции комплексного переменного, причем методы теории аналитических функций вскоре находят применения в решении уравнений с частными производными и в картографии, которая поставила перед математикой несколько важных и трудных задач. В недрах интегрального исчисления, отчасти в связи с интерполированием последовательностей и с решением дифференциальных уравнений математической физики, а отчасти в развитие ранее

поставленных геометрических задач, выделяется учение об определенных интегралах и специальных функциях — эллиптических интегралах, цилиндрических функциях, функциях В и Г, интегральном логарифме и других (знаменитая ζ-функция появляется в другой ситуации). В середине XVIII в. выделяется, как новая отрасль анализа, теория дифференциальных уравнений, разделяющаяся на две ветви — обыкновенных уравнений и уравнений с частными производными; механика поставляет при этом все новые и новые классы уравнений и их систем, для решения которых приходится прибегать к бесконечным рядам — степенным, обобщенным степенным, тригонометрическим и некоторым другим разложениям по ортогональным функциям. В самой теории рядов возникают новые направления: асимптотические резложения и суммирование расходящихся рядов. Так же в середине XVIII в. оформляется в самостоятельную дисциплину вариационное исчисление. Наконец, тогда же велась большая и плодотворная работа в области оснований анализа, нередко в форме острых дискуссий о понятиях бесконечно малой величины и предела, о допустимом объеме понятия функции и о допустимости расходящихся рядов и т. д. И если механика становилась наукой аналитической, то анализ постепенно все более выходил из-под господства геометрических или механических представлений, и мышление аналитиков приобретало специфический алгебраико-арифметический характер. Исследования по основаниям анализа предвещали его близкую реформу, произведенную в первой половине следующего века.

Успехи анализа в немалой степени отразились на развитии других математических наук, и его методы проникали в теорию чисел, алгебру, учение о конечных разностях, теорию вероятностей, геометрию. В алгебре принципиально новые идеи были порождены в ходе изучения вопроса о разрешимости уравнений в радикалах, как и вопроса о приводимости уравнений; здесь зарождалось уже теоретико-групповое мышление. Теория чисел, эта кузнечная мастерская, в которой издавна выковывались и оттачивались многие методы общего значения, получает значительное развитие и с тех пор привлекает к себе внимание многих крупнейших математиков. В теории вероятностей важнейшим событием была посмертная публикация закона больших чисел Я. Бернулли, о чем уже говорилось, но и впоследствии имелись немалые достижения — установление центральной предельной теоремы, теоремы о вероятностях гипотезы, работы по теории ошибок, приложения к статистике народонаселения и страховому делу.

В геометрии, наряду с дальнейшим прогрессом аналитической и особенно дифференциальной геометрии пространственных кривых и поверхностей, а также с применением некоторых новых важных преобразований, следует особо отметить два обстоятельства. Одним из них было тесно связанное с задачами строительства и фортификации развитие новых методов начертательной геометрии, подготовлявшее почву прежде всего для проективной геометрии, возродившейся в начале XIX в. (идеи Дезарга к тому времени были забыты). Другим явился резкий подъем в исследованиях по теории параллельных линий, за которыми естественно последовало, уже в начале XIX в. открытие неевклидовой геометрии.

Дифференциация математики не влекла за собой утраты единства этой науки. Напротив, по мере возникновения новых ее отделов усиливались внутренние связи между ними, понятия и методы одних областей плодотворно применялись в других. Математика развивалась как единое целое.

Научные центры

Основными центрами развития математики, как и всей науки в XVIII в., остаются академии наук, при которых работали крупнейшие ученые. По большей части — наиболее видным исключением являлось Лондонское королевское общество — это были государственные учреждения, деятельность которых субсидировалась, контролировалась и в некоторой степени направлялась правительствами. Значение университетов в научном исследовании было еще невелико, если не считать опять-таки Англию и те страны, где академий не имелось, как, например, Швейцарию или отдельные немецкие княжества. Ведущими академиями в XVIII в. были Парижская, Берлинская, особенно после ее реорганизации в 1745 г., и Петербургская; из многих других мы назовем только две, игравшие некоторое время заметную роль в прогрессе математики,— Туринскую академию, основанную в 1757 г., и Мюнхенскую, созданную двумя годами позднее, в 1759 г.

Помимо организации чисто теоретических исследований, академии снаряжали географические экспедиции, составляли карты, вели астрономические и метеорологические наблюдения, изучали флору, фауну и недра земли; им нередко поручалось также решение насущных задач техники, мореплавания и военного дела; академические конкурсы стимулировали разработку широкого круга научных и технических вопросов. Некоторые академии, как Петербургская, имели в своем составе учебные заведения, где велась подготовка научных кадров, а также вспомогательного персонала обсерваторий и лабораторий, механических и оптических мастерских, учителей и переводчиков и т. д. Математики принимали во всем этом деятельное участие. Одной из важнейших функций академий являлся обмен научной информацией и прежде всего издание журналов и монографий.

По сравнению с XVII в. значительно увеличился выпуск периодической литературы. Здесь академиям принадлежало первое место. Специальные математические журналы начали появляться только в самом конце рассматриваемого столетия, так что статьи по математике печатались вместе с другими в общих академических записках. Эти записки обычно выходили ежегодно, но нередко с опозданием (на один-два года и даже более); поэтому в дальнейшем мы указываем две даты: в скобках официальный год тома и затем фактический год издания. Вот некоторые наиболее важные периодические издания, которые появились в XVIII в. в дополнение к выходящим с 1665 г. «Philosophical Transactions» Лондонского королевского общества, к лейпцигским «Acta Eruditorum» (1682—1731), продолжением которых явились «Nova Acta Eruditorum» (1732—1795), и к парижскому «Journal des Savants» (1665—1792). С 1699 г. начался выпуск ежегодников «Histoire et mémoires de l'Académie des sciences de Paris» [1], прекратившийся после 1790 г. в связи с закрытием в 1793 г. Парижской академии наук, вместо которой в 1795 г. был создан I класс Национального института наук и искусств, вновь переименованный в Академию наук Института Франции в 1816 г. Помимо того, с 1750 по 1786 гг. Парижская академия издавала «Mémoires de mathématique et de physique, présentés à l'Académie des sciences par divers savants», т. е. сочинения, представлявшиеся ей посторонними учеными. Берлинская академия издала в 1710—1743 гг.

[1] Далее цитируется сокращенно: Mém. Ac. Paris.



Старое здание Берлинской Академии наук на улице Unter den Linden
(со старинной гравюры, Центральный архив Германской Академии наук в Берлине)

семь томов «Miscellanea Berolinensia», т. е. «Берлинских сборников», а после преобразования приступила к регулярной публикации на французском языке «Histoire et mémoires de l'Académie des sciences de Berlin», (1745) 1746—(1769) 1771 [1], продолжением которых явились «Nouveaux mémoires de l'Académie des sciences de Berlin» (1770—1786). Наконец, Петербургская академия последовательно издавала «Записки» — Commentarii Academiae Petropolitanae, (1726) 1728— (1744—1746) 1751, «Новые записки» — Novi Commentarii Academiae Petropolitanae (1747—1748) 1750— (1775) 1778, «Труды» — Acta Academiae Petropolitanae, (1777) 1778— (1782) 1786 и «Новые труды» — Nova Acta Academiae Petropolitanae, (1783) 1787 — (1799—1802) 1806 — в общей сложности 55 томов в 61 книге [2]. О месте петербургских записок в мировой научной периодике можно судить по словам Д. Бернулли в одном письме 1734 г. к Эйлеру, посланном из Базеля в русскую столицу: «Не могу Вам довольно объяснить, с какой жадностью повсюду спрашивают о Петербургских Мемуарах... Желательно, чтобы их печатание было ускорено» [3]. А ведь к этому времени успели выйти лишь три тома «Записок». Всего в изданиях Петербургской академии было опубликовано в течение XVIII в. более 700 ста-

---

[1] Далее цитируется: Mém. Ac. Berlin.

[2] Эти издания в дальнейшем называются соответственно: Commentarii, Novi Commentarii, Acta, Nova Acta.

[3] «Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII[e] siècle», publiée par P.—H. Fuss, t. II. St.-Pétersbourg, 1843, p. 415—416.

тей и книг по математике — число, которое при нынешних масштабах кажется скромным, но в те времена было очень большим. Издания некоторых других академий и научных обществ будут названы далее. В последней четверти XVIII в. возникают первые периодические издания математического профиля. Такими были немецкие журналы «чистой и прикладной математики» «Leipziger Magazin für reine und angewandte Mathematik» (1786—1788) и его продолжение «Archiv für reine und angewandte Mathematik» (1795—1800),— французский и латинский языки стали еще несколько ранее исчезать в Германии из научного обихода, хотя и в первой половине XIX в. многие труды издавались на латыни. Впрочем, как видно, оба эти издания оказались недолговечными. Преимущественно математике был посвящен французский «Journal de l'Ecole Polytechnique»,

Титульный лист
второго издания трудов Парижской Академии наук за 1700 г.

HISTOIRE
DE
L'ACADEMIE
ROYALE
DES SCIENCES.
Année M. DCC.
Avec les Memoires de Mathematique & de Physique, pour la même Année.
Tirez des Registres de cette Academie.
Seconde Edition, revûë, corrigée & augmentée.



A PARIS,
Chez CHARLES-ESTIENNE HOCHEREAU, Quay des Augustins, au Phenix.
M. DCC. XIX

издающийся с 1795 г. до сих пор. Записки Петербургской академии наук выходили в XVIII в. на латыни и только в начале XIX в. предприняты были успешные попытки издания научных работ по математике на русском языке, в частности, в академических «Умозрительных исследованиях» (5 томов, 1808—1819).

Академии наук поддерживали между собой постоянную научную связь, обменивались литературой и письменной научной информацией. Переписку вели по должности непременные секретари, а также корреспонденты академий: первоначально это звание обычно присваивалось тем иностранным или иногородним ученым, которые обязывались письменно сообщать научные новости. Огромную роль продолжала играть частная переписка ученых: письма, нередко превращавшиеся в небольшие научные

Титульный лист
первого тома «Записок» Берлинской академии наук (1710)

MISCELLANEA
BEROLINENSIA
AD
INCREMENTUM SCIENTIARUM,
EX SCRIPTIS
SOCIETATI REGIÆ
SCIENTIARUM
EXHIBITIS
EDITA,
CVM FIGVRIS AENEIS ET INDICE
MATERIARUM.

BEROLINI,
Sumptibus
JOHAN. CHRIST. PAPENII,
Bibliopolæ Regii & Societatis Privilegiati.
A. MDCCX.

статьи, служили более скорым и регулярным средством научного общения, чем печатные издания. Мы упоминали о задержках с выходом академических записок; еще более, случалось по нескольку лет, дожидались издания монографии,— так было, например, со знаменитыми «Введением в анализ бесконечных» (1748), «Дифференциальным исчислением» (1755) и «Теорией движения твердых тел» (1765) Эйлера.

При всех этих трудностях развитие наук все более ускорялось и приобретало международный характер.

Однако на международных научных связях и распространении новых учений иногда отрицательно отражались националистические тенденции. Так, во Франции приверженцы Декарта некоторое время препятствовали проникновению как механики Ньютона, так и исчисления бесконечно ма-

Титульный лист
первого тома «Записок» Петербургской Академии наук за 1726 г.

COMMENTARII

ACADEMIAE

SCIENTIARUM

IMPERIALIS

PETROPOLITANAE

TOMVS I.

AD ANNVM cIɔ Iɔcc xxvi.

PETROPOLI

TYPIS ACADEMIAE

cIɔ Iɔcc xxviii.

лых Лейбница. В Англии верные последователи Ньютона отказывались применять исчисление Лейбница и пользовались почти исключительно теорией флюксий. Все же лучшие умы Европы стремились преодолеть подобные настроения и синтезировали результаты национальных школ XVII — начала XVIII в. Благодаря Л. Эйлеру, А. К. Клеро, Ж. Даламберу, Ж. Л. Лагранжу и другим ученым и механика Ньютона, и дифференциальное и интегральное исчисление Лейбница стали в XVIII в. основой развития физико-математических наук во всех странах Европы.

Если в XVII в. многие важнейшие открытия в математике были сделаны Непером, Ферма, Декартом, Паскалем, Лейбницем и целым рядом других лиц, для которых математика не была профессией, а иногда не являлась и главным делом, то в XVIII в. математики становятся профессионалами и притом государственными служащими — академиками или преподавателями; математики-любители, игравшие столь видную роль в предыдущем столетии, почти исчезают со сцены. Подчеркнем еще раз факт, уже неоднократно упоминавшийся: наиболее крупные математики XVIII в. занимались также механикой, физикой, а иногда и вопросами техники.

Только что отмеченное изменение в социальном положении большинства математиков было обусловлено, прежде всего, значительно возросшей ролью математики в разработке многочисленных проблем, первостепенное значение которых не вызывало сомнений ни у ведущих идеологов, руководивших общественным мнением, ни у крупнейших государственных деятелей, определявших научную и образовательную политику. Польза математики реально подтверждалась ее применением к решению все ширившегося круга практических вопросов; еще большего ожидали от нее в будущем, через посредство механики и других наук. Однако было немало сомневающихся в полезности отвлеченных исследований, и, чтобы рассеять такие сомнения, ученые XVIII в. напечатали немало статей и произнесли немало речей, примером которых может служить выступление на торжественном собрании Петербургской академии в 1761 г. ее сочлена С. К.Котельникова (1723—1806), давшего яркий исторический обзор достижений и приложений математики от древности до середины XVIII в. и призывавшего, вслед за М. В. Ломоносовым (1751), к объединению творческих усилий теоретиков и практиков. О роли абстрактных математических идей С. К. Котельников говорил: «И понеже математики рассуждают вообще о всех вещах, ничего не называя своим именем, или поколику они (вещи.— *Ред.*) в рассуждении их величины или количества их свойств переменяются, яко тягости, твердости, движения, теплоты, упругости и прочих качеств; то можно оные рассуждения их во всех употреблять науках, глядя по обстоятельствам случающихся в телах перемен. Ибо к полезному оных в других науках употреблению почти ничего больше не надобно, как каждое количество назвать своим именем, которых уже свойства и их перемены исследованы и включены в формулы аналитические»[1]. Конечно, С. К. Котельников, как семьюдесятью годами ранее Лейбниц (см. т. II, стр. 252), переоценивал возможности современной ему математики. Ж. Б. Фурье выразил в общем виде ту же мысль, заявив шестьдесят лет спустя, что математический анализ столь же обширен, как природа.

---

[1] *С. К. Котельников.* Слово о пользе упражнения в чистых математических рассуждениях. СПб., 1761, стр. 17.

Научное развитие в отдельных странах Европы, как и хозяйственное, так и политическое, было неравномерным.

После Ньютона, продолжавшего оказывать личное влияние еще всю первую четверть XVIII в., Англия не дала математиков, сравнимых с ним. Наиболее крупными английскими математиками XVIII в., помимо Ньютона, были А. де Муавр, Р. Коутс, Б. Тейлор, Дж. Стирлинг, К. Маклорен и Э. Варинг. Все они успешно работали в области математического анализа, а некоторым принадлежат также важные результаты в алгебре, теории вероятностей, теории чисел, теории конечных разностей и геометрии.

Из крупных французских математиков XVIII в., кроме не раз уже упомянутых нами Клеро, Даламбера, Лагранжа и Лапласа, внесших особенно значительный вклад в развитие математического анализа, алгебры

Начальный лист объявления о лекциях петербургских академиков на 1726 г. (Архив АН СССР, Ленинград)

АКАДЕМІА

НАУКЪ РОССІИСКАЯ

ЧІТАТЕЛЮ ЗДРАВІЕ.

Академію, намѣренiемъ ПЕТРА Великаго опредѣленную, и нѣкимъ образомъ зачатую, а нечаемымъ благочестивѣйшаго Імператора преставленiемъ гораздо ослабленную, Августѣйшая Імператрица ЕКАТЕРИНА, премудрымъ своимъ промышленiемъ, хотя и многiе члены, изъ разныхъ Европейскiхъ странъ въ Столицу сiю на то призваны были, вышше чаянiя уставила, и въ совершенство привела.

Должность же въ сей Академiи собраннымъ двойна будетъ: Какъ въ исканiи и умноженiи новыми обрѣтенiями наукъ, а наипаче Медицины, Физики, Математики и прочихъ свободныхъ наукъ, такъ и въ ученiи Россiйскихъ юношъ, да они сiмъ образомъ по первой должности своей Академiямъ наукъ, Парижской, Лондонской, Берлинской, какъ въ публичныхъ собранiяхъ трижды повсягодно будущихъ, [отъ нихже первое не давно Его Высочества Королевскаго Герцога Голстеинскаго присутствiемъ просвѣтилося] такъ и совѣтованiемъ приватнымъ дважды по всякой недѣли, а имянно, во Вторникъ и Пятокъ, будущымъ подражали. А по другой своей должности о пользѣ собственной тѣхъ юношей, которые изъ пространной Россiи для ученiя и свободныхъ наукъ соберутся, потщатися будутъ. Того ради конца Профессоры сея Академiи, сего 1726 году, въ будущiи 24 день мѣсяца Генваря честнiями ученiе свое публичное начнутъ, во дни, Понедѣлникъ, Среду, Четвертокъ и Субботу, и впредь такiмъ опредѣленiемъ и учрежденiемъ поступать будутъ, о которомъ всѣмъ любителемъ добрыхъ наукъ, а наипаче рачителямъ къ ученiю, сiмъ для извѣстiя объявляется.

ДАНІИЛЪ БЕРНУЛЛИ, Физiологiи Профессоръ, начала Математическiя къ Феорiи Медической потребная, да прiличность ихъ къ Физiологiи научитъ. — предлоѣдi отъ часа 7. до 8.

ѲЕОФІЛЪ СІГФРІДЪ БАЕРЪ, Антiквитетовъ Профессоръ древностеи Греческiе, Манеты и достопамятные вещи ветхаго Рима изъяснитъ.

НІКОЛАИ БЕРНУЛЛИ, Математики Профессоръ, о тѣхъ части Математики, которые къ Физикѣ прiвязаны, и особлiво о Механикѣ читать будетъ. — съ 8: до 9.



Здание Базельского университета в XVI—XVIII вв. по городскому плану М. Мериана, 1615 г.; № 12 — верхняя коллегия, под № 16 — нижняя коллегия (Архив г. Базель)

и теоретической механики, следует назвать Г. Монжа и А. М. Лежандра, которые наряду с вопросами анализа много занимались геометрией, а последний так же, как и Лагранж, еще теорией чисел.

Меньше математиков, чем другие страны, выдвинула в XVIII в. Германия, однако среди них были такие колоссы, как Лейбниц, активно работавший еще в начале века, и К. Ф. Гаусс, выступивший в самом конце его. В течение 25 лет в Германии работал приехавший из России и вернувшийся туда же Эйлер, в течение 20 лет — Лагранж, который прибыл в Германию из Италии, а затем переселился во Францию. В области теории чисел, анализа и геометрии здесь работал также эльзасец И. Г. Ламберт.

В Швейцарии еще до середины XVIII в. трудился Иоганн Бернулли, но ни дети его Даниил и Николай, ни его ученик Эйлер не смогли (как ранее Я. Герман) найти применение своим силам на родине, где было слишком мало университетских ставок по точным наукам [1].

Создание в 1725 г. Петербургской академии сразу вывело Россию на одно из ведущих мест в мировой науке. При основании академии к работе в ней были привлечены такие первоклассные европейские математики, как только что упомянутые Я. Герман и Д. и Н. Бернулли. По поводу переезда своих сыновей в Россию И. Бернулли писал: «Лучше несколько потерпеть от сурового климата страны льдов, в которой приветствуют муз, чем умереть от голода в стране с умеренным климатом, в которой муз оби-

---

[1] Впоследствии для Д. Бернулли все же нашлось место профессора в Базельском университете (см. стр. 77).

жают и презирают»[1]. Два года спустя к ним присоединился Леонард Эйлер, сыгравший особенно большую роль в том, что Петербургская академия стала одним из главных центров научных исследований. С первых же лет существования Петербургская академия занялась и подготовкой национальных кадров. Наиболее крупным из ученых, воспитанных Академией, был великий М. В. Ломоносов (1711—1765). Из числа непосредственных учеников Эйлера назовем его сына И. А. Эйлера, С. К. Котельникова, С. Я. Румовского, М. Е. Головина и швейцарца Н. И. Фусса. В конце столетия в академии работали также А. И. Лексель, Ф. И. Шуберт и С. Е. Гурьев.

Итальянскую математику в первой половине XVIII в. представляли аналисты Дж. и В. Риккати и Дж. Фаньяно, а также геометр Дж. Саккери; во второй половине — геометр Л. Маскерони и, на рубеже XVIII и XIX вв., алгебраист П. Руффини. Упомянем еще Марию Гаэтану Аньези, первую в Европе Нового времени женщину, получившую известность благодаря заслугам на поприще математики, более всего благодаря двухтомным «Основаниям анализа для употребления итальянского юношества» (1748; франц. перевод 2-го тома, 1775; англ. перевод, 1801).

В Италии же в середине XVIII в. работал разносторонний югославский ученый из Дубровника Руджер Иосип Бошкович. К концу XVIII в. и особенно началу XIX в. относится деятельность польского математика Юзефа Гёне-Вронского, которому принадлежит ряд исследований по анализу и алгебре, и чешского математика Бернарда Больцано, одного из участников реформы оснований анализа.

Отметим еще, что в XVII—XVIII вв. начался подъем исследований в отдельных направлениях теории определителей и исчисления бесконечно малых в Японии.

Математическое образование

XVIII в. характеризуется значительным прогрессом математического образования. Хотя в университетах физико-математические факультеты еще не были выделены из философских, но элементарно-математические курсы, читавшиеся в ряде университетов Западной Европы, теперь в ряде случаев дополняются начальными разделами аналитической геометрии и анализа; впрочем, слушатели этих лекций насчитывались единицами. Такие курсы читались, например, в Германии Х. Вольфом и А. Г. Кестнером, в России — академиками для студентов университета, организованного при академии.

Во Франции, да и в других странах, важную роль в подготовке ученых в XVIII в. играли военные, военно-инженерные, морские школы, математические программы которых нередко превосходили по содержанию и объему университетские курсы. Во время революции в 1794 г. были организованы высшие учебные заведения нового типа — Политехническая и Нормальная школы. Политехническая школа давала чрезвычайно высокую теоретическую подготовку будущим инженерам; обучение в ней продолжалось два года, после чего ее питомцы проходили еще двухлетний специальный курс в других военных или гражданских технических учеб-

---

[1] *L. G. du Pasquier.* Léonard Euler et ses amis. Paris, 1927, p. 9.

ных заведениях. В этих последних можно было начать обучение с самого начала, но к высшим государственным техническим должностям заранее готовили студентов Политехнической школы. Поступающие в нее отбирались по жесточайшему конкурсу. Нормальная школа должна была готовить высококвалифицированных педагогов. К преподаванию в обеих школах были привлечены лучшие ученые Франции, среди них: Монж, который принял особенно деятельное участие в создании Политехнической школы и руководстве ею, Лагранж, Лаплас, Лакруа и Фурье. На долю Политехнической школы выпала крупная роль в развитии физико-математических наук, особенно в первой половине XIX в.; из нее вышли такие выдающиеся математики, как О. Коши, С. Пуассон, Ж. В. Понселе, М. Шаль, А. Пуанкаре, Ж. Адамар (учившийся также в Нормальной школе) и другие. Пример обеих школ вскоре оказал плодотворное влияние на организацию высшего физико-математического и инженерного образования и в других странах, в том числе в России.

В XVIII в. происходит и реформа учебной литературы по математике. В 1710 г. в Галле вышло первое издание четырехтомных «Первых оснований всех математических наук» (Anfangsgründe aller mathematischen Wissenschaften) последователя Лейбница и Чирнгауза, профессора в Галле Христиана фон Вольфа (1679—1754); сокращенное изложение этого курса выдержало затем не менее десяти изданий, начиная с 1717 г. Если изложение в учебных руководствах прежних веков носило, как правило, догматический характер и ограничивалось рецептами и примерами построений и вычислений, то главной отличительной чертой курсов Вольфа и целого ряда его последователей было желание пропитать обучение духом математического метода и поставить во главу всего воспитание математического мышления, добиваясь от учащихся не только запоминания, но и понимания предложений и правил. Однако это, по общей тенденции прогрессивное, направление педагогической мысли страдало переоценкой формальной и на деле часто иллюзорной строгости в ущерб наглядности и понятности изложения; начальные отделы учебников загромождались многочисленными аксиомами, постулатами и определениями, не получавшими затем применения; во многом оставляла желать лучшего структура курсов. Несколько позже в Германии стали появляться руководства, в большей мере удовлетворявшие все возраставшей потребности соединить научность и доступность изложения и к тому же учитывавшие новые достижения математики. Таковы были, например, курсы А.-Г. Кестнера (1 изд. 1758 г.). Заметим, что «Сокращение первых оснований математики» (Auszug aus den Anfangsgründen aller mathematischen Wissenschaften) Вольфа вышло на русском языке с дополнениями переводчика — С. К. Котельникова, использовавшего и труды Эйлера по анализу (два тома, СПб., 1770—1771). Был также издан на русском языке двухтомный учебник Кестнера (см. стр. 50).

Во Франции в 1741 и 1746 гг. вышли «Начала геометрии» и «Начала алгебры» А. К. Клеро, в значительной степени реформировавшие преподавание этих дисциплин; об обеих книгах мы будем говорить ниже. Кроме курса алгебры Клеро, выдающиеся руководства по этой дисциплине были написаны Маклореном («Трактат по алгебре в трех частях», опубликованный посмертно в 1748 г.) и Эйлером (в русском переводе «Универсальная арифметика», вышедшая в 1768—1769 гг., в немецком оригинале «Полное введение в алгебру», вышедшее в 1770 г.); Эйлером же были написаны две части «Руководства к арифметике», также опубликован-

ные на немецком (СПб., 1738—1740) и русском языках (СПб., 1740—1760) [1].

Если англичане в преподавании геометрии и в XVIII в. в основном следовали «Началам» Евклида, то французская методика этой дисциплины существенно отходит от принципов Евклида. Клеро в этом отношении не был первым: корни «антиевклидова» построения курса геометрии восходят здесь еще в XVI в. к П. Раме (см. т. I, стр. 307). В статье «Геометрия» (Géométrie) в «Энциклопедии» (1757) Даламбер изложил свои идеи по этому вопросу. По мнению Даламбера, преподавание геометрии не должно идти по пятам за Евклидом, оно должно быть различным для начального обучения, для более серьезного обучения и для подготовки людей, имеющих склонность к специальным занятиям этой наукой. Даламбер выступает против «химерической» точности, на которую претендовали некоторые комментаторы Евклида, в соответствии с чем полагает, что курс геометрии не следует начинать с аксиом. Строгой точности Даламбер предпочитает доступность, и сложные истины он рекомендует сводить к простым, доступным и очевидным, не считаясь с их числом и не пытаясь дать их полный перечень. В противоположность Евклиду, Даламбер выдвигает на первое место метрическую геометрию, советуя систематически пользоваться движением. Даламбер отвергает евклидову теорию пропорций, а при вычислении длин кривых, площадей плоских фигур и объемов тел призывает обращаться к исчислению бесконечно малых. Даламберовские идеи начального обучения были отчасти реализованы Э. Безу в 6-м томе его «Курса математики для гардемаринов» (Cours de mathématiques à l'usage des gardes du pavillon et de la marine, v. 1—6, Paris, 1764—1769). Рекомендации, относившиеся к более серьезному курсу, нашли осуществление в замечательных «Началах геометрии» А. М. Лежандра (Éléments de géométrie. 1e éd., Paris, 1794), а лица, стремящиеся к специальным занятиям, обрели подходящее руководство в «Началах геометрии» (Éléments de géométrie. Paris, 1803) С. Ф. Лакруа.

Мы не можем здесь подробно рассмотреть учебную литературу XVIII в. и ограничиваемся наиболее широко распространенными или наиболее важными для последующего развития сочинениями. К числу таких книг относятся, помимо уже упомянутой «Универсальной арифметики» Эйлера, и его основоположные руководства по аналитической геометрии и анализу, а именно «Введение в анализ бесконечных» (1748 — 2 тома), «Дифференциальное исчисление» (1755) и «Интегральное исчисление» (1768—1769 — 3 тома). Все они долгое время вдохновляли поколения математиков; мы еще не раз вернемся к ним в последующем.

Большая роль в создании передовой учебной литературы выпала на долю профессоров Политехнической и Нормальной школ, в частности, члена Парижской академии Сильвестра Франсуа Лакруа (1765—1843), автора многочисленных руководств по элементарной и высшей математике, получивших распространение и за пределами Франции. Среди учебников Лакруа, отличавшихся высоким научным уровнем и педагогическим мастерством, мы назовем посвященный преимущественно аналитической геометрии «Элементарный курс прямоугольной и сферической тригонометрии и приложения алгебры к геометрии» (Traité élémentaire de trigonométrie rectiligne et sphérique, et d'application de l'algèbre à

[1] Эйлер не закончил этот труд; изданные им части содержат действия над целыми, дробными и именованными числами.

la géométrie. Paris, год VII, т. е. 1798—1799; изд. 25, 1897) и весьма содержательный, хотя и эклектический в вопросах обоснования, трехтомный «Трактат по дифференциальному и интегральному исчислению» (Traité du calcul différentiel et intégral. Paris, 1797—1802; 2e éd., 1814—1819). Но особенное значение имело издание на рубеже XVIII и XIX вв. лекций Г. Монжа по начертательной и дифференциальной геометрии и Лагранжа по теории аналитических функций, о которых нам еще придется подробно говорить в пятой и седьмой главах. И позднее многие книги, изданные на основе курсов, читанных в Политехнической и Нормальной школах, являли собой высокие образцы нового, удивительно изящного, обобщенного и сжатого стиля изложения как классических результатов, так и оригинальных открытий лектора. Классическими в этом отно-

Страница из «Математического лексикона» Х. Вольфа (Лейпциг, 1716)

863 Masse Mathe Mathematica 864

metria der mittlere Stern auf der lincken Hand des *Herculis*.

Massa, die eigenthümliche Materie,

Wird in der Mechanica diejenige genennet, welche sich mit dem Cörper zugleich beweget, und auch zugleich mit ihm wieget. Denn daß bloß die Materie sich mit dem Cörper bewege, die mit ihm wieget, habe ich in meinen Element. Mechan. §. 98 erwiesen. Am allerersten hat dieses der Herr *Newton* gefunden und auf eine andere Art, als von mir geschehen, durch Hülffe mit pendulis angestellter experimentorum in seinen Principiis Mathemat. lib. 2 Prop. 24. Cor. 7. p. 273 & seqq. erwiesen.

Mathematica seu Mathesis, die Mathematick,

Ist eine Wissenschafft alles auszumessen, was sich ausmessen läst. Insgemein beschreibet man sie *per scientiam quantitatum*, durch eine Wissenschafft der Grössen, das heisset, aller derjenigen Dinge die sich vergrössern oder verkleinern lassen. Da nun alle endliche Dinge sich ausmessen lassen in allem demjenigen, was sie endliches an sich haben, das ist, was sie sind; so ist nichts in der Welt, dabey die Mathematick nicht könte angebracht werden. Ja weil man keine genauere Erkäntnis haben kan, als wenn man die Eigenschafften der Dinge auszumessen vermögend ist; so bringet uns die Mathematick zu der vollkommensten Erkäntnis aller möglichen Dinge in der Welt. Da nun ferner diese Erkäntnis uns geschickt machet die Kräffte der Natur nach unserem Gefallen zu unserem Nutzen in dem Grade anzuwenden, den wir verlangen; so erlangen wir durch die Mathematick die Herrschafft über die Natur. Es ist aber aus dieser Erklärung der Mathematick zugleich zu ersehen, daß sie eigentlich nur aus der Geometrie, Arithmetick und Algebra bestehe, als auf welchen Wissenschafften alles Ausmessen beruhet. Und solcher gestalt sind die übrigen Theile der Mathematick nichts anderes als aus anderen Wissenschafften entlehnete Stücke, die man durch die Mathematick ausgearbeitet oder zu ihrer Vollkommenheit gebracht. So haben wir aus der Physick die Mechanick, Statick, Hydrostatick, Hydraulick, Optick, Catoptrick, Dioptrick, Perspectiv, Acustick, Aerometrie, Astronomie, Geographie, Hydrographie; aus der Metaphysick oder vielmehr der Ontologie die Chronologie und Gnomonick; aus der Politick die Festungs- und Bürgerliche Bau-Kunst bekommen. Den Nutzen der Mathematick habe ich in der Vorrede meiner Elementorum Matheseos vorgestellet. Der Herr von Rohr hat A. 1713 einen besonderen ausführlichen Tractat davon in Halle drucken lassen. Das Vornehmste, was man von ihr

шении являются знаменитые курсы О. Коши «Алгебраический анализ» (Analyse algébrique. Paris, 1821) и «Резюме лекций... по исчислению бесконечно малых» (Résumé des leçons... sur le calcul infinitésimal. Paris, 1823).

В конце XVIII и начале XIX в. появляются и сочинения по методике, из которых следует отметить «Опыт о усовершении елементов геометрии» (1798) С. Е. Гурьева, а также «Опыт о преподавании вообще и преподавании математики в частности» (Essai sur l'enseignement en général et sur celui des mathématiques en particulier. Paris, 1805) С. Ф. Лакруа.

Распространению математических знаний содействовали различные энциклопедии, как специальные, так и общего характера. Такие труды издавались не раз в Англии, Германии, Франции. Укажем хотя бы «Математический лексикон» (Mathematisches Lexicon. Leipzig, 1716) Х. Вольфа и замечательные математические статьи в «Энциклопедии» Дидро, изданные отдельно в «Методической энциклопедии, расположенной по порядку вопросов» (Encyclopédie méthodique par ordre des matières. Paris, 1784—1789). В математических энциклопедиях сообщались сведения и по истории математики.

История математики

В XVIII в. были достигнуты значительные успехи в истории математики, которой, как особой дисциплины, мы до сих пор не касались. Исследования по истории наук восходят, по-видимому, к Аристотелю и его школе. Перипатетики придавали большое значение истории философской и научной мысли. Труды самого Аристотеля изобилуют историческими экскурсами, иногда весьма подробными; они служили либо для полемики, либо для пояснения собственных взглядов автора. Преемник Аристотеля по руководству школой, Теофраст, и другой ученик его, Евдем Родосский, написали сочинения по истории математики и астрономии, до нас не дошедшие, но мы знаем, что из них щедро черпали позднейшие греки, как например, Прокл (см. т. I, стр. 65). Био-библиографические изыскания проводились в странах ислама. Так, сведения о жизни и трудах многих ученых содержатся в книгах багдадца Абу-л-Фараджа Мухаммеда ан-Надима (ум. 995) и египтянина Абу-л-Хасана Али ал-Кифти (1172—1248).

В Европе возрождение интереса к истории наук и, в частности. математики началось в XV в. Своему курсу математики (т. I, стр. 307) П. Раме предпослал «Математическое введение в трех книгах» (Prooemium mathematicum in tres libros distributum. Ed. 1, 1567), где привел краткие сведения о трех периодах в развитии математики: халдейском — от Адама до Авраама, принесшего с собой эту науку в Египет, египетском (всего 4 страницы) и греческом — от Фалеса до Теона Александрийского (34 страницы). Нового периода Раме не затронул. Аббат Бернардино Бальди (1553—1617), ученик Ф. Коммандино, в «Хронике математиков» (Cronica de' Matematici. Urbino, 1707) довел изложение до своих современников, но его книга увидела свет более чем через сто лет после того, как была написана. И Раме, и Бальди располагали небогатым и часто неточным материалом, а их описания не содержали анализа идей и методов.

Вслед за Раме и другие авторы стали включать в учебные руководства исторические очерки. Так поступил, например, в «Началах плоской и пространственной геометрии» (Elementa geometriae planae et solidae.

Antwerpiae, 1654) А. Таке, многое заимствовавший у Раме. Заметим, что это сочинение в сокращенной обработке было издано на русском языке и в нем русский читатель впервые получил систематический, хотя и весьма сжатый, обзор — почти только перечисление — некоторых важнейших фактов истории математики. Здесь можно было узнать про Фалеса, Пифагора, Демокрита — «дивного философа и мафематика», труды которого пропали «от зависти Аристотелеса, который желал, чтобы только его книги читали», про Евдокса и Евклида, про Архимеда — «главнейшего и совершеннейшего и субтелнейшего мафематика», про Аполлония и Диофанта, изобретшего алгебру, «которую совершили Виэта и Картезий». В заключение подчеркивалось, что математика и философия суть «двойни, которых кто разлучить хочет, береги, чтобы не повредить природного согласия: понеже обыкновенно случается, когда одного не будет, тогда и другому худо» [1].

Некоторые ученые стремились использовать исторические материалы в занимавших столь видное место спорах о приоритете. Примером может служить «Исторический и практический трактат по алгебре» (1685) Дж. Валлиса, который преувеличивал заслуги английских алгебраистов, умаляя достижения французских. Литература, порожденная спором о приоритете между Ньютоном и Лейбницем, полна исторических справок, частью точных, частью искажающих действительность.

В XVIII в. работы по истории наук приобрели официальную поддержку, так как стали в некоторой мере обязанностью академий наук, которые должны были отчитываться о своей научной деятельности за те или иные сроки. Непременные секретари многих академий писали историю науки, так сказать, в лицах, поскольку стало обычаем публиковать в виде «похвальных слов» биографии умерших академиков. Замечательные литературные образцы таких научных биографий оставили секретари Парижской академии наук Бернар де Фонтенель (1657—1757), Даламбер и Антуан Никола де Кондорсе (1743—1794), даровитый математик, сотрудник великой «Энциклопедии» Дидро, а в годы Французской революции — выдающийся политический деятель, близкий к жирондистам. В 1792 г. он разработал пронизанный передовыми идеями проект организации народного образования. История человеческой мысли живо увлекла Кондорсе. Незадолго до смерти (он покончил с собой в тюрьме при господстве якобинцев) он написал незаконченный «Эскиз исторической картины прогресса человеческого разума» (Esquisse d'un tableau historique des progrès de l'esprit humain, 1794). Движущей силой общественного развития Кондорсе считал прогресс разума, наук и образования; именно этот прогресс, вместе с полным уравнением в гражданских и политических правах всех мужчин и женщин, должен обеспечить бесконечное совершенствование человечества. Понимание идейной и просветительной ценности истории наук содействовало ее успехам еще более, чем необходимость писать биографии покойных академиков и отчеты о достижениях академий. Сама

---

[1] Эвклидовы элементы. СПб., 1739, стр. 1—7. Это издание было подготовлено работавшим в России шотландцем, воспитанником университета в Абердине, Андреем Даниловичем Фархварсоном (ум. 1739) и переведено сотрудником Петербургской академии лекарем Иваном Сатаровым. Фархварсон преподавал в Навигационной школе в Москве с ее основания в 1701 г., а с 1715 г. был профессором петербургской Морской академии. Его перу принадлежит еще «Книжица о сочинении и описании сектора, скал плоской и гунтерской со употреблением оных инструментов в решении различных математических проблем» (СПб., 1739).



Ж. Э. Монтюкла
(с гравюры П. Виеля)

идеология века разума благоприятствовала историко-научным исследованиям.

Еще Лейбниц, с его всеобъемлющими интересами и глубиной проникновения в психологию научного творчества, придавал истории науки большое значение для «искусства открытий». При этом он имел в виду, разумеется, не простую хронологию событий и каталоги имен и трудов, преобладавшие в прежних исторических описаниях, но историю идей. В таком же духе высказывался П. де Монмор (см. о нем стр. 127), писавший Николаю I Бернулли: «Было бы весьма желательно, чтобы кто-нибудь взял на себя труд рассказать нам, как и в каком порядке следовали одни за другими математические открытия, и кому мы ими обязаны. Писали историю живописи, музыки, медицины; хорошая история математики была бы трудом, гораздо более любопытным и более полезным. Какое удовольствие доставило бы узнать связь между методами, переплетение новых теорий, начиная с первых времен до нашего» [1]. Монмор, видимо, собирался подготовить подобный труд, но не выполнил своего намерения. Его требованиям не удовлетворяла и объемистая «История математики от сот-

[1] *P. de Montmort.* Essay d'analyse sur les jeux de hazard. 2e éd., Paris, 1713, p. 399.



А. Г. Кестнер
(с портрета, хранящегося в художественном собрании Гёттингенского университета)

ворения мира до XVI в. по р. Х., содержащая биографии, учения, а также сведения о сочинениях и рукописях главнейших математиков» (Historia matheseos universae a mundo condito ad saeculum p. C. n. XVI praecipuorum mathematicorum vitas, dogmata, scripta et manuscripta complexa. Lipsiae, 1742) лейпцигского преподавателя Иоганна Кристофа Гейльброннера (1706—1747). Реализация такого плана впервые удалась французскому ученому Жану Этьену Монтюкла (1725—1799). Монтюкла, сын лионского купца, в молодые годы оставил адвокатуру, чтоб целиком отдаться изучению прогресса математических наук.

В истории математики Монтюкла выступил сперва с «Историей исследований о квадратуре круга» (Histoire des recherches sur la quadrature du cercle. Paris, 1754), а за нею вскоре последовала двухтомная «История математики, в которой описан ее прогресс от ее возникновения до наших дней; где изложена картина и развитие главных открытий во всех частях математики, споры, возникавшие между математиками, и главные моменты жизни наиболее знаменитых» (Histoire des mathématiques, dans laquelle on rend compte de leurs progrès depuis leur origine jusqu'à nos jours; où l'on expose le tableau et le développement des principales découvertes dans toutes les parties des mathématiques, les contestations qui se sont élevées entre les mathématiciens, et les principaux traits de la vie des plus célèbres).

Несмотря на недостатки, связанные как с тогдашним уровнем исторических знаний, так и с тем, что в некоторых случаях автор черпал сведения из вторых рук, несмотря на заметное пристрастие его к соотечественникам, труд Монтюкла явился выдающимся произведением. В нем история математических наук была поднята на новую ступень и из перечня разрозненных фактов биографического, библиографического и научного характера превратилась в целостную историю идей в их связях и взаимодействии, анализируемых с позиций современной автору науки. Рассмотрение таких взаимосвязей было тем более естественным, что Монтюкла, в духе своего времени, понимал под математикой — les mathématiques — весь комплекс точных наук, включая в него не только механику, астрономию и многие отделы физики, но еще и навигацию, географию и т. д.

В первом издании книги Монтюкла довел изложение до начала XVIII в. Увлекательно и в значительной части доступно написанная книга имела успех. В конце жизни Монтюкла подготовлял второе издание своего труда, которое должно было охватить XVIII в. Он успел выпустить в переработанном виде первые два тома (Париж, 1799), но смерть застигла его, когда он завершал работу лишь над третьим из намеченных четырех. До конца довел этот том и составил четвертый (Париж, 1802) астроном Жозеф Жером де Лаланд (1732—1807). Ученый мир высоко оценил заслуги Монтюкла как историка математики. Об этом свидетельствует его избрание, по предложению Мопертюи и Эйлера, иностранным членом Берлинской академии наук в 1755 г. и членом Парижской академии наук (тогда — I класса Национального института) в 1796 г. Книга Монтюкла, хотя далеко не полностью, вышла и в России. Русский перевод, доведенный почти до начала XVII в., печатался под названием «Истории о мафематике» в «Академических известиях» на протяжении 1779—1781 гг., правда, без указания автора, так что в свое время книгу приписывали переводчику Петру Богдановичу, писателю и издателю. Почему Богданович не закончил перевода — неизвестно.

Еще больший успех выпал на долю «Опыта общей истории математики» (Essai sur l'histoire générale des mathématiques, Paris, 1802, 2 тома) преподавателя Политехнической школы и парижского академика Шарля Боссю (1730—1814) — книги, выросшей из его же вступительной статьи, напечатанной в «Математическом словаре» (Dictionnaire mathématique, 1784), входившем в состав «Методической энциклопедии» (см. стр. 26). В значительной части этот успех был связан с тем, что книга Боссю имела гораздо меньший объем, чем огромный четырехтомник Монтюкла. Она была переиздана в 1810 г. и еще ранее вышла в итальянском (1802), английском (1803) и немецком (1806) переводах. Упомянем еще незавершенную «Историю математики от возрождения наук до конца восемнадцатого столетия» (Geschichte der Mathematik seit der Wiederherstellung der Wissenschaften bis an das Ende des achtzehnten Jahrhunderts. Leipzig — Göttingen, 1796—1800) профессора университета в Гёттингене Абраама Готтгильфа Кестнера (1719—1800), содержащую полезные сведения обо многих редких сочинениях, которые автор всегда стремился изучить весьма обстоятельно.

Наряду с такими общими трудами начали появляться исторические обзоры отдельных дисциплин и проблем. Мы упомянули подобную книгу о квадратуре круга Монтюкла. Назовем еще «Обзор важнейших попыток доказательства теории о параллельных линиях» (Conatuum praecipuorum theoriam parallelarum demonstrandi recensio. Göttingen, 1763) ученика

Кестнера профессора Георга Симона Клюгеля, а также «Критическую историю происхождения, распространения в Италии и первых успехов в ней алгебры» (Storia critica dell'origine, trasporto in Italia e primi progressi in essa dell'algebre, Parma, 1779) профессора университетов в Парме и Падуе Пьетро Коссали (1748—1815). Некоторые выдающиеся математики, не занимаясь специально историей своей науки, отводили в своих сочинениях место критическим обзорам развития рассматриваемых проблем. Таковы, например, блестящие исторические резюме в классических «Аналитической механике» (1788) и «Теории аналитических функций» (1797) Лагранжа.

Отметим в заключение популярные статьи и публичные выступления математиков, в которых история науки использовалась для объяснения места науки в общественной жизни. В XVIII в. наука не без труда завоевывала признание у широкой публики, претендовавшей на образованность, и, как говорилось, популяризация наук и доказательство их практической полезности являлись предметом особых забот ученых; этой цели служили специальные журналы, книги и речи. Примеры из истории науки и ее приложений были одним из средств опровергнуть предубеждение, что занятия ученых высокими и, казалось бы, отвлеченными вопросами «на деле в общем житии к пользе человеческого общества не способствуют». Мы привели только что слова из статьи двух петербургских академиков — астронома А. Н. Гришова (1726—1760) и механика И. Э. Цейгера (1720—1784) — под названием «О пользе высшей математики в общем житии» [1]. Необходимость заставляла время от времени возвращаться к этому вопросу: через четыре года ученик Эйлера академик С. К. Котельников произнес в публичном собрании Академии наук уже упоминавшееся «Слово о пользе упражнения в чистых математических рассуждениях». В этой превосходной речи, как и в только что упомянутой статье, аргументация основана в значительной мере на обширном и искусно подобранном историческом материале. К подобной защите «чистой науки» нередко прибегали тогда и в России, и в других странах.

---

[1] «Ежемесячные сочинения», август, 1757, стр. 161.

ВТОРАЯ ГЛАВА

АРИФМЕТИКА И АЛГЕБРА

Леонард Эйлер

Нам уже несколько раз встречалось и часто встретится в дальнейшем имя Эйлера. Этот великий ученый несомненно являлся центральной фигурой в науке XVIII столетия, и мы прежде всего познакомимся с его жизненным путем и творчеством.

Научная деятельность Эйлера продолжалась без перерыва почти шестьдесят лет. С 1726 г. по 1783 г. он вел исследования во всех областях математики и механики XVIII в., а кроме того, во многих отделах астрономии, физики и техники. Его перу принадлежит около 850 научных трудов, среди них примерно два десятка объемистых монографий в одном, двух и трех томах. Издание полного собрания его сочинений в трех сериях и более чем в семидесяти томах, начатое в 1911 г., еще не вполне закончено; в него не входят еще многие сотни сохранившихся научных писем Эйлера, нередко представляющих собой небольшие статьи,— их предполагается издать в виде четвертой серии. Эйлер был не только величайшим математиком своего времени, которое по всей справедливости можно было бы наименовать в истории физико-математических наук «веком Эйлера», но и крупным организатором работ двух больших академий: Петербургской и Берлинской.

Леонард Эйлер (1707—1783) родился в Базеле и первые уроки математики получил от отца, пастора Пауля Эйлера (1670—1745), обучавшегося этому предмету у Я. Бернулли и в 1688 г. защитившего диссертацию по теории отношений и пропорций. Отец предназначал сына также в пасторы, но склонность к математике взяла верх. В годы занятий в Базельском университете (1720—1724) Леонард Эйлер дополнительно изучал математику и механику под руководством Иоганна Бернулли. В 1725—1726 гг. молодой Эйлер выступил с первыми самостоятельными работами об изохронных кривых в сопротивляющейся среде, об одном специальном виде траекторий, о наилучшем расположении мачт на корабле (эта работа, представленная на конкурс Парижской академии, была принята к печати, хотя и не получила премии), о звуке. Диссертация о звуке была написана в связи с намерением Эйлера участвовать в конкурсе на вакансию профессора физики в Базельском университете. Должности здесь замещались тогда путем жребия среди отобранных кандидатов. Эйлер не был допущен к жеребьевке, вероятно, по молодости. Как пишет его швейцарский биограф О. Шпис, это было для Эйлера счастьем: в то время перед ним открывалась более широкая перспектива деятельности.

Действительно, делая попытку устроиться на родине, Эйлер уже имел приглашение в Петербургскую академию наук, которое ему выхлопотали работавшие в ней с 1725 г. сыновья его наставника Даниил и Николай II Бернулли. Эйлер последовал этому приглашению и весной 1727 г. приехал в русскую столицу. Вначале предполагалось, что он займет свободную должность адъюнкта, т. е. младшего академика, по физиологии с тем, чтобы применить к этой науке математические методы. Перед поездкой Эйлер несколько месяцев штудировал анатомию и медицину, к которым, впрочем, не имел никакого призвания. Но в Петербурге все уладилось наилучшим образом: ему предоставили возможность работать в области математических наук. Несколько позднее это было оформлено официально. В январе 1731 г. Эйлер получил место профессора, т. е. академика по физике, а летом 1733 г. заместил уехавшего Д. Бернулли на кафедре математики.

В благоприятных условиях крупной академии, в регулярном общении с другими учеными — математиками, механиками, астрономами, физиками — гениальность Эйлера быстро проявилась во всей полноте. Человек исключительной энергии, он принял активное участие в различных академических мероприятиях, требовавших применения математики: составлении географических карт, различных технических экспертизах, решении многочисленных задач кораблестроения и кораблевождения, в составлении учебных руководств и отзывов на поступавшие сочинения и т. д. В задачах практики рождались стимулы и для многих теоретических исследований Эйлера, которые составляли главный предмет его неустанных размышлений.

Частью еще в Базеле, но главным образом в первые годы жизни в Петербурге Эйлер наметил обширную программу исследований по математике и механике, которую успешно осуществлял, постоянно ее дополняя, до самых последних дней. Открытия его, печатавшиеся в академических «Записках» со второго их тома за 1727 г. (1729) и нередко получавшие известность еще до публикации благодаря его научной переписке, вскоре привлекли внимание ученого мира Европы. Слава его росла из года в год. Это своеобразно выразил в своих письмах к Эйлеру его прежний наставник Иоганн Бернулли, именуя его в 1728 г. «ученейшим и даровитейшим юным мужем», в 1731 г. «славнейшим и ученейшим господином профессором, дражайшим другом» и, наконец, в 1746 г. «главой математиков» (Mathematicorum princeps). В это время Эйлер был членом двух академий — Петербургской и Берлинской. Несколько спустя его избрали своим иностранным членом Лондонское королевское общество (1749) и Парижская академия наук (1755).

Эйлер прожил в Петербурге 14 лет, отмеченных основоположными исследованиями в теории рядов, теории дифференциальных уравнений, вариационном исчислении, теории чисел, динамике точки, теории музыки, в корабельной науке. Только часть подготовленных им в то время рукописей была тогда издана; за эти годы их вышло около 55, в том числе двухтомная «Механика» (1736). Летом 1741 г. Эйлер переехал в Берлин, куда его пригласил прусский король Фридрих II, желавший поднять на высокий уровень деятельность Берлинской академии наук, влачившей при его предшественнике самое жалкое существование. Эйлер принял приглашение, так как в регентство Анны Леопольдовны, правившей с ноября 1740 г. по декабрь 1741 г., в Петербурге сложилась весьма неустойчивая и беспокойная политическая обстановка, отражавшаяся и на положении дел в Академии наук.



Л. Эйлер
(Барельеф, гипс, работы М. И. Павлова, 1777 г. Музей М. В. Ломоносова, Ленинград)

Возглавляя Математический класс в качестве его директора, а в отсутствие президента Мопертюи и ряд лет после его смерти и всю работу Берлинской академии, Эйлер вместе с тем сохранил звание почетного члена Петербургской академии (с постоянной пенсией), фактически же оставался ее иногородним действительным членом. Сил его хватало для совершенно полноценного «совместительства» в двух академиях, свои сочинения он публиковал почти поровну в изданиях обеих и даже обе вместе они не справлялись с своевременной публикацией неиссякаемого потока его трудов. Помимо того, что он выполнял поручения прусского правительства по гидротехнике, баллистике, организации лотерей и проч., он редактировал математические отделы берлинских и петербургских академических записок, годами руководил занятиями живших у него на квартире молодых русских ученых — С. К. Котельникова, С. Я. Румовского, М. Софронова (1729—1760), участвовал в организации научных конкурсов обеих академий, вел живую переписку с немецкими университетскими профессорами и петербургскими академиками, в том числе М. В. Ломоносовым, подыскивал для нашей академии сотрудников, закупал для нее инструменты и книги. Силы Эйлера в зрелые годы кажутся неистощимыми. Продолжая осуществлять планы, намеченные в Петербурге, подготовляя или завершая фундаментальные трактаты по всем отделам анализа, он включает в круг занятий новые вопросы алгебры и теории чисел, эллиптические интегралы, уравнения математической физики, тригонометрические ряды, дифференциальную геометрию поверхностей, задачи топологии, механику твердого тела, гидродинамику, теорию движения Луны и планет, оптику, магнетизм и в каждой из перечисленных областей получает значительные и нередко первостепенные результаты.

В это же время Эйлеру пришлось участвовать в нескольких важных дискуссиях, из которых мы назовем по крайней мере три: 1) знаменитый спор о природе функций, входящих в решение дифференциального уравнения колеблющейся струны, в котором участвовали, кроме него, сперва Даламбер и Д. Бернулли, а затем втянулись и другие крупнейшие математики; 2) спор с Даламбером о логарифмах отрицательных чисел (мы еще вернемся к обоим вопросам) и, наконец, 3) спор с английским оптиком Доллондом, в котором Эйлер, исходя, правда, из ошибочной предпосылки, доказывал в противовес своему оппоненту возможность построения ахроматических объективов, которые несколько неожиданно были действительно построены самим Доллондом.

На годы берлинской жизни приходится издание таких больших монографий Эйлера, как «Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума, либо минимума» (Лозанна — Женева, 1744), «Новые принципы артиллерии» (Берлин, 1745) [1], двухтомное «Введение в анализ бесконечных» (Лозанна, 1748), двухтомная «Морская наука» (Петербург, 1749), изданные в Берлине за счет Петербургской академии «Теория движения Луны» (1753), «Дифференциальное исчисление» (1755) и «Теория движения твердых тел» (Росток — Грейфсвальд, 1765) — в общей сложности всего около 260 работ.

---

[1] Это был немецкий перевод английского сочинения Б. Робинса (ср. стр. 259), но дополнения Эйлера по вопросам баллистики здесь в пять раз превосходят по объему текст автора.

Петербургская академия не раз ставила перед Эйлером вопрос о его возвращении. В 60-е годы отношения между Эйлером и Фридрихом II, и ранее не питавшими взаимной симпатии, резко ухудшились. Эйлер, швейцарский бюргер, воспитанный в протестантской традиции, и Фридрих II, прусский абсолютный монарх, поклонник вольтерианского вольнодумства, расходились в очень многом, в том числе и в отношении к математике, которая была для Эйлера делом всей его жизни и в которой король, почти вовсе не знавший ее, ценил только непосредственные и немедленные практические приложения. После смерти в 1759 г. Мопертюи король предложил место президента Даламберу, а когда тот отказался, поручил Эйлеру управлять академией без президентского титула и под своим личным руководством. Разногласия в некоторых финансовых и административных вопросах повлекли за собой разрыв между ученым и королем. Используя свое швейцарское подданство и поддержку русского правительства, Эйлер добился отставки и летом 1766 г. навсегда вернулся в Петербург.

Вскоре после возвращения в Россию Эйлер, еще около 1738 г. потерявший один глаз, почти полностью ослеп на второй. Теперь он должен был заниматься с помощью секретарей, которым диктовал свои сочинения или же давал подробные указания об их литературном оформлении. Секретарями служили высоко образованные молодые ученые: старший сын Эйлера Иоганн-Альбрехт (1734—1800), А. И. Лексель, физик В. Л. Крафт (1743—1814), позднее Н. И. Фусс и М. Е. Головин (см. стр. 209—213); все пятеро были учениками Эйлера и состояли членами Петербургской академии, а И.-А. Эйлер с 1769 г. был ее конференц-секретарем. Изумительная память и духовная мощь Эйлера не ослабевали до конца жизни. За второй петербургский период, длившийся 17 лет, он опубликовал даже больше статей и книг, чем за 25 лет пребывания в Берлине. Мы назовем несколько наиболее крупных по объему трудов. Это двухтомная «Универсальная арифметика» (Петербург, 1768—1769), которую под диктовку Эйлера записал его слуга-немец; подготовленное еще в Берлине трехтомное «Интегральное исчисление» (Петербург, 1768—1770); знаменитые «Письма к одной немецкой принцессе по различным вопросам философии и физики» (три тома, Петербург, 1768—1772), возникшие из уроков, который Эйлер давал одной родственнице короля Фридриха [1]; составленная при участии Крафта трехтомная «Диоптрика» (Петербург, 1769—1771); «Теория движения Луны, трактованная новым методом» (Петербург, 1772), подготовленная совместно с И.-А. Эйлером, Крафтом и Лекселем; наконец, «Полная теория постройки и вождения кораблей» (Петербург, 1773). С помощью Фуса было написано около 250 статей, с помощью Головина — около 70. Если учесть, что не только идейное содержание перечисленных работ, но и бо́льшая часть текста и редакция принадлежат самому Эйлеру, то видно, что Эйлер выделяется среди математиков всех времен не только исключительной количественной продуктивностью, но еще тем, что эта продуктивность не ослабевала на склоне его лет. Вот распределение по десятилетиям числа подготовленных к печати работ, без различия больших и малых (несколько десятков трудов, которые не удалось датировать, оставлены в стороне):

[1] Эта популярная энциклопедия физических и астрономических знаний, вышедшая на французском языке, имела огромный успех и выдержала 12 французских изданий, 9 английских и 6 немецких, 4 русских (в переводе С. Я. Румовского), по 2 голландских и шведских, по одному итальянскому, испанскому и датскому.

Годы	Количество работ	%	Годы	Количество работ	%
1725—1734	35	4	1755—1764	110	14
1735—1744	80	10	1765—1774	145	18
1745—1754	150	19	1775—1783	270	34

Идейный порыв Эйлера в молодые и зрелые лета продолжал давать великолепные результаты и в старости. Добавим, что около 300 статей и фрагментов увидело свет уже после его смерти.

Эйлер был геометром в том широком смысле, какое это слово имело в XVIII в. Его математическое творчество в главным определялось глубокими связями между теоретическими и прикладными исследованиями, направленными на решение актуальных проблем естествознания и техники. Он внес вклад непреходящего значения не только в разработку рациональной механики точки, твердого тела, жидкостей и газов, небесной механики и теории упругости, но и в проектирование и теорию реактивных гидротурбин, в теорию зубчатых передач, в совершенствование конструкций и методов расчета телескопов и микроскопов, в корабельное дело, в черчение географических карт и т. д. Современники (и потомство) высоко ценили эти достижения Эйлера; упомянем тут же, что Эйлер одержал более чем кто-либо другой из ученых XVIII в. побед на конкурсах различных академий, предметом которых служили чаще всего насущные задачи механики, физики и техники [1]. Но сколь значительную роль не играли у Эйлера вопросы естествознания и техники, он был главным образом математиком. Эйлер — экспериментатор или создатель физических гипотез, как и Эйлер — конструктор далеко уступали Эйлеру — математику. В задачах физики и техники Эйлер с великим искусством выделял собственно математическое содержание и затем переходил к разработке приемов, позволяющих найти подходящее для практики числовое решение задачи, а самые эти приемы стремился затем развить в возможно более общей и широкой форме. Как «геометр» Эйлер отличался от другого крупнейшего «геометра» XVIII в., своего друга Даниила Бернулли, который, будучи прежде всего физиком, обращался к математике в меру необходимости, нередко ограничиваясь одними физическими соображениями и моделями, и не стремился глубоко развить какой-либо найденный им при изучении того или иного конкретного вопроса аналитический прием. Эйлер всегда разрабатывал математику как целое, отчетливо сознавая, что в таком развитии лучший залог ее прогресса, а значит и ее приложений. Характерная деталь: Д. Бернулли отзывался о занятиях Эйлера теорией чисел со снисходительной иронией, считая их данью чрезмерной утонченности вкусов своего столетия. Эйлер десятилетиями с особенной любовью и настойчивостью занимался теорией чисел и в этом за ним последовали такие гении теоретической и прикладной математики, как К. Ф. Гаусс и П. Л. Чебышев.

[1] Так, в 1738—1772 гг. Эйлер 12 раз получал премии Парижской академии наук за работы о приливах и отливах, о движении планет, по теории корабля, по магнетизму и т. д. К этому следует добавить 7 премий его сына Иоганна-Альбрехта, который лишь излагал и обрабатывал идеи отца, и еще вознаграждение от английского парламента, о котором говорилось в первой главе (см. стр. 11).

При всем многообразии интересов Эйлера центральное место в них принадлежит анализу. Из 30 томов математической серии его собрания сочинений 19 отведено анализу, за этим идут теория чисел ($4^1/_2$ тома), геометрия (4 тома), алгебра ($1^1/_2$ тома) и комбинаторика с теорией вероятностей (1 том). К тому же большинство геометрических работ Эйлера посвящено исследованию кривых и поверхностей с помощью алгебры и исчисления бесконечно малых, а многие труды его по механике (их также 30 томов) содержат новые математические приемы решения дифференциальных уравнений, интегрирования функций и т. д. В наших курсах анализа большое число формул и методов до сих пор носит имя Эйлера, и оно встречается, пожалуй, чаще других имен. Но, помимо отдельных приемов и формул, мы обязаны Эйлеру основанием нескольких больших дисциплин, которые лишь в зачаточной форме существовали ранее: теории дифференциальных уравнений — обыкновенных и с частными производными, вариационного исчисления, элементарной теории функций комплексного переменного. И он же положил начало теории суммирования рядов, разложениям функций в тригонометрические ряды, теории специальных функций и определенных интегралов, дифференциальной геометрии поверхностей и, наконец, теории чисел, как особой науке.

В речи памяти Эйлера, произнесенной в Парижской академии наук, Кондорсе, описывая последние часы жизни Эйлера, сказал, что он кончил «вычислять и жить». Эйлер в самом деле был неутомимым «вычислителем» как в узком, так и в широком смысле слова и, пожалуй, как никто, владел техникой расчетов. Эта особенность его гения отвечала потребности науки того времени, особенно нуждавшейся в быстром развитии формального аналитического аппарата. Но Эйлер был и мыслителем, внесшим огромный вклад в разработку фундаментальных идей математики, без чего также невозможно было ее развитие, таких, как понятия числа, функции, функционала, суммы ряда, интеграла, решения дифференциального уравнения и т. д.

Вместе с тем он создавал новую алгебраически-арифметическую архитектуру анализа. Правда, Эйлер уступал в построении обобщающих концепций более молодому Лагранжу, который ярче отразил в своей теории аналитических функций и аналитической механике духовные устремления эпохи просвещения, в других сферах мышления приведших к созданию новых больших философских, исторических, социально-политических систем. Не следует, однако, забывать, что Лагранж во многом непосредственно следовал за Эйлером, углубляя и совершенствуя его методы и концепции.

Влияние Эйлера было исключительно велико. Лаплас повторял молодым математикам: читайте Эйлера, он наш общий учитель. Прямых учеников у Эйлера было немного, но его труды были настольными в XVIII в. и далеко за его пределами для всех творческих математиков, а работу многих он непосредственно направлял путем переписки. Эйлер охотно и щедро делился своими мыслями и к нему применимы слова, сказанные Фонтенелем о Лейбнице: «он любил наблюдать, как расцветают в чужом саду растения, семена которых он сам доставил».

Методы, теории, задачи Эйлера продолжали вдохновлять творчество ученых на протяжении всего XIX в. К Эйлеру восходят, в частности, традиции Петербургской математической школы, руководителем которой был П. Л. Чебышев.

Основные руководства по алгебре

Все учебники арифметики и алгебры XVIII в. находились под сильным влиянием «Всеобщей арифметики» Ньютона (1707), которая неоднократно переиздавалась как на латинском языке (в 1722 г. под наблюдением самого автора), так и в английском переводе Дж. Рафсона (1-е изд. 1720); в 1802 г. вышел и ее французский перевод. Мы остановимся здесь только на нескольких важнейших курсах алгебры.

Ближе всего примыкает к книге Ньютона «Трактат по алгебре в трех частях» (A treatise of algebra in three parts. London, 1748) его последователя Маклорена [1], изданный два года спустя после смерти автора. Колин Маклорен (1698—1746), сын священника в Килмодане (Шотландия), учился в Глазго и уже в 1717 г. стал профессором математики в Абердине. В 1719 г. он познакомился в Лондоне с Ньютоном и был избран в Королевское общество. Через год вышла книга Маклорена «Органическая геометрия, или всеобщее описание кривых линий», к которой мы еще вернемся. После пятилетнего пребывания во Франции Маклорен с 1725 г. работал в Эдинбурге на кафедре, предоставленной ему по рекомендации Ньютона. В 1742 г. был издан важнейший труд Маклорена «Трактат о флюксиях», к которому мы также обратимся в дальнейшем.

При осаде Эдинбурга в 1745 г. сторонниками претендовавшего на корону Англии внука изгнанного в 1688 г. короля Якова II, Маклорен был одним из руководителей обороны и, когда город временно попал в руки якобитов, переехал в Йорк, где вскоре и умер.

«Трактат по алгебре» Маклорена содержал подробные комментарии к «Всеобщей арифметике», восполнявшие многие доказательства, отсутствующие у Ньютона, например в теории симметрических функций. Маклорен обобщил результаты Ньютона о приводимости уравнений на задачи отыскания квадратичных и кубических множителей многочленов с рациональными коэффициентами. Геометрическое построение корней уравнений еще занимало в трактате Маклорена видное место.

Однако уже в «Началах алгебры» (Éléments d'algèbre. Paris, 1746) Клеро геометрическое построение корней отсутствовало и все изложение приобрело чисто арифметический характер. Вообще «Начала алгебры» Клеро построены очень своеобразно. Клеро был проникнут убеждением, что наиболее правильным педагогическим приемом является тот, при котором учащийся как бы сам изобретает нужные истины и убеждается в целесообразности применяемых методов. Как и в более ранних «Началах геометрии» (1741), он исходит на первых порах из постановки задач, решать которые, по его выражению, побудили необходимость и любопытство, и лишь в дальнейшем, когда читатель уже достаточно ознакомился с предметом, позволяет себе обходиться без таких задач. В книге, написанной в мастерски ясной манере, изложено все, что было известно ко времени ее выхода по теории алгебраических действий и уравнений первых четырех степеней, а также некоторые собственные результаты автора. Вслед за Франсуа Николем (1683—1758; Mém. Ac. Paris, 1738) Клеро представил в неприводимом случае формулы Тартальи — Кардано все три корня кубического уравнения с помощью бесконечных рядов в действительной форме, удобной для вычислений. С большой подробностью разобран вопрос о кор-

[1] Мы записываем фамилию Маклорена в общепринятой в русской математической литературе форме; правильное произношение: Меклбрин.



К. Маклорен
(с портрета неизвестного художника, принадлежащего
доктору Д. Маклорену, Шотландия)

нях уравнений четвертой степени и показано, что их мнимые корни всегда имеют вид

$$a + b\sqrt{-1}.$$

Книга Клеро имела большой успех, шестое издание ее вышло в 1801 г., появились немецкий (1752) и голландский (1760) переводы. Еще бо́льшую популярность приобрело классическое руководство по алгебре Эйлера. В 1748 г. вышло из печати двухтомное «Введение в анализ бесконечных» Эйлера, в котором он рассмотрел целый ряд важных алгебраических проблем. Специально алгебре Эйлер посвятил уже упоминавшуюся «Универсальную арифметику» (т. I—II, Петербург, 1768—1769; немецкий оригинал — Vollständige Anleitung zur Algebra — там же, 1770). Эйлер, как и Клеро, излагает только буквенную алгебру и не приводит ее геометрических приложений. Уже в самом начале книги Эйлер дает ньютоновское определение положительного действительного числа: «Число не иное что, как содержание (т. е. отношение.— *Ред.*) одного количества к другому, которое берется за единицу» [1]. С еще большей силой подчеркнул

[1] *Леонгард Ейлер.* Универсальная арифметика, т. I. Перевод П. Иноходцева и И. Юдина. Изд. 2. Петербург, стр. 3.

эту идейную близость к Ньютону в своем учебнике арифметики ученик Эйлера академик С. К. Котельников: «Образ, в котором я себе число воображаю, есть ньютонов. Оное представляется как некоторое содержание двух количеств» [1]. В курсе алгебры Эйлера изложение значительно приблизилось к тому, которое стало принятым затем около полутора столетий. И здесь мы находим новый по тому времени научный материал: например, в учении о логарифмах, современной трактовкой которого мы обязаны Эйлеру, в особенности же во втором томе, содержащем два больших отдела диофантова анализа с многочисленными собственными открытиями автора. В последующих учебниках для средней школы от этих отделов осталось лишь решение линейного уравнения с двумя неизвестными; исключены были также решение общих уравнений третьей и четвертой степени и приемы приближенного решения уравнений. Но прогрессии и десятичные дроби, теория соединений и бином Ньютона, а также логарифмы прочно вошли в школьные программы.

Книга Эйлера выдержала много изданий на русском и немецком языках, так же как во французском и английском переводах, кроме того, она вышла в голландском, итальянском и латинском переводах. К первому французскому изданию (Лион, 1774), подготовленному Иоганном III Бернулли (1744—1807), внуком Иоганна I и директором Берлинской обсерватории, Лагранж присоединил свои важные дополнения по диофантову анализу. Влияние курса Эйлера на последующие школьные руководства алгебры было очень велико, особенно в России и Германии. Упомянем сравнительно краткие «Уроки алгебры» (Leçons d'algèbre. СПб., 1783) Н. И. Фуса, в русском переводе вышедшие в 1798 г. под названием «Начальные основания алгебры», а затем составившие первую часть его весьма распространенных «Начальных оснований чистой математики».

Системы счисления

К началу XVIII в. относится работа Лейбница «Изложение двоичной арифметики, для которой достаточно только двух цифр 0 и 1, с замечаниями о ее пользе и о том, что она дает смысл древним китайским фигурам Фохи» (Explication de l'arithmétique binaire, qui se sert des seuls caractères 0 et 1; avec des remarques sur son utilité, et sur ce qu'elle donne le sens des anciennes figures Chinoises de Fohy. Mém. Ac. Paris, (1703) 1720); в 1759 г. были опубликованы письма Лейбница Я. Бернулли и другим математикам по этому вопросу. Двоичная система счета состоит в том, что каждое целое число представляется в виде

$$a = a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 + \ldots + a_k \cdot 2^k + \ldots,$$

где $a_k = 0$ или 1. Такое представление чисел лежало в основе древнеегипетского правила умножения (см. т. I, стр. 24) и его же применяли Леонардо Пизанский в «Книге абака» (1202) и Лука Пачоли в «Сумме арифметики» (1494) при решении задачи о минимальном числе гирь, необходимом для взвешивания всех грузов, не превосходящих некоторого предела. Двоичная система счета излагалась также Дж. Непером в добавлении к «Рабдологии» (1617), а английский философ Френсис Бэкон (1561—1626) в своей книге «О достоинстве и прогрессе наук» (De dignitate et augmentis

[1] *С. К. Котельников.* Первых оснований мафиматических наук часть первая, содержащая в себе арифметику. СПб., 1766, стр. 3.

scientiarum, 1623) на основе двоичной системы составил специальный шифр с двумя знаками. Работа и письма Лейбница значительно способствовали популяризации двоичной системы.

«Фохи», о котором упоминает Лейбниц,— Фуси, легендарный китайский император, живший за три тысячи лет до н. э. Фуси приписывается изобретение иероглифов, циркуля и линейки, а также введение животноводства и охоты с помощью сетей. «Фигуры Фохи», заимствованные из древнекитайских гадальных книг, изображены на рис. 1.

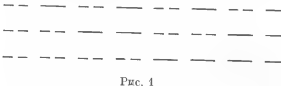


Рис. 1

Лейбниц истолковывает черту — как 1, а две черты — — как 0 и понимает эти знаки как двоичные записи чисел $0 = 000$, $1 = 001$, $2 = 010$, $3 = 011$, $4 = 100$, $5 = 101$, $6 = 110$, $7 = 111$ (если читать эти знаки снизу вверх). Однако такое объяснение оказалось неверным и применение двоичной системы в древнем Китае не засвидетельствовано.

Б. Паскаль в «Признаках делимости чисел» (Caractères de divisibilité des nombres, ок. 1654, опубл. 1665) для установления делимости числа a на число n рассматривал аналогичное представление

$$a = a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \ldots + a_k n^k + \ldots,$$

где $a_k = 0, 1, \ldots, n - 1$.

60-ричная система, как мы видели, широко применялась древними вавилонянами, а также учеными стран ислама (см. т. I, стр. 213). В XVIII в. системами счета с основаниями, отличными от 10, занимался знаменитый естествоиспытатель Жорж Луи Леклерк де Бюффон (1707—1788) в «Опыте нравственной арифметики» (Essai d'arithmétique morale, 1760), вошедшем в состав IV тома его «Естественной истории» (Histoire naturelle, v. IV. Paris, 1777), причем особенно он пропагандировал 12-ричную систему. Пользу этой последней системы энергично отстаивал Иоганн Фридрих Христиан Вернебург (1777—1851) в «Кратком изложении новой числовой... системы» (Kurze Darstellung eines neuen Zahlen... Systems, 1798).

Все это не поколебало десятичной системы счета, но двоичная система благодаря своей особой простоте, которую подчеркивал Лейбниц [1], получила позже применение и в теоретических исследованиях, и в области вычислительной математики. Современные быстродействующие вычислительные машины оперируют числами, выраженными обычно в двоичной системе.

Счетные машины и таблицы

Упомянем в этой связи о некоторых успехах, достигнутых за рассматриваемое время в конструкции арифмометров. Предложенная Лейбницем счетная машина оказала существенное влияние на изобретателей XVIII в.

[1] Для сложения и умножения в бинарной арифметике требуются совсем короткие «таблицы» этих действий: $1 + 1 = 10$, $1 \cdot 1 = 1$.

Именно после введения им ступенчатого валика и подвижной каретки началось создание машин, удобно выполняющих (наряду со сложением и вычитанием) умножение и деление.

XVIII в. над усовершенствованием арифмометра Лейбница работали кенигсбергский профессор, учитель Канта, Мартин Кнутцен (1713—1751) и многие другие. В результате была предложена реверсивная муфта, которая обеспечивала вращение ручки в одном направлении при любых действиях, улучшены противоинерционные и фиксирующие приспособления и некоторые другие. Но долгие десятилетия все построенные машины не удовлетворяли даже не очень высоким требованиям своего времени и изготовлялись, как правило, в одном экземпляре.

Счетную машину, пригодную для практических расчетов, сконструировал в 1774 г. вюртембергский пастор Матвей (Маттеус) Ган (1739—1790), удачно использовавший накопленный до него опыт. Машина Гана имела цилиндрическую форму. Сверху, в центре, находилась ручка. поворотом которой приводились во вращение ступенчатые валики, расположенные вертикально в отличие от всех предшествующих арифмометров. На машине можно было производить четыре арифметических действия, причем результат не должен был превышать 14 знаков. Ган изготовил несколько арифмометров; последняя машина такого типа была сделана уже после смерти конструктора его сыном в 1809 г. Инженер Иоганн Мюллер в 1783 г. построил машину со звонком, предостерегавшим, когда от нее требовали чего-либо неподходящего.

Более широкое производство арифмометров началось, однако, только в первой половине XIX в.; первый толчок этому сообщила конструкция, разработанная в 1820 г. Ч. Томасом.

Основным вспомогательным средством вычислений оставались логарифмические и тригонометрические таблицы. Как говорилось (см. т. II, стр. 61), таблицы, вычисленные в XVII в., не были безупречными: в первых семи знаках десятизначных таблиц десятичных логарифмов А. Влакка (1628) имелись 123 ошибки для чисел между 10 000 и 100 000. Над усовершенствованием таблиц трудились многие вычислители, и англичанин У. Гардинер, например, уменьшил число ошибок до 19 (Tables of logarithms. London, 1742). Наибольшую известность, благодаря удобному расположению материала и точности, получили семизначные «Логарифмические, тригонометрические и другие таблицы и формулы для применения математики» (Logarithmische, trigonometrische und andere zum Gebrauche der Mathematik eingerichtete Tafeln und Formeln. Wien, 1783) австрийского артиллериста и профессора математики, уроженца Словении Георга Веги (1754—1802) и его же семизначное «Логарифмически-тригонометрическое руководство» (Logarithmisch — trigonometrisches Handbuch... Leipzig, 1793), сотни раз переиздававшееся вплоть до наших дней и во многих странах как в полном виде, так и в сокращениях. Вега, проделав все вычисления заново, предложил денежное вознаграждение в один дукат (около 3 рублей золотом) за каждую обнаруженную ошибку. Это обошлось ему только в 2 дуката, но позднее были обнаружены еще три ошибки. Вполне безупречное издание «Логарифмически-тригонометрического руководства» подготовил впервые сотрудник берлинского Института геодезии К. Бремикер (1857). Вега составил также десятизначные таблицы (1794), значения которых, однако, как указал в 1851 г. К. Ф. Гаусс, не отвечают требованию разниться от истинных не более чем на половину единицы последнего десятичного знака.

Применение логарифмов усложняется, когда в ходе вычислений появляются суммы или разности. Б. Кавальери в 1639 г., Х. фон Вольф в 1715 г. и французский астроном и геодезист Жан Батист Жозеф Деламбр (1749—1822) в 1782 г. показали, что с помощью некоторых преобразований логарифмы сумм и разностей можно вычислять по обыкновенным таблицам логарифмов чисел и тригонометрических величин. Требуя громоздких выкладок, эти предложения не имели успеха. На рубеже XVIII и XIX вв. итальянский физик Джузеппе Цеккини Леонелли (1776—1847) нашел вполне удобный прием вычисления $\log (a \pm b)$ по $\log a$ и $\log b$. К описанию его, данному в «Логарифмическом дополнении» (Supplément logarithmique. Bordeaux, г. XI, т. е. 1802—1803), Леонелли приложил три стра-

Титульный лист первого издания логарифмических таблиц Г. Веги (Вена, 1783)


LOGARITHMISCHE, TRIGONOMETRISCHE, und andere zum Gebrauche der Mathematik eingerichtete TAFELN UND FORMELN.

Herausgegeben von GEORG VEGA, Unterlieutenant und Lehrer der Mathematik bey dem K. K. zweyten Feld-Artillerie-Regiment.

WIEN, gedruckt bey Johann Thomas Edlen von Trattnern, kaiserl. königl. Hofbuchdruckern und Buchhändlern. 1783.

ницы употребляемых при этом вспомогательных таблиц. Вслед затем пятизначные таблицы логарифмов сумм и разностей опубликовал в 1812 г. Гаусс, в одном месте сославшийся на Леонелли.

К вспомогательным средствам вычислений принадлежат также таблицы произведений, квадратов и кубов чисел. Мы отметим особо появление обширных таблиц простых чисел и делителей составных чисел, например таблиц И. Г. Ламберта, доведенных до 102 000 и помещенных во II т. его «Очерков по математике и ее применении», Берлин, 1770 (стр. 111). Вега в лейпцигском издании своих логарифмически-тригонометрических таблиц 1797 г. продолжил таблицу делителей до 400 000, а Л. Чернак в «Арифметическом решете» (Cribrum arithmeticum. Deventer, 1810) — до 1 020 000.

Десятичные и непрерывные дроби

В течение всего XVIII в. продолжалось внедрение в обиход и изучение десятичных дробей. В конце XVII в. математики обратили специальное внимание на бесконечные десятичные дроби и, в частности, на периодические. До того ограничивались действиями над их конечными приближениями, хотя существование периодических дробей было замечено еще ранее и слово «период» (periodus) иногда встречается уже в «Десятичном счете» (Logistica decimalis. Francofurti a. M., 1603) И. Г. Бейера[1].

Дж. Валлис в «Трактате по алгебре» (1685; см. т. II, стр. 36) показал, что дроби со знаменателем вида 2^m5^n обращаются в конечные десятичные дроби, и установил некоторые простейшие свойства периодов, например, то, что для несократимой дроби p/q число цифр периода не превосходит $q - 1$. Он знал также, что иррациональные корни не выражаются периодическими дробями. Лейбниц обнаружил некоторые свойства цифр периода, в том числе неизвестные Валлису, но ничего по этому вопросу не опубликовал. После того наступил долгий перерыв, до середины XVIII в., когда изучением бесконечных десятичных дробей успешно занялся И. Г. Ламберт. Он доказал периодичность разложения несократимой дроби, знаменатель которой содержит простые делители, отличные от 2 и 5, и рациональность любой периодической дроби (Acta Helvetica, v. III, Basileae, 1758), а затем, применяя так называемую малую теорему Ферма (стр. 103), установил несколько теорем о числе цифр периода (Nova Acta Eruditorum, 1769). Более глубокие свойства периода были найдены с помощью теории степенных вычетов К. Ф. Гауссом («Арифметические исследования», 1801; см. стр. 123). Примерно в это же время действия с периодическими дробями и, в частности, их обращение в обыкновенные изложил библиотекарь Лондонского королевского общества Джон Робертсон (1712—1776), предложивший для их сокращенной записи обозначения вроде $0,\dot{7}8\dot{5} = 0,785785\ldots$ (Phil. Trans., 1768); сходное предложение внес автор «Усовершенствованной десятичной арифметики» (Decimal arithmetic made perfect, 1742) Джон Марш.

Поскольку десятичные дроби употреблялись главным образом при теоретических исследованиях и астрономических вычислениях, в элементарных руководствах им отводилось очень скромное место, а в некоторых

[1] Шестидесятиричные периодические дроби были известны в странах ислама еще ранее и встречаются у Сибта ал-Маридини в XV в.

весьма популярных учебниках, например «Первых основаниях всех математических наук» (1710) Х. фон Вольфа (см. стр. 23), они не упоминались вовсе. Даже в «Универсальной арифметике» Эйлера (т. I, 1768) десятичные дроби вводятся мимоходом при описании логарифмических таблиц, правила действий над ними не сформулированы, а в небольшой главе «О бесконечных десятичных дробях» приведено лишь несколько примеров обращения обыкновенных дробей в десятичные и периодических в обыкновенные (с числом цифр периода, не превосходящим трех). Введение в 1799 г. во Франции десятичной метрической системы мер и весов, разработанной двумя комиссиями, в которые входили Лагранж, Лаплас, Монж и другие выдающиеся ученые, дало толчок более широкому употреблению десятичных дробей в повседневной жизни и выработке методики их преподавания. В основу всех мер был положен метр, определенный как десятимиллионная часть четверти земного меридиана, а для установления точной длины метра были предприняты обширные геодезические измерения, одним из руководителей которых являлся названный выше Деламбр. Когда несколько позднее выяснилось, что фактическая длина метра несколько отличается от обусловленного его определения, это уже не повлекло за собой изменения принятого эталона. Метрическая система с самого начала была задумана «на все времена, для всех народов» с тем, чтобы заменить существовавшие тогда в каждой стране собственные меры. Быстрому распространению ее вначале мешало то обстоятельство, что она была создана революционной Францией, а в дальнейшем — сила традиции. Даже в самой Франции, после возвращения к власти Бурбонов в 1815 г., метрическая система перестала быть обязательной, и лишь в 1837 г. правительство Луи-Филиппа издало закон, по которому она с 1 января 1840 г. опять вводилась во всеобщее употребление. Однако преимущества метрической системы были настолько велики, что постепенно ее заимствовали одни государства за другими. В настоящее время лишь немногие страны, и среди них США, сохраняют старые недесятичные меры.

Наряду с десятичными дробями в теоретических исследованиях все большее место занимали непрерывные дроби. Здесь основная заслуга принадлежит Эйлеру, который в первой же своей статье, посвященной этому предмету, доказал ряд теорем своих предшественников и добавил некоторые новые. В этой статье, озаглавленной, в соответствии с терминологией Валлиса, «О непрерывных дробях» (De fractionibus continuis, Commentarii (1737) 1744)[1], Эйлер впервые указал приемы преобразования бесконечных непрерывных дробей в бесконечные же ряды и показал связь периодических дробей с квадратными уравнениями и квадратичными иррациональностями. Если, например,

$$x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{b + \ldots}},$$

то $\quad x - a = \dfrac{1}{b + x - a} \quad$ и $\quad x = a - \dfrac{b}{2} + \sqrt{1 + \dfrac{b^2}{4}}, \quad$ в частности,

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}$$

[1] В XVIII в. появилось и другое название — цепная дробь, прежде всего в немецкой литературе (Kettenbruch).

Здесь же Эйлер индуктивно нашел представление в форме непрерывной дроби чисел e,

$$\frac{e-1}{2}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\cfrac{1}{18+\ldots}}}}}$$

и некоторых других, с ними связанных; выражение для $4/\pi$, найденное в XVII в. Броункером (т. II, стр. 40), было ему известно. Впоследствии Эйлер много раз возвращался к изучению непрерывных дробей и применил их для представления функций и определенных интегралов, интегрирования дифференциальных уравнений, суммирования рядов и т. д. Популяризации непрерывных дробей содействовало «Введение в анализ бесконечных» (1748), в I томе которого им отведена целая глава. Здесь показано, в частности, что всякое рациональное число представимо конечной непрерывной дробью и что периодическая непрерывная дробь с числителями, равными единице, есть корень квадратного уравнения. Двадцать лет спустя Лагранж доказал, что и, наоборот, всякая квадратичная иррациональность выражается такого рода дробью (Mém. Ac. Berlin, (1768) 1770). Годом ранее он ввел в употребление непрерывные дроби со знакопеременными знаменателями (там же, (1767) 1769), которые затем употреблял и Эйлер. Нам еще придется говорить о важных применениях непрерывных дробей, в частности к приближенному вычислению корней алгебраических уравнений (см. стр. 83) и решению ряда вопросов теории чисел (см. стр. 105 и 112).

Учение о числе

К началу XVIII в. в распоряжении математиков имелась система комплексных чисел в полном объеме, и на протяжении первой половины века удалось распространить на отрицательные и мнимые числа все известные операции алгебры и анализа. Но в учении о числе по-прежнему встречались значительные психологические и логические трудности. С одной стороны, при обобщении понятия числа утрачивались некоторые привычные арифметические свойства, отражавшие свойства привычных реальных моделей; с другой — взаимосвязи между законами операций как в пределах какой-либо одной категории чисел, так и между различными категориями были еще мало изучены. Преодоление инерции мышления, связывавшего с общей идеей числа особенности, присущие только натуральным числам или абсолютным величинам, вроде геометрических фигур, и создание первой удовлетворительной модели комплексных чисел потребовали усиленной работы на протяжении всего столетия. Неудивительно, что некоторые видные ученые упорно продолжали трактовать не только мнимые, но и отрицательные числа как удобные для вычислений фикции и знаки, лишенные, однако, реального смысла.

Менее всего было сделано в арифметике натуральных чисел, поскольку она не причиняла каких-либо беспокойств. Сообразуясь с новыми педагогическими веяниями, авторы учебников стремились сообщить изложению арифметики натурального числа доказательный характер и с этой целью

начинали его более или менее пространными списками аксиом и определений. Эти аксиомы, в значительной части заимствованные из «Начал» Евклида, подбирались мало критически, некоторые были лишними, и, вместе с тем, все они вместе были недостаточны для обоснования арифметики. Нередко авторы ограничивались формулировкой аксиом и после того ими уже не пользовались. Приведем для примера арифметические аксиомы X. фон Вольфа по русскому переводу его «Сокращения первых оснований мафиматики» (1770; ср. стр. 23).

1. $a = a$.
2. Если $a = b$, $c = b$, то $a = c$.

3—4. Если $a \gtrless b$, то $a \pm c \gtrless b \pm c$.

5. Если $a \gtrless b$, то $ac \gtrless bc$.
6. Если $a \gtrless b$, то $a : c \gtrless b : c$.
7. Если $a = b$, $c \geqq a$, то $c \geqq b$.
8. Целое есть сумма своих частей и больше каждой из них.

Девятая аксиома определяет транзитивность отношения:

9. Если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ и $\frac{e}{f} = \frac{c}{d}$, то $\frac{a}{b} = \frac{e}{f}$.

(Она вводится перед определением дробного числа.)

Из пяти основных законов арифметических действий чаще приводились переместительный и сочетательный для умножения и сложения, реже — распределительный относительно сложения для умножения и совсем редко все пять.

Задачу дедуктивного построения арифметики, исходя из немногих начал, поставил со всей определенностью Лейбниц. В качестве примера истины, на первый взгляд очевидной, в действительности же доказуемой и потому подлежащей доказательству, он привел равенство: два и два четыре. Принимая, что 1) каждое натуральное число, после 1, получается из предыдущего добавлением единицы и что 2) $m + (n + 1) = (m + n) + 1$, Лейбниц вывел это равенство следующим образом:

$$2 + 2 = 2 + (1 + 1) = (2 + 1) + 1 = 3 + 1 = 4.$$

Идея Лейбница, изложенная им в «Новых опытах о человеческом разуме» (Nouveaux essais sur l'entendement humain), законченных в 1705 г., но увидевших свет только в 1765 г., была снова выдвинута Б. Больцано (1810) и подробно развита в теории натуральных чисел Г. Грассмана (1861). Следует тут же добавить, что в XVIII в. под натуральными числами понимали обычно количественные, т. е. собрания единиц, а не порядковые, которые определяются исключительно своим положением в ряду знаков 1, 2, 3, ..., и вообще не различали строго, к какой категории чисел относятся те или иные рассуждения. Самое выделение порядковых — ординальных и количественных — кардинальных числительных восходит, по крайней мере, к древним Египту и Вавилону. Латинские термины numeralia ordinalia и numeralia cardinalia встречаются в дошедшей литературе около 500 г. н. э. Принципиальное значение деления натуральных чисел на эти две категории было установлено Г. Кантором (стр. 49).

В решении поставленной Лейбницем задачи математики XVIII в. продвинулись недалеко. Их выводы опирались на неосознанные допущения, содержали логические пробелы и порочные круги. В частности, они постоянно неявно применяли принцип полной математической индукции, лежащий в основе теории натурального числа. Все же в поисках доказательств правил действий были выделены все пять основных законов сложе-

ния и умножения натуральных чисел, и большинство математиков пришло к убеждению в необходимости рассматривать их как собственно арифметические предложения, независимо от возможных истолкований. В этом отношении интересны «Первые основания чистой математики» (Anfangsgründe der reinen Mathesis, Königsberg, 1790) профессора математики Иоганна Шульца или Шульце (1739—1805), друга и философского единомышленника И. Канта. Включив в список аксиом переместительный и сочетательный законы сложения, Шульц вывел распределительный закон умножения и затем переместительный; доказательство сочетательного закона он не привел. Получившее известность в первой половине XIX в. построение арифметики натуральных чисел немецкого ученого М. Ома (1822) близко к данному Шульцем. Специальные названия законов счета появились несколько позднее в ходе дальнейших исследований по основаниям арифметики и алгебры. Французский артиллерийский офицер и преподаватель Ф. Сервуа ввел в 1815 г. термины «коммутативный» — переместительный и «дистрибутивный» — распределительный, а У. Гамильтон в 1843 г. слово «ассоциативный» — сочетательный.

Более глубокое исследование понятия натурального числа было предпринято лишь во второй половине XIX в. Г. Грассман, которого мы уже назвали ранее, разработал (1861) учение о порядковом числе в духе Лейбница, дополнив его отправные принципы еще двумя, определяющими умножение: 1) $m \cdot 1 = m$ и 2) $m(n + 1) = mn + m$, и присоединив в начале натурального ряда нуль — как знак, предшествующий знаку единицы [1]. Метод Лейбница — Грассмана был по существу своему индуктивным, но с особенной отчетливостью принцип полной математической индукции проявился в системе аксиом арифметики, предложенной итальянцем Дж. Пеано (1889). В дальнейшем развитии идеи количественного числа решающую роль сыграло введенное Г. Кантором (1878) понятие мощности множества, позволившее распространить эту идею на бесконечные множества. Кантор же обобщил на вполне упорядоченные бесконечные множества понятие порядкового числа и, выявив принципиальные различия между мощностями и порядковыми типами для бесконечных множеств, объяснил, почему натуральные числа характеризуют конечные множества одновременно и в количественном и в порядковом аспектах. В первой трети XX в., начиная с 1900 г., серию замечательных попыток полностью реализовать замысел Лейбница предпринял Д. Гильберт. Однако все старания дать законченное логическое построение арифметики натуральных чисел на базе какой-либо системы аксиом оказались тщетными. Причиной этого является то обстоятельство, что, как показал К. Гёдель (1932), во всякой формализованной арифметической системе можно высказать предложения, истинность или ложность которых нельзя установить на основе принятой системы аксиом.

В учении о рациональных дробях в XVIII в. отправлялись либо от концепций дроби как собрания равных долей единицы или же как частного двух натуральных чисел, не являющегося целым числом, либо от предложенного Ньютоном во «Всеобщей арифметике» (1707) общего определения положительного действительного числа как отношения двух однородных величин. При исследовании операций естественно вставали два главных вопроса. Сложение и вычитание, так же как расположение дро-

---

[1] К ряду «так называемых натуральных чисел» 0 «или ничто» отнес еще Эйлер в §19 «Универсальной арифметики» (1768).

бей по величине, опирались на равенство $\frac{am}{bm} = \frac{a}{b}$, а сокращение — на равенство $\frac{a:m}{b:m} = \frac{a}{b}$, где m — натуральное число. В рамках теории отношений, общей или же построенной для рациональных отношений, вывод этих равенств не представлял трудности, так же как определение операции умножения (и деления), равно пригодное для целых и дробей. Однако многие предпочитали исходить из концепции, независимой от теории отношений, и в этом случае мотивировали правила действий частью с помощью содержательного толкования самого определения дробей, частью молчаливо считая для них верными те или иные свойства системы натуральных чисел. Вообще и в этой области арифметики существенных результатов не было.

Сказанное относится и к иррациональным числам. Наиболее часто их определяли по Ньютону как отношения несоизмеримых величин и этим удовлетворялись, считая достаточными для обоснования античную теорию отношений и определения действий в «Геометрии» Декарта (1637) (см. т. II, стр. 34). Распространению этого определения на континенте Европы особенно содействовали учебники Вольфа, начавшие выходить всего через 3 года после курса алгебры Ньютона; мы видели, что так же определял действительное число Эйлер (см. стр. 40). Вместе с тем были сделаны первые попытки исследовать операции над иррациональными числами, отправляясь от их приближений рациональными числами, в частности, бесконечными десятичными дробями.

Такой подход, которому предстояло глубокое дальнейшее развитие, встречается в руководствах А. Г. Кестнера, вытеснивших в Германии второй половины XVIII в. учебники Вольфа и его непосредственных последователей и получивших известность и в других странах. В предисловии к «Первым основаниям арифметики, геометрии, плоской и сферической тригонометрии и перспективы» (Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie und Perspektiv. 1. Aufl. Göttingen, 1758) [1] Кестнер выступил как сторонник обоснования всех понятий арифметики на идее целого числа: дроби суть целые числа, единицей которых служит часть выбранной вначале единицы, иррациональные величины суть дроби, единица которых переменна и представляет собой все меньшую и меньшую часть целого. Обоснование учения о дробях при помощи учения об отношениях, как у Вольфа, Кестнер считал принципиально неправильным. Соответственно выбран и общий план арифметической части книги: от натуральных чисел Кестнер переходит к дробям, затем к отрицательным числам, далее вводит некоторые буквенные обозначения, десятичные и шестидесятиричные дроби, иррациональные числа и уже после того излагает теорию отношений.

Иррациональные числа у Кестнера — это собственно алгебраические «неизвлекомые» корни. Любое такое число можно рассматривать как сумму рационального «начала» и «конца» (Ende), значение которого в точности всегда неизвестно, но который можно сделать меньше всякой данной величины. Кроме того, любое неизвлекомое число можно заключить

---

[1] Этот и другие курсы Кестнера, охватившие, кроме «анализа конечных величин» и «анализ бесконечного» (ср. название классического труда Эйлера), переиздавались более сорока лет. Русский перевод «Начальных оснований математики» (ч. 1—2, Петербург, 1792—1794) включает также алгебру, некоторые сведения о бесконечных рядах, аналитической геометрии на плоскости.

между двумя сколько угодно близкими рациональными приближениями. Эти соображения, сами по себе отнюдь не новые, используются для проверки свойств арифметических операций в области иррациональных чисел: для образца Кестнер доказывает приведением к нелепости переместительность умножения: если бы для иррациональных $x = A + a$, $y = B + b$ не выполнялось равенство $xy = yx$, то в силу возможности взять «концы» a и b сколь угодно малыми не было бы верно и $AB = BA$, где A и B — рациональные «начала». Правила раскрывать скобки при умножении двучленов здесь, очевидно, предполагаются. Кестнер добавлял, что аналогично можно вывести другие положения.

Как видно, Кестнер трактовал здесь иррациональное число как предел последовательности рациональных чисел, хотя и не пользовался термином «предел». Но он вовсе не определял иррациональные числа как пределы рациональных последовательностей, как не определял и операции в области иррациональностей. Существование корней вида $\sqrt[n]{a}$, где a не есть n-я степень какого-либо рационального числа, и возможность арифметических действий с ними принимались заранее. Сходные идеи мы находим позднее у русского артиллерийского офицера и любителя математики П. А. Рахманова, павшего на поле Лейпцигской битвы в 1813 г. В его «Новой теории содержания (отношения.— *Ред.*) и пропорции геометрической соизмеримых и несоизмеримых количеств, и в последнем случае основанной на теории пределов» (Москва, 1803) трактовка «неизвлекомых коренных величин» как пределов приближающих их снизу и сверху рациональных чисел и специально десятичных дробей выступает совершенно отчетливо. На этой основе и с помощью теории пределов (развитой, впрочем, недостаточно) П. А. Рахманов строил теорию отношений и выводил, например, что $\sqrt{6} : \sqrt{24} = 1 : 2$. Но и он, так же как Кестнер, сперва принимал существование «неизвлекомых» чисел и уже затем устанавливал их место среди рациональных. Так, соответственные члены последовательностей (A) 2; 2,4; 2,44 и (B) 3; 2,5; 2,45; ... имеют разности 1; 0,1; 0,01; ..., которые становятся меньшими любого данного числа; с другой стороны, «непременное число» $\sqrt{6}$ всякий раз заключается между соответственными членами (A) и (B) и, следовательно, есть предел десятичных дробей (A) или (B).

Кестнер и другие математики XVIII в., как и П. А. Рахманов, заботились, собственно, не столько о построении теории иррациональных чисел во всем объеме, сколько об обосновании алгебраических операций для алгебраических же иррациональностей. В том же столетии математики пришли к убеждению о существовании трансцендентных чисел, о чем говорится в третьей главе.

Первые строгие конструкции теории действительного числа, в которых иррациональные числа и операции над ними определялись на базе системы рациональных чисел, были опубликованы почти одновременно и независимо около 1870 г. В одной из этих теорий, разработанной Ш. Мерэ (1869—1872) и Г. Кантором (1872) независимо друг от друга, всякая сходящаяся последовательность рациональных чисел $\{a_n\} = a_1, a_2, a_3, \ldots,$ т. е. последовательность, элементы которой с неограниченным ростом номера неограниченно между собой сближаются, определяет действительное (рациональное или иррациональное) число. Кантор называл такие последовательности фундаментальными, а Мерэ — вариантами. Точнее говоря, последовательность $\{a_n\}$ именуется сходящейся, если для любого $\varepsilon > 0$

существует такой номер $N(\varepsilon)$, что $|a_n - a_m| < \varepsilon$ при всех $n > N$, $m > N$. Элементами $\{a_n\}$ могут быть, в частности, десятичные дроби. Сумма двух действительных чисел $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ вводится как число — последовательность $\{a_n + b_n\}$, очевидно сходящаяся вместе с первыми двумя; подобным же образом определяются другие арифметические действия. В системе действительных чисел Мерэ — Кантора осуществимо извлечение иррациональных корней, и вообще любая непрерывная функция действительного аргумента $f(x)$ однозначно определяется своими значениями для рациональных x. Другие теории действительного числа были предложены Р. Дедекиндом (см. т. I, стр. 97—98) и К. Вейерштрассом. Как видно, в понятии сходящейся последовательности Мерэ и Кантор использовали необходимый и достаточный критерий сходимости последовательности, сформулированный еще Больцано (1817) и Коши (1821). На основе теории Дедекинда этот критерий можно строго доказать для любой последовательности чисел. В теории Мерэ — Кантора этот критерий служит предварительным условием, выделяющим те последовательности рациональных чисел, которые принимаются в качестве определения действительных чисел; когда система последних уже построена, можно доказать, что и любая последовательность действительных чисел, сходящаяся в смысле Мерэ — Кантора, имеет действительный (рациональный или иррациональный) предел.

Отрицательные числа

Ньютоново общее определение числа охватывает только положительные действительные числа. Нуль и отрицательные числа вводились дополнительно. Нулем, писал Вольф, «в арифметике называется знак 0, которым мы обозначаем ничто» [1],— такая дефиниция была общепринятой. Вместе с тем нуль трактовали как целое число, предшествующее единице. Исходя из этого и из определений сложения и умножения натуральных чисел, иногда старались обосновать аддитивные и мультипликативные свойства нуля. Несколько употребительных определений отрицательного числа восходили к концепциям, сложившимся в XVI—XVII вв.

Сам Ньютон и некоторые другие ученые, как слепой английский математик Николай Сондерсон (1682—1739), «Начала алгебры» которого (Elements of algebra. London, 1740) были переведены также на французский (1756) и немецкий (1798) языки, определяли отрицательные количества как меньшие, чем ничто. Вслед за тем противоположность положительных и отрицательных чисел иллюстрировалась примерами имущества и долга, движения вперед и назад, направленных отрезков. Такое определение отрицательного числа само по себе недостаточно для обоснования правил операций. Это, вероятно, понимал Ньютон, который и не доказывал правила знаков при умножении и делении, но только их формулировал. Сондерсон считал возможным доказать эти правила, принимая, что некоторые свойства арифметической прогрессии, установленные в области положительных чисел, верны и для всех действительных чисел.

Определение Ньютона, восходящее через Декарта к Штифелю (т. I, стр. 316; т. II, стр. 36), удовлетворяло далеко не всех. Понимая под величиной только абсолютное значение, а под нулем ничто, многие считали

[1] *Chr. Wolff.* Mathematisches Lexicon. Hildesheim, 1965, S. 1486.

нелепым утверждение, что отрицательное число меньше нуля. Действительное количество не может быть меньше ничего, и любое отрицательное число, взятое само по себе, больше нуля. Так думали и Кестнер, и вслед за ним И. Кант (1724—1804), опубликовавший специальный «Опыт введения в философию понятия отрицательных величин» (Versuch den Begriff der negativen Grössen in die Weltweisheit einzuführen, 1763). Согласно Кестнеру, некоторые виды величин состоят из противоположных однородных величин, уменьшающих друг друга. При этом безразлично, какую из противоположных величин назвать положительной и какую отрицательной,— существенно только, что одна из соотносительных величин уменьшает другую. В известном смысле можно сказать, что отрицательная величина меньше ничего, именно она меньше нуля по сравнению с противоположной ей; собственно это означает, что сумма двух равных противоположных величин есть ничто.

Маклорен, Клеро, Эйлер определяли положительные числа как количества, прибавляемые и предшествуемые знаком плюс, а отрицательные как количества, вычитаемые и предшествуемые знаком минус. Высказав такое определение, Маклорен тут же добавлял, что оба вида количества «в равной мере действительны, но противоположны друг к другу, так что если они равны по количеству, то каждое из них уничтожает эффект другого при любом действии» [1]. В этой концепции в начальной форме содержатся и понимание относительных чисел как противоположных элементов кольца действительных чисел, связанных равенством $(+a) + (-a) = 0$, и трактовка их как противоположных операторов. Конечно, в XVIII в. было еще весьма далеко до теории колец и полей или же до операторной теории действительного числа и не проводилось ясное различение между символами $+$ и $-$ как знаками операций и как знаками относительных чисел.

Характерны для тогдашнего состояния учения о числе попытки вывести правила знаков. Маклорен прежде всего определяет общим образом вычитание как прибавление числа с обратным знаком,— сложение основывалось на самом определении противоположных чисел. Умножение на целое отрицательное число вводится как повторное вычитание. Трудности, возникающие при переходе к дробям, оставлены в стороне.

Маклорен счел нужным обобщить определения сложения и умножения для всех целых чисел. Чаще, однако, математики XVIII в. пытались обосновать эти операции, молчаливо допуская универсальность законов счета положительных или натуральных чисел, а также обращаясь к доводам «здравого разума». Примером может служить вывод правила знаков при умножении целых чисел в «Универсальной арифметике» Эйлера (т. I, 1768). Прежде всего, он показывает, что $(-a)(+b) = -ba$, для большей убедительности рассматривая множимое $-a$ как долг. Ни такую интерпретацию, ни определение умножения как повторного сложения нельзя использовать в случае отрицательного множителя. Эйлер заявляет, что $-ba = -ab$, т. е. принимает, считая само собой разумеющейся, коммутативность умножения в этом специальном случае. Далее Эйлер пишет: «Осталось теперь только упомянуть о следующем случае: когда — умножен будет на —, или $-a$ на $-b$, причем, во-первых, известно, что произведение в рассуждении литер (т. е. букв.— *Ред.*) будет ab, но должно ли к тому придать знак $+$ или —, о том сказать не можно, то только извест-

[1] *C. Maclaurin.* A treatise of algebra in three parts. London, 1748, p. 6.

но, что один из оных знаков, или тот, или другой, быть должен. Но теперь вопрошаю: не может ли быть тут знак — ? Понеже $-a$, умноженное на $+b$, даст $-ab$, следовательно, $-a$, умноженное на $-b$, не может то же дать, что дает $-a$ на $+b$, но должно из того вытти противному, а имянно $+ab$» [1]. Таким образом, помимо существования произведения $(-a)(-b)$ в системе целых чисел, Эйлер допускал, как очевидные, коммутативность $(-a)(+b)$, равенство $|(-a)(-b)| = ab$ и неравенство $(-a)(-b) \neq \neq (-a)(+b)$.

В предисловии к своим «Началам алгебры» (1746) Клеро особенно подчеркивал важность доказательства правил «минус на плюс дает минус» и «минус на минус дает плюс» — правил, которые, «представляя собой на слух противоречие в словах, побуждают думать, что здесь имеется противоречие в вещах» [2]. Он прежде всего пытается доказать равенство $a(c - d) = ac - ad$, ограничиваясь случаем, когда $a > 0$, $c > d > 0$. Затем аналогично выводится равенство $(a - b)(c - d) = ac - bc - ad + + bd$ (причем $a > b > 0$), и в заключение Клеро утверждает, будто метод вывода, «не специфицируя какие-либо частные значения ни a, ни c» [3], должен сохранить силу и в случае равенства обоих этих количеств нулю, так что $(-b)(-d) = + bd$. Однако на самом деле все предыдущие рассуждения Клеро имели силу только в случае $a > b > 0$, $c > d > 0$. Исходное равенство $a(c - d) = ac - ad$ он мотивировал тем, что, поскольку $c - d$ меньше, чем c, на d, то и произведение $a(c - d)$ должно быть меньше, чем произведение ac, на ad. Не говоря уже о том, что такой вывод представляет собой простую перефразировку доказываемого распределительного свойства, его распространение на случаи $a \gtrless 0$, $c < d$, уже на этом этапе потребовало бы установления правила знаков. Лаплас в лекциях, читанных в Политехнической школе в 1795 г., также неявно постулировал распределительный закон и применимость к отрицательным числам умножения на нуль: произведение $(-a)(+b - b) = 0$, $(-a)(+b) = -ab$, следовательно, $(-a)(-b) = +ab$ (Journal de l'École Polytechnique, 1812). Таким же образом можно предварительно доказать, что $(-a)(+b) = -ab$.

Все эти и другие попытки обосновать операции с отрицательными числами опирались на формальный и чаще всего неявный перенос в их область законов и свойств действий с положительными или с натуральными числами. Сходное явление имело место в математическом анализе, где законы и свойства конечных величин формально распространялись на бесконечные (см. седьмую главу). Создать логически совершенную теорию действий с относительными числами не удалось ни одному математику XVIII в. Это неудивительно, ибо, как уже говорилось, даже законы счета натуральных чисел были в полном объеме установлены только к исходу рассматриваемого времени. Во втором издании своего труда по основаниям анализа (1813; см. далее стр. 278) французский математик Л. Карно писал: «Метафизика правила знаков при более глубоком изучении ее обнаруживает, пожалуй, большие трудности, чем метафизика бесконечно малых количеств; это правило никогда не было доказано вполне удовлетворительным образом и, по-видимому, оно даже не может быть доказано достаточно удовлетворительно» [4]. В настоящее время мы не проводим дока-

---

[1] *Л. Эйлер.* Универсальная арифметика, т. I. Изд. 2. Петербург, 1787, стр. 19—20.
[2] *A. Clairaut.* Eléments d'algèbre. Paris, 1760, p. VIII.
[3] Там же, стр. 74.
[4] *Л. Карно.* Размышления о метафизике исчисления бесконечно малых. М.—Л., стр. 267—268.

зательств, подобных приведенным выше, но вводим отрицательные числа как объекты, с помощью присоединения которых система положительных чисел расширяется до кольца или же поля при сохранении основных законов сложения и умножения натуральных чисел.

Нелегко было преодолеть и психологические трудности, связанные с тем, что, как и ранее, привычные свойства положительных чисел казались обязательными и для отрицательных. Данцигский математик Г. Кюн в переписке с Эйлером вновь поставил вопрос о парадоксе Арно, состоящем в том, что в пропорции $+1 : -1 = -1 : +1$ отношение большего числа к меньшему равно отношению меньшего числа к большему (см. т. II, стр. 36). 22 августа 1735 г. Эйлер писал другому своего данцигскому корреспонденту, К. Л. Элеру, для передачи Кюну, что в рассматриваемой пропорции нет противоречия и она лишь парадоксальна. Дело лишь в том, что к этой пропорции неприменимы слова и выражения, которыми привыкли пользоваться, когда члены пропорции положительны. «Не слова, однако, составляют пропорцию, а математическое понятие, которое расширяется» [1]. И далее Эйлер критиковал Вольфа, полагавшего, что положительные и отрицательные величины разнородны и потому не могут находиться между собой в отношении. В том же году Эйлер в отзыве на одну присланную Петербургской академии наук статью Кюна писал, что в различных задачах могут находить применение различные по свойствам виды чисел и что «в отношении задач то один, то другой вид будет как бы мнимым» [2]. Однако эта точка зрения пробивала себе дорогу медленно. Еще в 1831 г. Гаусс писал: «Насколько не опасаются вводить в общую арифметику дробные числа, хотя существуют так много пересчитываемых вещей, в применении к которым дробь не имеет никакого смысла, настолько же не следует отказывать отрицательным числам в правах, равных с положительными, потому только, что многие вещи не допускают противоположения. Реальность отрицательных чисел достаточно определяется тем, что в бесчисленных других случаях они находят адекватную основу» [3].

На протяжении всего XVIII в. находились ученые — Вольф, Даламбер, Клеро, Гурьев и немало других, которые рассматривали отрицательные числа лишь как удобные знаки фиктивных понятий, лишенных реального содержания. Против реальности отрицательных чисел выдвигались разнообразные доводы, начиная с простейших, вроде того, что величины по своей природе положительны или что нельзя отнять какую-либо величину от ничего, и кончая сложными геометрическими софизмами, казалось бы опровергающими обычную геометрическую интерпретацию относительных чисел. Даламбер выступил с возражением против существования изолированных отрицательных чисел в ряде статей «Энциклопедии», (Négatif — «отрицательное», Positif — «положительное» и др.), Карно — в «Геометрии положения» (1803; см. стр. 200). Разумеется, оба они не отвергали общеизвестных правил действий с отрицательными числами, но лишь стремились обосновать как эти правила, так и получаемые с их помощью результаты в терминах арифметики положительных чисел. Согласно основному принципу теории Карно, отрицательное решение какой-либо задачи

---

[1] *Л. Эйлер.* Письма к ученым. М.—Л., 1963, стр. 312—313, 324.

[2] Цит. по книге: *В. Н. Молодший.* Основы учения о числе в XVIII и начале XIX веков. М., 1963, стр. 123.

[3] Цит. по книге: *А. В. Васильев.* Введение в анализ, вып. II. Казань, 1908, стр. 55.

выражает разность двух количеств, большее из которых было принято в условии задачи за меньшее, а меньшее — за большее. Мы можем, впрочем, оставить без рассмотрения сходства и различия теорий Даламбера и Карно. Поскольку, в конце концов, в самих операциях и применениях алгебры ничто не изменялось, спор о реальности или фиктивности понятия отрицательного числа приобретал в сущности терминологический характер; вместе с тем в обосновании правил операций прогресс достигнут не был. Но критические замечания Даламбера и Карно раскрывали действительно слабые стороны современных им учений о числе и о величине. «Утверждать,— писал Карно,— что изолированное отрицательное количество меньше нуля, это значит облечь математику, которая должна быть наукой прозрачной, в непроницаемый туман и углубиться в лабиринт парадоксов, одних более странных, чем другие. Сказать, что это просто количество, противоположное положительным количествам, это значит ничего не сказать, потому что затем надо будет объяснить, что это за противоположные количества. Прибегать для этого объяснения к новым первоначальным идеям, подобным идеям материи, времени и пространства,— это значит сознаться, что затруднение считается неразрешимым, и породить новые затруднения» [1]. И к этому Карно добавляет: если в качестве примера противоположных количеств приведут движение к востоку или движение к западу, или соответственно к югу и северу, то что означает движение к северо-востоку, к юго-юго-западу и т. д. и какими символами такие количества могут быть выражены в вычислении?

Первые арифметические теории отрицательного числа были разработаны во второй трети XIX в. Гамильтоном и Грассманом. Но ответ на только что упомянутый вопрос, поставленный Карно, был дан еще в конце XVIII в. в геометрической теории комплексного числа, созданной К. Весселем, к которой мы вскоре обратимся. В этой теории естественное объяснение получили и правила знаков действий с относительными числами.

Мнимые и комплексные числа

Во II томе мы видели, что мнимые величины, появившиеся в XVI в., были еще в XVII в. окружены ореолом «амфибии между бытием и небытием»; этот ореол рассеялся только в XVIII в.

В настоящее время система комплексных чисел может быть определена как минимальное поле, содержащее поле действительных чисел и еще элемент i, квадрат которого равен -1, т. е. корень уравнения $x^2 + 1 = 0$ (существуют и другие приемы число арифметического введения комплексных чисел). Любое комплексное чисто можно записать в виде $a + bi$, где a и b — действительные числа; комплексные числа, не являющиеся действительными ($b \neq 0$), называются мнимыми числами. Комплексные числа $a + bi$ можно поставить во взаимно однозначное соответствие с парами действительных чисел a, b и с точками плоскости, имеющими эти пары чисел своими координатами. Над комплексными числами определены сложение, вычитание и умножение по правилу сложения, вычитания и умножения многочленов, причем квадрат i^2 заменяется на -1, а деление на комплексные числа, отличные от 0, совпадает с умножением на число

[1] *Л. Карно.* Размышления о метафизике исчисления бесконечно малых, стр. 282.

$\frac{1}{a+bi}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}$. Все пять основных законов счета при этом выполняются.

В XVII в. и в начале XVIII в. мнимыми называли любые «количества», возникающие при каких-либо действиях над действительными числами, но отличные от последних. Предполагалось, что оперировать с ними можно по обычным правилам арифметики, но было неясно, какие «мнимости» могут встретиться в математике и даже только при решении алгебраических уравнений. Мы видели, что Лейбниц из-за случайной ошибки в вычислениях пришел к заключению, что существуют мнимости, принципиально отличные от чисел вида $a+b\sqrt{-1}$ (т. II, стр. 38). Лишь Даламбер и Эйлер установили, что все известные в то время операции алгебры и анализа приводят к числам этого вида.

Однако еще до установления этих общих результатов в теории мнимых величин были поставлены проблемы и сделаны открытия, далеко идущее значение которых выяснилось только позднее. В самом начале века встал вопрос о логарифмах отрицательных чисел, обсуждавшийся Лейбницем и И. Бернулли,— к этой проблеме, лежащей вне алгебры, мы обратимся в дальнейшем (стр. 325). Здесь же мы, прежде всего, остановимся на решении общей задачи об извлечении корня n-й степени из данного числа, решенной Муавром и Коутсом (ср. т. II, стр. 52).

Еще Виет показал, что корни кубического уравнения в неприводимом случае, когда они все действительные, можно представить в действительной форме, если отождествить уравнение с выражением для синуса тройного угла. Зная правила определения синусов кратных дуг, Виет сумел в одном случае найти все положительные корни некоторого уравнения 45-й степени (т. I, стр. 312). Муавр в некотором смысле развил идеи Виета, имея в своем распоряжении соотношение между синусами двух дуг, относящихся как $n:1$, которое Ньютон привел в письме к Лейбницу от 13 июня 1676 г. (т. II, стр. 47) и которое тот же Муавр вывел в «Philosophical Transactions» за 1698 г. при помощи теоремы о степени многочлена (см. стр. 98).

Знаменитая «формула Муавра» впервые появилась в небольшой статье «Аналитическое решение некоторых уравнений третьей, пятой, седьмой, девятой и высших следующих до бесконечности степеней в конечном виде, аналогичное правилам Кардано для кубических уравнений» (Aequationum quarundam potestatis tertiae, quintae, septimae, nonae, et superiorum, ad infinitum usque pergendo, in terminis finitis, ad instar regularum pro cubicis quae vocantur Cardani resolutio analytica. Philos. Trans., 1707). В статье рассматриваются уравнения

$$ny+\frac{nn-1}{2\cdot 3}ny^3+\frac{nn-1}{2\cdot 3}\frac{nn-9}{4\cdot 5}ny^5+\frac{nn-1}{2\cdot 3}\frac{nn-9}{4\cdot 5}\frac{nn-25}{6\cdot 7}ny^7+\ldots=a, \quad (1)$$

$$ny+\frac{1-nn}{2\cdot 3}ny^3+\frac{1-nn}{2\cdot 3}\frac{9-nn}{4\cdot 5}ny^5+\frac{1-nn}{2\cdot 3}\frac{9-nn}{4\cdot 5}\frac{25-nn}{6\cdot 7}ny^7+\ldots=a \quad (2)$$

(оба содержащие конечное число членов при нечетном n), а также их решения для (1) в виде

$$y=\frac{1}{2}\sqrt[n]{\sqrt{1+aa}+a}-\frac{1}{2}\sqrt[n]{\sqrt{1+aa}-a} \quad (3)$$

и еще в трех эквивалентных формах, а для (2) в виде

$$y = \frac{1}{2}\sqrt[n]{a + \sqrt{aa - 1}} + \frac{1}{2}\sqrt[n]{a - \sqrt{aa - 1}} \qquad (4)$$

и также в трех равносильных формах. Статья содержала два числовых примера, и в одном из них мимоходом был сделан намек на происхождение уравнения (2), которое представляет собой зависимость между синусом y дуги α и синусом a дуги $n\alpha$ [1]. С помощью замены $y = \sin\alpha$, $a = \sin n\alpha$ мы могли бы переписать формулу (4) в виде

$$\sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt[n]{\sin n\alpha + \sqrt{-1}\cos n\alpha} + \frac{1}{2}\sqrt[n]{\sin n\alpha - \sqrt{-1}\cos n\alpha}\ .$$

Это равенство равносильно формуле

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha,$$

которую мы теперь называем по имени Муавра (ср. стр. 323).

Что касается уравнения (1), то в терминах теории гиперболических функций, начала которой были заложены в середине XVIII в. В. Риккати и И. Г. Ламбертом (стр. 330), его можно рассматривать как разложение $\operatorname{sh} n\alpha = a$ по степеням $\operatorname{sh}\alpha = y$. Напомним, что гиперболические косинус и синус определяются через показательную функцию

$$\operatorname{ch}\alpha = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2}, \qquad \operatorname{sh}\alpha = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2}$$

и связаны между собой зависимостью $\operatorname{ch}^2\alpha - \operatorname{sh}^2\alpha = 1$. Формулу (3) можно поэтому записать и так:

$$\operatorname{sh}\alpha = \frac{1}{2}\sqrt[n]{\operatorname{ch} n\alpha + \operatorname{sh} n\alpha} - \frac{1}{2}\sqrt[n]{\operatorname{ch} n\alpha - \operatorname{sh} n\alpha}\ .$$

Выражения (1) и (2), а также соответственно (3) и (4) между собой тесно связаны и переводятся одни в другие с помощью мнимых подстановок, равно как одноименные гиперболические и тригонометрические функции $\operatorname{ch}\alpha = \cos i\alpha$, $i\operatorname{sh}\alpha = \sin i\alpha$. Последние два уравнения представляют собой лишь другую запись формул Коутса — Эйлера, о которых говорится далее (стр. 61 и 324).

Пятнадцать лет спустя в «Philosophical Transactions» за 1722 г. (1724) Муавр продвинулся далее, рассмотрев вопрос о выражении всех корней уравнения (2) с помощью теоремы Коутса о разложении на множители двучлена $a^n \pm x^n$ (стр. 61). Более полно теория извлечения корней была изложена в «Аналитических этюдах о рядах и квадратурах» (Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis, Londini, 1730). Здесь читатель на первой же странице знакомится с формулой

$$x = \frac{1}{2}\sqrt[n]{l + \sqrt{ll - 1}} + \frac{1/2}{\sqrt[n]{l + \sqrt{ll - 1}}},$$

[1] Разложение (2), приведенное Ньютоном, вновь вывел, наряду с аналогичным разложением для $\cos n\alpha$, Я. Бернулли (Mém. Ac. Paris (1702) 1704). Несколько ранее И. Бернулли опубликовал разложения $\sin n\alpha$ и $\cos n\alpha$ по произведениям степеней $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ (Acta Eruditorum, 1701).

где $x = \cos\alpha$, $l = \cos n\alpha$, которая следует из выведенных несколько далее основных уравнений деления углов:

$$z^{2n} - 2lz^n + 1 = 0, \quad z^2 - 2rz + 1 = 0.$$

Решив относительно z^n и z эти два уравнения, принадлежащие, по терминологии Эйлера, к числу возвратных, т. е. не меняющих свой вид при замене z на $1/z$ (см. стр. 86), легко вывести формулу Муавра в привычном теперь виде. Сам Муавр этого не сделал, и современной записью, как и новым, более простым выводом (при натуральных значениях n), мы обязаны Эйлеру (опубл. 1748, см. стр. 323). Кроме того, Муавр подробно рассмотрел разложение на линейные и квадратичные множители двучлена $z^n - 1$, равносильное определению всех n значений $\sqrt[n]{1}$ в тригонометрической форме. Все формулы и теоремы были снабжены доказательствами. Наконец, в статье, напечатанной в «Philosophical Transactions» за 1738 г. (1740), Муавр распространил исследование на извлечение корней из комплексных чисел вида $a + \sqrt{-b}$, подробнее остановившись на случаях $n \leqslant 7$.

Полное изложение доказательств Муавра заняло бы много места, и мы сделаем лишь несколько замечаний. К уравнению (1) он пришел, решая задачу о делении на n равных частей сектора равносторонней гиперболы, ограниченного двумя радиус-векторами, проведенными из центра в вершину и еще какую-либо точку кривой, и ее дугой между этими двумя точками. Найдя средствами метода флюксий и бесконечных рядов уравнение (1) и его решение (3), Муавр заметил чрезвычайное сходство между уравнениями (1) и (2), которое выражает задачу о делении на n равных частей угла или, что сводится к тому же, кругового сектора. Это обстоятельство и аналогия между уравнениями окружности $x^2 + y^2 = 1$ и равносторонней гиперболы $x^2 - y^2 = 1$, отличающимися только знаком, навело его на мысль, что решение уравнения (2), т. е. (4), можно получить посредством перемены в соответствующей части вычислений некоторых знаков. Весьма вероятно, что первоначально он получил результат с помощью мнимых подстановок вида $u = \sqrt{-1}\, v$, о которых, однако, в «Аналитических этюдах» ничего не говорится (ср. стр. 325). В пользу такого предположения свидетельствует письмо Муавра Иоганну Бернулли от 17 июля 1708 г., в котором он употребил такого рода подстановку для доказательства формулы тангенса n-кратного аргумента, примененной незадолго до того Дж. Мечином при приближенном вычислении π (см. стр. 331)[1].

Исследования по теории комплексных чисел Муавра частью переплетались, как мы только что видели, с работами Роджера Коутса (1682—1716), воспитанника и с 1706 г. профессора астрономии и физики Кембриджского университета. Талантливый и трудолюбивый ученый, Коутс [2] вписал свое имя в историю не только математики, но и механики. В 1709—1713 гг. он помогал Ньютону в подготовке второго издания «Математических начал натуральной философии». Участие Коутса было очень вели-

---

[1] Ср. цитаты из «Аналитических этюдов» в примечании С. Я. Лурье к книге: *Л. Эйлер*. Введение в анализ бесконечных, т. 1. Изд. 2. М., 1961, стр. 295—300.— На применение мнимых подстановок Муавра несомненно натолкнуло знакомство с работой И. Бернулли об интегрировании рациональных дробей (1703; ср. далее стр. 352).

[2] Часто встречающееся написание этой фамилии «Котес» неправильно.



Р. Коутс
(бюст работы П. Шимейкерса 1758 г., хранящийся в Тринити колледже, Кембридж)

ко: он исправил или побудил автора исправить многие неточности в доказательствах, вычислениях и даже в экспериментальной части, и ему было доверено написать обширное предисловие к новому изданию, содержащее яркое изложение принципов натурфилософии Ньютона и наряду с ним критику учения о вихрях Декарта и близких к этому учению взглядов на механизм движений небесных тел Лейбница. Ньютон очень высоко ценил дарование своего молодого помощника и после ранней его смерти говаривал: «будь Коутс жив, мы узнали бы еще кое-что».

В «Philosophical Transactions», (1714)1717, Коутс напечатал обширную статью «Измерение отношений» (Logometria), содержавшую теорию логарифмических функций, которые он назвал «мерами отношений». Меру отношений он вводил, если выразиться по-современному, функциональным уравнением $f\left[\left(\frac{a}{b}\right)^n\right] = nf\left(\frac{a}{b}\right)$ с исходным условием $f\left(\frac{a}{a}\right) = 0$, после чего в некоторых предположениях доказывал, что мера $\frac{a}{b} = f\left(\frac{a}{b}\right) = M \ln\frac{a}{b}$, где M — определенным образом выбранная постоянная.

В этой работе уже содержалось замечательное соотношение $\ln(\cos x + i \sin x) = xi$, равносильное формуле Эйлера, связывающей показательную и тригонометрическую функции (см. стр. 324). Сам Коутс высказал это предложение, ставшее одним из основных в теории функций, мимоходом и не дал ему каких-либо применений. Вот собственная формулировка Коутса: «Если какая-либо дуга четверти круга, описанная радиусом CE, имеет синус CX и синус дополнения до четверти XE и если принять радиус CE за модуль, то дуга будет мерой отношения $EX + XC\sqrt{-1}$ к CE, умноженной на $\sqrt{-1}$ »[1].

Когда Коутс скончался, его сочинения были собраны заменившим его на кафедре профессором Робертом Смитом (1689—1768) в книге «Гармония мер, или анализ и синтез, развитые с помощью мер отношений и углов и т. д.» (Harmonia mensurarum, sive analysis et synthesis per rationum et angulorum mensuras promotae, etc. Cantabrigiae, 1722). Сюда вошла в качестве первой части «Логометрия», а вторая часть посвящена интегрированию рациональных и тригонометрических функций. В дополнении ко второй части была опубликована уже упомянутая теорема о разложении на действительные множители первой и второй степени двучленов вида $a^n \pm x^n$, обнаруженная Смитом в бумагах Коутса. Сам Коутс выразил ее в геометрических терминах, но перевод на язык алгебры не представлял труда. В случае $a^n - x^n$ и нечетного n множителями являются $a - x$ и квадратичные трехчлены вида $a^2 - 2a\cos\frac{2k\pi}{n}x + x^2$, где $2k = 2, 4, \ldots, n - 1$; при четном n множители суть $a - x$, $a + x$ и трехчлены $a^2 - 2a\cos\frac{2k\pi}{n}x + x^2$, где $2k = 2, 4, \ldots, n - 2$. Очевидно, что теорема позволяет записать в тригонометрической форме все значения корня n-й степени из положительного числа a. Разложение на множители двучлена $a^n + x^n$ аналогично. Доказательство теоремы в бумагах Коутса отсутствовало, и его впервые привел в своих «Аналитических этюдах» Муавр.

Несмотря на эти выдающиеся достижения, операция извлечения корня еще долгое время представляла некоторые трудности. Даже Эйлер не избежал в одном случае промаха и в своей «Универсальной арифметике» (т.I,1768) заявил, что произведение двух «невозможных» чисел может быть положительным: так как вообще $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$, то $\sqrt{-1}\sqrt{-4} = \sqrt{4} = 2$; правда, далее добавлено, что $\sqrt{4} = \pm 2$. Большинство математиков, обративших внимание на это место, не согласилось с выводом Эйлера, но при отсутствии четких определений правил действий с мнимостями их собственные доводы были недостаточно обоснованы.

Общее утверждение, что любой целый алгебраический многочлен с действительными коэффициентами раскладывается на линейные и квадратичные множители с действительными же коэффициентами (т. е. что корни любого алгебраического уравнения с такими коэффициентами имеют вид $a + b\sqrt{-1}$), впервые высказал с полной ясностью Л. Эйлер в письме к Николаю I Бернулли от 1 сентября 1742 г. Лейбниц, как мы видели (см. т. II, стр. 38), был другого мнения. Николай Бернулли и Гольдбах, которому Эйлер также вскоре сообщил этот, пока еще недоказанный, результат, сперва пытались построить противоречащие примеры, тут же опровергнутые Эйлером. Затем Николай Бернулли полностью согласил-

[1] «Philosophical Transactions», (1714) 1717, N 338, p. 32.

ся с Эйлером и в письме к нему от 6 апреля 1743 г. заявил, что любые мнимые величины приводятся к форме $a + b\sqrt{-1}$. К такому же заключению пришел в «Размышлениях об общей причине ветров» (Réflexions sur la cause générale des vents. Berlin, 1747) Даламбер. Он исследовал здесь и природу выражения $(a+b\sqrt{-1})^{g+h\sqrt{-1}}$. Для доказательства равенства

$$(a+b\sqrt{-1})^{g+h\sqrt{-1}} = A + B\sqrt{-1}$$

он принял основание $a + b\sqrt{-1}$ и степень $A + B\sqrt{-1}$ переменными и, применяя логарифмическое дифференцирование, получил равенство

$$(g+h\sqrt{-1})\frac{d(a+b\sqrt{-1})}{a+b\sqrt{-1}} = \frac{d(A+B\sqrt{-1})}{A+B\sqrt{-1}}.$$

Отделяя затем действительную и мнимую части, Даламбер выразил $A^2 + B^2$ и $\operatorname{arctg} B/A$ через g, h, $a^2 + b^2$ и $\operatorname{arctg} b/a$.

Этот же вопрос рассматривал Эйлер в «Исследованиях о мнимых корнях уравнений» (Recherches sur les racines imaginaires des équations. Mém. Ac. Berlin, (1749)1751) при доказательстве основной теоремы алгебры. В начале этой статьи Эйлер подчеркивает, что он не определяет заранее мнимые числа как выражения $a + b\sqrt{-1}$. «Мнимым количеством называют такое, которое ни больше нуля, ни меньше нуля, ни равно нулю; это, следовательно, нечто невозможное, как, например, $\sqrt{-1}$ или вообще $a + b\sqrt{-1}$, поскольку такое количество ни положительно, ни отрицательно, ни нуль» [1]. Доказываемую им теорему, о которой будет говориться далее (см. стр. 74), Эйлер рассматривает как частный случай следующего общего предложения: «Всякое мнимое количество всегда образовано двумя членами, один из которых есть действительное количество, обозначаемое через M, а другой — произведение также действительного количества N на $\sqrt{-1}$; таким образом, $\sqrt{-1}$ есть единственный источник всех мнимых выражений» [2].

Для доказательства Эйлер применяет к числам вида $a + b\sqrt{-1}$ различные алгебраические и трансцендентные операции и убеждается, что результат является числом того же вида. «Итак, поскольку,— пишет Эйлер,— все мнимые количества, образованные трансцендентными операциями, также заключаются в общей форме $M + N\sqrt{-1}$, мы сможем, не колеблясь, утверждать, что вообще все мнимые количества, какими бы сложными они ни являлись, всегда приводимы к виду $M + N\sqrt{-1}$» [3].

Необходимо заметить, что самая постановка задачи — доказать, что любое мнимое количество имеет вид $a + b\sqrt{-1}$,— страдала в XVIII в. неопределенностью, поскольку не был, да и не мог быть, заранее точно очерчен круг операций, порождающих эти любые мнимости. Фактически задача решалась для наиболее важных классов функций, с которыми тогда имели дело, т. е. для отдельных «аналитических выражений» (см. стр. 250).

---

[1] *L. Euler*. Opera omnia, series I. Opera mathematica, t. 6. Leipzig — Berlin, 1921, p. 79.
[2] Там же, стр. 121.
[3] Там же, стр. 147.

Как ни велики были достижения в исследовании свойств мнимых величин и их приложений, как ни сходны были законы операций над ними с законами, управляющими действительными числами, они оставались в глазах математиков XVIII в. полезными фикциями, лишенными самостоятельного реального значения. Попытка геометрического истолкования мнимых чисел, предпринятая Валлисом (см. т. II, стр. 37), долгое время не находила удовлетворительного продолжения. Сходную интерпретацию мнимых чисел подробнее развил уже упоминавшийся данцигский преподаватель математики Генрих Кюн (1690—1769). В статье, помещенной в «Novi Commentarii», (1750—1751) 1753, он присваивал площадям положительные и отрицательные значения, а мнимые числа истолковывал как стороны квадратов отрицательной площади. Об истолковании операций над мнимыми числами у Кюна не было и речи. Эйлер, редактировавший математический отдел новой серии «Записок» Петербургской академии, был очень недоволен публикацией статьи Кюна, и по его настоянию в том же томе, что и она, было напечатано в качестве ее резюме редакционное замечание: «Это рассуждение по своему значению таково, что о нем ничего нельзя сказать по характеру его изложения; поэтому мы хотим, чтобы читатели посмотрели самое рассуждение» [1].

В некоторых работах Даламбера и Эйлера (см. стр. 169) по механике и геометрии комплексные числа и аналитические функции, точнее, их действительные части и коэффициенты при $\sqrt{-1}$, ставились в соответствие с реальными величинами — скажем, проекциями скорости частицы жидкости или координатами точки на плоскости. Однако ни Эйлер и Даламбер, ни другие математики XVIII в., поступавшие так же, не пришли при этом к истолкованию комплексных чисел как таковых. Для такого истолкования было недостаточно переходить при вычислениях от числа $a + b\sqrt{-1}$ к точке с координатами a, b и обратно; для этого нужно было еще интерпретировать действия над комплексными числами, а этого не делали. Тригонометрическая запись комплексного числа, которой не раз пользовались те же Эйлер и Даламбер, также не навела их на геометрическое истолкование мнимых величин.

Полное геометрическое истолкование комплексных чисел и основных действий над ними было впервые предложено норвежцем Каспаром Весселем (1745—1818), работавшим геодезистом-картографом Датской академии наук. Оно содержится в его единственном математическом труде, поданном академии в 1797 г. и два года спустя напечатанном в ее записках: «Опыт об аналитическом представлении направления и его применениях, преимущественно к решению плоских и сферических многоугольников» (Om directionens Analytiske Betegning et Forsög anwendt fornemellig til plane og sphaeriske Polygoners oplösning. Danske Vidensk. Selsk. skr., 1799). Целью Весселя было создать удобный аппарат решения геодезических задач, для чего он впервые систематически разработал векторное исчисление на плоскости, тут же выступающее как геометрическая модель алгебры комплексных чисел. Идея выразить изменение направления отрезка (слово «вектор» ввел У. Гамильтон) с помощью алгебраических символов формулируется совершенно отчетливо. «Настоящий опыт,— писал он,— предпринимается с целью узнать, как аналитически представлять направление», и «посредством одного только уравнения, связываю-

[1] «Novi Commentarii Ac. Sci. Petropolitanae», t. III, Summarium, p. 18.

щего один неизвестный отрезок и несколько известных отрезков, получить такое выражение, которое сразу представляло бы искомый отрезок как по величине, так и по направлению» [1]. Обычные алгебраические операции позволяют изменить направление только на противоположное, т. е. положительное на отрицательное и наоборот. Создание исчисления отрезков, имеющих на плоскости произвольные направления, требует обобщения алгебры; нужно «расширить определения алгебраических операций, но так..., чтобы не было противоречия со старой теорией чисел...» [2].

В цитированных только что словах Вессель сжато высказал одну из основных идей того метода введения определений при обобщении понятия числа, который основан на так называемом принципе перманентности формальных законов счета. Суть этого принципа заключается в том, что при построении новой, более широкой по сравнению с исходной, системы чисел операции в ней обобщаются таким образом, что остаются в силе (латинское permanere значит оставаться, сохраняться) основные законы одноименных действий над числами исходной системы. Фактически вплоть до начала XIX в. переход от натуральных чисел к дробным, отрицательным, иррациональным и мнимым, какими бы причинами в каждом отдельном случае он ни был вызван, всегда происходил так, что действия над новыми символами подчинялись пяти законам счета и не были в противоречии с одноименными прежними действиями. Идея принципа перманентности возникала у многих, например, Валлиса (1685), когда он указывал, что над иррациональными корнями можно производить арифметические действия, хотя их нельзя выразить с помощью «истинных» чисел. Вессель, по-видимому, первый высказал сформулированное им требование в общей и явной форме. Более полное выражение эти идеи нашли у Дж. Пикока (1833) и Г. Ганкеля (1867), последнему принадлежит и само выражение «принцип перманентности формальных законов».

Построение алгебры компланарных векторов и комплексных чисел у Весселя очень сходно с тем, какое можно найти в руководствах нашего времени, только Вессель еще не ставил некоторые более тонкие вопросы. Так, обойден вопрос о равенстве направленных отрезков и для сложения и умножения их, определяемых точно так, как теперь, проверено выполнение лишь отдельных законов счета. Применяя правило умножения к основным единицам, обозначаемым $+1$, -1, $+\varepsilon$, $-\varepsilon$, Вессель вывел следующие формулы:

$$\begin{aligned}
(+1)(+1) &= +1, & (-1)(+\varepsilon) &= -\varepsilon,\\
(+1)(-1) &= -1, & (-1)(-\varepsilon) &= +\varepsilon,\\
(-1)(-1) &= +1, & (+\varepsilon)(+\varepsilon) &= -1,\\
(+1)(+\varepsilon) &= +\varepsilon, & (+\varepsilon)(-\varepsilon) &= +1,\\
(+1)(-\varepsilon) &= -\varepsilon, & (-\varepsilon)(-\varepsilon) &= -1.
\end{aligned}$$

«Отсюда следует,— заключал Вессель,— что ε равно $\sqrt{-1}$ и что таким образом определенное отклонение (угол с направлением положительной единицы.— *Ред.*) произведения не противоречит обычным правилам опера-

---

[1] Цит. по французскому переводу: *C. Wessel.* Essai sur la représentation analytique de la direction, avec des applications etc. Copenhague, 1897, p. 3.

[2] Там же.

ций»[1]. Направленному отрезку ставится в соответствие комплексное число в тригонометрической форме $r (\cos v + \varepsilon \sin v)$ и рассматриваются все операции над комплексными числами, причем формула Муавра доказывается и для случая дробного рационального показателя. В качестве примера приложений своего исчисления Вессель решил ряд задач на сферические многоугольники.

Так, в «геометрическом анализе» Весселя нашли реальное истолкование и обоснование комплексные числа и действия над ними и, в частности, отрицательные числа. Понятия. в течение двухсот пятидесяти лет представлявшиеся только удобными фикциями, получили ясный реальный смысл, а сам термин «мнимое число» стал всего лишь историческим пережитком.

Своеобразно реализовав мечту Лейбница о геометрическом исчислении для компланарных векторов, Вессель пошел далее, попытавшись обобщить комплексные числа так, чтобы аналитически представить и векторы в трехмерном пространстве. При этом он высказал плодотворную идею относительно связи произведения таких векторов с вращениями пространства. Однако обобщение алгебры комплексных чисел, которого и после Весселя искал ряд математиков, удалось только У. Гамильтону, построившему теорию кватернионов.

К сожалению, замечательный труд Весселя стал известен широким кругам математиков только в конце XIX в., после того как в 1897 г. Датская академия наук опубликовала его французский перевод. В конце XVIII и в начале XIX в. к геометрическому истолкованию комплексных чисел пришли и другие ученые, среди которых назовем жившего в Париже уроженца Женевы Жана Робера Аргана (1768—1822). «Опыт некоторого способа представления мнимых величин в геометрических построениях» (Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques, Paris, 1806) Аргана, изданный анонимно, также оставался незамеченным, пока Жозеф Диаз Жергон (1771—1859), основатель математического журнала «Annales de mathématiques pures et appliquées» («Анналы чистой и прикладной математики»), не опубликовал эту работу в четвертом томе своего журнала (1813/14); тут же развернулась и оживленная полемика по вопросу об истолковании мнимых чисел. После этого сочинение Аргана получило широкую известность. Плоскостью комплексного переменного пользовался по существу Гаусс в своей диссертации (1799), о которой мы будем говорить ниже, и в совершенно явной форме — в «Теории биквадратичных вычетов» (1831) (см. стр. 124). Год спустя У. Гамильтон построил чисто арифметическую теорию комплексных чисел, рассматриваемых как пары действительных чисел (опубл. 1837); любопытно, что обоснование арифметики дробей, как пар целых чисел, было дано много позднее — Ж. Таннери в 1894 г. Наряду с теорией Гамильтона были предложены и другие подходы к обоснованию комплексных чисел, на которых мы не можем останавливаться. Отметим только один момент: обобщением комплексных чисел явились числовые системы со многими единицами, начиная с кватернионов Гамильтона. Впрочем, кватернионы уже существенно отличаются от комплексных чисел: их умножение не коммутативно. Глубокие исследования, проведенные в конце

[1] *C. Wessel*. Essai sur la représentation analytique de la direction, avec des applications etc., p. 9.

XIX в. К. Вейерштрассом, Г. Фробениусом и Б. Пирсом, показали. что всякое расширение понятия числа за пределы системы комплексных чисел возможно только при отказе от каких-либо обычных свойств операций.

В заключение приведем некоторые подробности, относящиеся к символике и терминологии. Знак мнимой единицы i (от восходящего к термину Декарта слова imaginaire — «мнимый») предложил в 1777 г. Эйлер (опубл. 1794) и в общее употребление ввел Гаусс (с 1801 г.); впрочем, Коши стал им пользоваться только с 1847 г. Термин «комплексное число» встречается у Л. Карно (1803), но в обиход оно вошло опять-таким благодаря Гауссу (1831). Слово «сопряженный» применил Коши (1821), «модуль» — Арган и за ним Коши, «абсолютная величина» и запись $|a + bi|$ — Вейерштрасс (хотя об «абсолютной величине» линии $a + b\sqrt{-1}$ писал еще Арган), «норма» $(a^2 + b^2)$ — Гаусс.

Линейные уравнения и определители

Метод решения систем линейных уравнений и исключения неизвестных, намеченный Лейбницем в письме к Лопиталю от 28 апреля 1693 г. (см. т. II, стр. 52—53), был вновь открыт несколько десятков лет спустя. Маклорен в своем курсе алгебры (опубл. 1748) при решении систем двух, трех и четырех уравнений с таким же числом неизвестных отметил, что все они выражаются дробями с одним и тем же знаменателем, и был близок к установлению правила образования числителей, но все же далее этого не пошел. Общий алгоритм решения определенных систем с любым числом неизвестных и исключения неизвестных из $n + 1$ уравнения с n неизвестными при помощи определителей разработал тогда же профессор университета в Женеве Габриэль Крамер (1704—1752), ученик и друг Иоганна Бернулли. Крамеру, среди прочего, мы обязаны изданием четырехтомного собрания сочинений И. Бернулли, трех томов сочинений Я. Бернулли и двухтомной переписки Лейбница с И. Бернулли.

Впервые Крамер изложил свой метод в большом мемуаре «Об исчезании неизвестных величин» (De l'évanouissement des grandeurs inconnues), представленном в 1744 г. через Клеро Парижской академии наук, но не увидевшем света. Затем Крамер подробно описал свой метод во «Введении в анализ кривых алгебраических линий», к которому мы еще вернемся (стр. 171).

Крамер рассматривал систему любого числа линейных уравнений с таким же числом неизвестных $x, y, z, v, \ldots$ помечая при этом коэффициенты индексами в виде показателей:

$$A^1 = Z^1z + Y^1y + X^1x + V^1v + \text{ и т. д.},$$
$$A^2 = Z^2z + Y^2y + X^2x + V^2v + \text{ и т. д.},$$
$$A^3 = Z^3z + Y^3y + X^3x + V^3v + \text{ и т. д.},$$
$$A^4 = Z^4z + Y^4y + X^4x + V^1v + \text{ и т. д.},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Общий знаменатель дробей, выражающих неизвестное, образуется как сумма произведений вида $\pm ZYXV\ldots$ с индексами, представляющими собой все возможные $n!$ перестановок чисел $1, 2, 3, 4, \ldots, n$.

Для определения знака произведений вводится понятие «беспорядка» (dérangement) в расположении индексов: беспорядок — теперь говорят «инверсия» — имеет место всякий раз, как большее число предшествует меньшему, и, если в перестановке четное число беспорядков, произведение берется с положительным знаком, а если нечетное, то с отрицательным. Таким образом, знаменатель есть, выражаясь современным языком, определитель данной системы уравнений:

$$\begin{vmatrix} Z^1 & Y^1 & X^1 & V^1 & \ldots \\ Z^2 & Y^2 & X^2 & V^2 & \ldots \\ Z^3 & Y^3 & X^3 & V^3 & \ldots \\ Z^4 & Y^4 & X^4 & V^4 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

Наконец, числители образуются из знаменателя путем замены коэффициентов каждого неизвестного на свободные члены с теми же индексами.

Распространению метода определителей содействовал парижский профессор математики и академик Этьен Безу (1730—1783), автор упомянутого выше шеститомного курса математики для военно-морских школ (см. стр. 24). Пытаясь свести решение произвольных алгебраических уравнений к двучленным (см. стр. 87), Безу пришел к проблеме исключения неизвестных, которой посвятил несколько ценных работ. Особенно интересовала математиков задача исключения одного из неизвестных из системы двух алгебраических уравнений, равносильная задаче об определении точек пересечения двух плоских алгебраических кривых. В главе о геометрии нам придется еще говорить о соответствующих изысканиях Маклорена, Крамера и Эйлера, который в XIX главе второго тома «Введения в анализ бесконечных» (1748) описал на примерах два приема исключения. Этому вопросу Эйлер посвятил также статьи в «Mém. Ac. Berlin», (1748) 1750, и (1764) 1766, причем во второй изложил метод, носящий и теперь его имя. В случае двух уравнений с одним неизвестным задача исключения совпадает с задачей определения условия существования общего корня этих уравнений. Мы поясним метод Эйлера на его собственном частном примере уравнений $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ и $x^2 + Px + Q = 0$. Если эти уравнения имеют общий корень α, то $x^3 + px^2 + qx + r \equiv (x - \alpha)(x^2 + ax + b)$, $x^2 + Px + Q = (x - \alpha)(x + A)$, т. е. существуют такие множители $x^2 + ax + b$, $x + A$, что $(x^3 + px^2 + qx + r)(x + A) = (x^2 + Px + Q)(x^2 + ax + b)$. Сравнение коэффициентов при одинаковых степенях x дает линейную систему четырех уравнений с тремя неизвестными A, a, b. Исключение неизвестных дает выражение, вскоре получившее название результанта (см. стр. 69); равенство результанта нулю представляет собой условие, при котором система совместна и данные уравнения имеют общий корень.

Безу в «Mém. Ac. Paris», (1764) 1767, привел иной, более удобный для выкладок, прием и применил его к системе уравнений с двумя неизвестными $f_1(x, y) = 0$, $f_2(x, y) = 0$ степени m и соответственно n. При этом он показал, что возникающий после исключения одной из них результант имеет, вообще говоря, степень mn, которая может быть в частных случаях и ниже (именно, когда многочлены f_1 и f_2 имеют множитель, отличный от постоянного). Таким образом, данная система имеет, вообще говоря, mn общих решений. Это предложение, известное и ранее (см.

стр. 156), Безу впервые обосновал удовлетворительным для своего времени образом. Для распространения теории определителей статья была важна потому, что в ней с самого начала формулируется нужное в дальнейшем рекуррентное правило образования результанта, т. е. определителя, равенство нулю которого обеспечивает совместность системы n линейных уравнений с $n+1$ неизвестными. Добавим, что в «Общей теории алгебраических уравнений» (Théorie générale des équations algébriques, Paris, 1779) Безу обобщил теорию на случай нескольких уравнений и рассмотрел всю проблему с большой подробностью.

Прошло немного времени и сами определители стали предметом исследования. В этом направлении первые шаги были сделаны парижским академиком, с 1782 г. директором знаменитого Музея искусств и ремесел, а впоследствии активным участником Французской революции и пылким якобинцем Александром Теофилем Вандермондом (1735—1796), Лапласом и Лагранжем. Их результаты излагаются теперь в любом руководстве по теории определителей. Алгоритмам Крамера и Безу недоставало подходящей символики. В «Мемуаре об исключении» (Mémoire sur l'élimination, (1772)1776) Вандермонд ввел, подобно Лейбницу (см. т. II, стр. 52), двойную индексацию коэффициентов — по месту в уравнении и по номеру уравнения, правда, в форме, менее удобной, чем принятая теперь; он писал номер уравнения над номером места, вроде $\overset{1}{1}$ в буквенном виде $\overset{\alpha}{a}$ и т. п. Определитель второго порядка Вандермонд изображал знаком $\frac{\alpha|\beta}{a|b} = \overset{\alpha}{a} \cdot \overset{\beta}{b} - \overset{\alpha}{b} \cdot \overset{\beta}{a}$; определители высших порядков вводились рекуррентными соотношениями, как у Безу, так что, например, $\frac{\alpha|\beta|\gamma}{a|b|c} = \overset{\alpha}{a} \cdot \frac{\beta|\gamma}{b|c} + \overset{\alpha}{b} \cdot \frac{\beta|\gamma}{c|a} + \overset{\alpha}{c} \cdot \frac{\beta|\gamma}{a|b}$, аналогично и $\frac{\alpha|\beta|\gamma|\delta}{a|b|c|d}$ определяется, как мы бы сказали, разложением по элементам первого столбца и т. д. В соответствии с этими обозначениями Вандермонд сформулировал основные теоремы о числе членов определителя, о сохранении значения определителя при перемене местами строк и столбцов, об изменении знака определителя при перестановке местами двух параллельных рядов и о вытекающем отсюда равенстве нулю определителя с двумя тождественными параллельными рядами. Приведем для образца запись системы двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\overset{1}{1}\,\xi_1 + \overset{1}{2}\,\xi_2 + \overset{1}{3} = 0,$$

$$\overset{2}{1}\,\xi_1 + \overset{2}{2}\,\xi_2 + \overset{2}{3} = 0,$$

с решениями:

$$\xi_1 = \frac{\frac{1|2}{2|3}}{\frac{1|2}{1|2}}, \qquad \xi_2 = \frac{\frac{1|2}{3|1}}{\frac{1|2}{1|2}}.$$

Другие обозначения были предложены в том же томе «Mém. Ac. Paris» Лапласом в виде $({}^1a\cdot{}^2b\cdot{}^3c)$ и т. п., затем в форме $(ab'c'')$ — Безу (1779), позд-

нее — О. Коши (1815), который писал $S(\pm a_1^1 a_2^2 a_3^3 \ldots a_n^n)$ или $S(\pm a_{1\cdot 1} a_{2\cdot 2} a_{3\cdot 3} \ldots a_{n\cdot n})$, Н. И. Лобачевским (1834) и другими учеными. Наше современное обозначение в виде квадратной таблицы коэффициентов с двумя вертикальными чертами по бокам ввел в 1841 г. А. Кэли. Заметим, что сам термин «детерминант», т. е. определитель, употребил сперва в более узком смысле дискриминанта квадратичной формы с двумя или тремя переменными Гаусс (1801), после чего Коши применил его в самой теории определителей (1815).

Несколько страниц отведено определителям в только что упомянутой большой статье Лапласа «Исследования по интегральному исчислению и о системе мира» (Recherches sur le calcul intégral et sur le système du monde. Mém. Ac. Paris, (1772)1776). Лаплас, называвший определитель результантом (ибо это выражение возникало в результате исключения неизвестных), так же как и Вандермонд рассмотрел свойства, связанные с перестановкой рядов или совпадением соответственных элементов. Кроме того, он пришел к носящей его имя теореме о выражении определителя в виде суммы произведений его миноров на соответствующие им адъюнкты. Лагранж вновь дал разложение определителя по элементам какого-либо ряда (что, в сущности, есть частный случай теоремы Лапласа) и доказал, что сумма произведений элементов ряда на адъюнкты, соответствующие элементам параллельного ряда, равна нулю (Nouv. Mém. Ac. Berlin, (1773)1775).

Были рассмотрены некоторые специальные виды определителей и среди них «вековое уравнение»

$$\begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - x & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - x \end{vmatrix} = 0,$$

где $a_{ik} = a_{ki}$, которое встретилось в частных случаях $n = 2$, $n = 3$ Лагранжу при исследовании поверхностей второго порядка ((1773)1775) и Лапласу при изучении вековых неравенств в движении планет ((1772)1773 и «Небесная механика», т. I, 1799),— с этим связано название такого уравнения. Для рассмотренных ими случаев Лаплас и Лагранж доказали, что корни векового уравнения действительны; общее доказательство этой теоремы дал Коши (1829). Вековое уравнение вообще имеет важное значение в механике; ему удовлетворяют частоты малых колебаний системы точек с n степенями свободы около положения равновесия.

Вандермонд (Mém. Ac. Paris, (1771)1774) ввел определители вида

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

правда, лишь для $n = 3$, а общий случай опять-таки рассмотрел Коши (1815).

В начале XIX в. теорией определителей занимался польский философ и математик Юзеф Гёне-Вронский (1778—1853), который, среди прочего, впервые ввел в 1812 г. функциональный определитель вида

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

примененный Э. Кристоффелем (1858) к исследованию линейной зависимости системы функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$ и в 1882 г. названный Т. Мюиром «вронскианом». Вронский, после участия в восстании Костюшко, проживший бо́льшую часть жизни в Париже, занимался поисками универсальных алгоритмов и формул решения любых уравнений, как алгебраических, так и дифференциальных, разложений в бесконечные ряды и произведения. Достичь поставленных им целей было невозможно, но попутно он пришел к ряду частных интересных открытий, которые не получили в свое время признания из-за крайне трудной и неясной формы изложения. Творчеству этого высокоодаренного человека был в высокой степени присущ формальный подход к разработке технического математического аппарата. Подобный формализм не помешал, впрочем, Вронскому критически оценить теорию аналитических функций Лагранжа (см. стр. 285).

На математических работах Вронского отразилось некоторое воздействие немецкой комбинаторной школы К. Ф. Гинденбурга (см. стр. 99), которому (1784), как и его последователю Г. А. Роте (1800), принадлежат некоторые заслуги в дальнейшем распространении определителей.

Новыми успехами в XIX в. теория определителей была обязана прежде всего О. Коши, а затем К. Г. Якоби, А. Кэли и Дж. Сильвестеру. Эти успехи положили основу развития новых важных областей математики: линейной алгебры, матричного исчисления, алгебраической теории форм и их инвариантов. Не касаясь всего этого, отметим лишь одно обстоятельство, тесно связанное с предыдущим изложением. Математики XVIII в. не исследовали сколько-нибудь подробно систему n уравнений с n неизвестными, когда ее определитель равен нулю. Полный анализ этого случая, а также более общих систем m линейных уравнений с n неизвестными, как однородных, так и неоднородных, был проведен целым рядом ученых: Л. Кронекером (с 1864 г.), Г. Фробениусом (1876), Э. Руше и Г. Фонтене (с 1875 г.) и другими. Введение Г. Фробениусом понятия о ранге матрицы (1879) позволило ему, а также А. Капелли (1892) сформулировать необходимое и достаточное условие совместности неоднородной системы в той сжатой и удобной форме, в какой оно вошло в учебники нашего времени. Заметим, что термин «матрица» принадлежит Сильвестеру (1851).

Даламбер и основная теорема алгебры

Одной из проблем теории алгебраических уравнений высших степеней, стоящих в центре внимания математиков XVIII в., была так называемая основная теорема алгебры. Эта теорема была высказана впервые П. Роте, А. Жираром и Р. Декартом в формулировках (см. т. II, стр. 24—25, 42),



Ж. Даламбер
(с пастели Де ла Тура)

сильно отличающихся от современной, принадлежащей Эйлеру и Даламберу: всякий алгебраический многочлен с действительными коэффициентами раскладывается в произведение линейных или квадратичных действительных множителей. Эйлер, как упоминалось еще в 1742 г., письменно высказал это утверждение, означающее, что уравнение n-й степени имеет n корней, принадлежащих полю комплексных чисел $a + b\sqrt{-1}$ (см. стр. 61).

Первое доказательство этой теоремы было предложено в 1746 г. Жаном ле Роном Даламбером (1717—1783). Даламбер, сын маркизы де Тансен и артиллерийского офицера Детуша, вскоре после рождения был подкинут матерью на ступени парижской церкви Св. Иоанна Круглого (Jean le Rond), чем и объясняется его имя. Даламбер воспитывался в семье усыновившего его бедного стекольщика; фамилия Даламбер (собственно, д'Аламбер) произведена из имени его приемного отца Аламбера. Даламбер учился в колледже Мазарини и в Академии юридических наук и получил звания бакалавра искусств и лиценциата прав, однако профессия адвоката ему была не по душе, и он стал изучать математику, причем первым руководителем его был историк этой науки Ж. Э. Монтюкла. Уже в 1739 и 1740 гг. Даламбер представил Парижской академии свои сочинения

о движении твердых тел в жидкости и об интегральном исчислении и в 1741 г. был избран ее адъюнктом; впрочем, академическое звание, дающее право на государственное жалование, он получил только в 1756 г., а в 1772 г. он стал непременным секретарем Академии. Петербургская академия избрала его в 1764 г. своим иностранным членом.

В 1743 г. в Париже вышел «Трактат о динамике» (Traité de la dynamique) Даламбера, где был предложен так называемый «принцип Даламбера», позволяющий весьма общим образом приводить задачи, относящиеся к движению несвободной системы, к задачам статики. В 1747 г. в Берлине были опубликованы упоминавшиеся «Размышления об общей причине ветров», а в 1748 г. вышли его «Исследования по интегральному исчислению» (Recherches sur le calcul intégral. Mém. Ac. Berlin, (1746)1748), о которых мы будем говорить ниже. Тогда же Даламбер нашел свое решение задачи о колебании струны, положившее начало знаменитой дискуссии о природе функций, входящих в интегралы уравнений математической физики (см. стр. 413 и след.). Выдающийся вклад Даламбер внес и в небесную механику.

С 1750 г. Даламбер принимает деятельное участие в организованном Д. Дидро издании «Энциклопедии», о которой говорилось раньше (см. стр. 7). В первом томе «Энциклопедии» (1751) была помещена обширная вступительная статья Даламбера о происхождении и развитии наук.

Разделяя, вслед за Ф. Бэконом, умственные способности на память, рассудок и воображение, Даламбер соответственно расчленил все человеческие познания на историю, относящуюся к памяти, философию, проистекающую из рассудка, и поэзию, рождающуюся из воображения. Статья заканчивается общей схемой знаний в виде таблицы. Наиболее важны в ней мысли о преемственности и связи между отдельными науками. Перу Даламбера принадлежит в «Энциклопедии» множество разнообразных статей, в том числе по математике. Блестящие по форме и весьма содержательные, хотя нередко и спорные, они оказали большое влияние на развитие математической мысли и образования во второй половине XVIII в. Мы имели уже случай коснуться статей «Геометрия», «Отрицательный», «Положительный» и нам еще встретятся такие, как «Дифференциал», «Предел» (см. стр. 272) и «Герб и решетка», содержащая прямую ошибку (см. стр. 144). Упомянем, что в статье «Размерность» (Dimension, v. IV) высказана мысль о рассмотрении времени как четвертого измерения. Вольнодумная, по общему своему направлению, «Энциклопедия» имела влиятельных противников, которых поддерживали правительство Франции и католическая церковь. Когда нападки реакционных кругов, затронувшие и непосредственно Даламбера, усилились, он вышел из редакции, но остался одним из авторов «Энциклопедии» и другом Дидро, который, обладая бóльшим гражданским мужеством, довел ее издание до конца. В философских воззрениях Даламбера преобладало скептическое отношение к вопросам о познаваемости сущности вещей, о существовании разумного творца мира и т. д., хотя он и склонялся к сенсуализму. Эти воззрения материалист Дидро подверг остроумной критике.

Доказательство Даламбера основной теоремы алгебры содержится в упомянутых несколько ранее «Исследованиях по интегральному исчислению» ((1746)1748). Прежде всего Даламбер доказывает следующую теорему I: Пусть TM — некоторая кривая, координаты которой $TP = z$ и $PM = y$ и при $z = 0$, $y = 0$ или $y = \infty$. Тогда для каждого бесконечно малого значения z, положительного или отрицательного, соответствующее

значение y будет действительным числом или же числом вида $p + q\sqrt{-1}$, где p и q — действительные числа.

Даламбер предполагает, что в окрестности точки $z = 0$ переменную y можно выразить сходящимся рядом

$$y = az^{m/n} + bz^{r/s} + cz^{t/h} + \ldots, \tag{5}$$

в котором рациональные показатели m/n, r/s, t/h, ... монотонно возрастают, а коэффициенты a, b, c, ... — действительны. Поскольку z бесконечно мало́, Даламбер отбрасывает в ряде (5) все члены, кроме первого, и показывает, что $az^{m/n}$ есть действительное или комплексное число, в зависимости от того, четен или или нечетен знаменатель степени m/n. При этом Даламбер учитывает отброшенные члены ряда (1), утверждая, что в сумме они дают комплексную или действительную величину, бесконечно малую по отношению к первому члену $az^{m/n}$.

Далее доказаны три следствия. В следствии I утверждается, что если для нашей кривой при некотором действительном значении z_0 соответственное значение y_0 есть комплексное число, то любому z, бесконечно мало отличающемуся от z_0, также соответствует комплексное число. Для доказательства производится параллельный перенос кривой таким образом, чтобы точка (y_0, z_0) попала в начало координат, и все сводится к теореме I. В следствии II Даламбер показывает, что теорема I справедлива не только для бесконечно малого z, но и для некоторого конечного z. Доказательство основывается на представлении, что конечное значение z можно исчерпать бесконечно малыми значениями. В следствии III установлено, что любой действительной абсциссе z нашей кривой соответствует действительная или комплексная ордината y. Пусть действительное число z удовлетворяет уравнению нашей кривой $P(y, z) = 0$ при некотором комплексном y, а z_2 не удовлетворяет этому уравнению, причем $z_2 > z_1$. Рассматривается значение z_0, являющееся максимальным из всех значений z, удовлетворяющих указанному уравнению. Но, по следствию I, все значения z в окрестности z_0 удовлетворяют этому уравнению, т. е. найдется z', для которого $z_0 < z' < z_2$, что противоречит определению числа z_0.

Согласно теореме II, если некоторый многочлен $y^m + ay^{m-1} + by^{m-2} + \ldots + fy + g$ не обращается в нуль ни при каком действительном y, то всегда существует величина $p + q\sqrt{-1}$, которая, будучи подставлена вместо y, обращает многочлен в нуль. Доказательство непосредственно вытекает из следствия III. Действительно, рассмотрим кривую

$$z = P(y) = y^m + ay^{m-1} + \ldots + fy. \tag{6}$$

Каждому действительному значению z соответствует комплексное y, удовлетворяющее уравнению (6). Если положить $z = -g$, мы получим искомое утверждение.

В теореме III Даламбер доказывает, что каждый многочлен с действительными коэффициентами может быть разложен в произведение линейных и квадратичных множителей. Для этого он устанавливает, что если $p + q\sqrt{-1}$ является корнем многочлена, то корнем будет и $p - q\sqrt{-1}$.

К. Ф. Гаусс в докторской диссертации «Новое доказательство теоремы о том, что всякая целая рациональная алгебраическая функция одного переменного может быть разложена на действительные множители первой и второй степени» (Demonstratio nova theorematis omnem functionem

algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse. Helmstadii, 1799) совершенно справедливо отметил нестрогость рассуждений Даламбера, уже неприемлемых для математики начала XIX в. Так, не было обосновано исходное положение о возможности разложения алгебраической функции в сходящийся ряд. Нестрогими являлись также некоторые рассуждения относительно бесконечно малых (например, в следствии II).

Существенным замечанием Гаусса является то, что алгебраическая функция не обязана достигать своих граней, на чем основано следствие III теоремы I Даламбера. Все же критика Гаусса носила несколько односторонний характер: рассуждения, применяемые Даламбером при доказательстве теоремы, могут быть уточнены (ряд таких уточнений был сделан самим Гауссом), и всему доказательству придана форма, строгая даже с современной точки зрения. Однако в результате критики Гаусса (кстати, изложенной не вполне ясно) математики XIX в. утратили интерес к доказательству Даламбера. Оно было забыто, а так называемая «лемма Даламбера», используемая нередко при доказательстве основной теоремы алгебры в современных учебниках, была доказана Ж. Р. Арганом в упоминавшейся выше работе 1806 г. (см. стр. 65) [1].

Доказательство Эйлера

Доказательство Даламбера имело аналитический характер. Почти одновременно Эйлер попытался дать основной теореме чисто алгебраическое доказательство. В настоящее время известно, что этого сделать нельзя, так как для доказательства этой теоремы необходимо пользоваться некоторыми предложениями о непрерывности. Однако эти предложения можно свести к минимуму. Эйлер и сделал это. В 1746 г. он представил Берлинской академии свои «Теоремы о мнимых корнях уравнений» на латинском языке (Theoremata de radicibus aequationum imaginariis), а французский вариант этой работы «Исследования о мнимых корнях уравнений» (Recherches sur les racines imaginaires des équations) напечатал в ее «Записках» за 1749 г. (1751).

Эйлер пользовался только двумя топологическими предложениями (на самом деле достаточно было бы первого из них):

1. Всякое уравнение нечетной степени имеет по крайней мере один действительный корень; если оно имеет несколько действительных корней, то число их нечетно.

Это вытекает из того, что функция $y = P_{2m+1}(x)$, где $P_{2m+1}(x)$ — многочлен степени $2m + 1$, имеет противоположные знаки при больших по абсолютной величине и противоположных по знаку значениях x.

2. Всякое уравнение четной степени, свободный член которого отрицателен, имеет по крайней мере два действительных корня, из которых один положителен, а другой отрицателен.

Это также легко вытекает из рассмотрения поведения функции $y = P_{2m}(x)$ при больших по абсолютной величине значениях x и при $x = 0$.

---

[1] Согласно этой лемме, если какое-либо значение многочлена $f(x_0) \neq 0$, то существует сколь угодно близкое к x_0 значение x_1, при котором $|f(x_1)| < |f(x_0)|$. (Изложение доказательства Даламбера написано С. С. Петровой. — *Ред.*)

В остальном все рассуждения Эйлера чисто алгебраические. Пусть задано уравнение

$$P_n(x) = x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ . \ . \ . + N = 0.$$

Эйлер полагает

$$P_n(x) = (x - \alpha)(x - \beta) \ . \ . \ . \ (x - \nu),$$

где $\alpha, \beta, \ldots, \nu$ — «мнимые величины» в том смысле, который был пояснен выше (см. стр. 57). Перемножая и складывая их по обычным правилам, Эйлер получает:

$$\begin{aligned} &\alpha + \beta + \ . \ . \ . + \nu = -A, \\ &\alpha\beta + \alpha\gamma + \ . \ . \ . + \mu\nu = B, \\ &. \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ , \\ &\alpha\beta \ . \ . \ . \ \nu = (-1)^n N. \end{aligned} \tag{7}$$

Основная теорема алгебры при таком предположении состоит в доказательстве того, что все эти «мнимые величины» имеют вид $a + b\sqrt{-1}$. Такая постановка вопроса, по-видимому, безоговорочно принималась математиками XVIII в. По крайней мере, вслед за Эйлером, ее придерживались Лагранж и Лаплас. Только в самом конце века подверг эту позицию резкой критике Гаусс. В своей упоминавшейся диссертации он писал, что недопустимо предполагать существование каких-то «мнимых величин», отличных от $a + b\sqrt{-1}$, и при этом производить над этими «тенями теней», о которых мы равно ничего не знаем, арифметические действия по тем же правилам, как с обычными числами. В своей второй работе (1815), посвященной доказательству основной теоремы, Гаусс считает, что рассуждения, основанные на предположении о разложимости любого многочлена в произведение линейных множителей, «по крайней мере в том месте, где речь идет о доказательстве такой разложимости, есть не что иное, как „petitio principi"»[1] («постулирование основания», т. е. порочный круг). Интересно отметить, что в этом новом доказательстве Гаусс строго осуществил именно ту редукцию, которая не вполне строго была проведена при доказательстве основной теоремы Эйлера.

Гаусс был прав, обвиняя математиков XVIII в. в нестрогости изложения. Однако он был неправ, когда утверждал, что в доказательстве Эйлера содержался порочный круг. На самом деле, как показало развитие алгебры XIX в., на основную теорему алгебры можно смотреть с двух точек зрения: алгебры и анализа. Согласно второй из них, поле C всех комплексных чисел заранее задано и основная теорема алгебры состоит в доказательстве того, что каждый многочлен $P_n(x)$ с действительными или комплексными коэффициентами имеет корень θ в поле C. Однако, как показал Кронекер, развивая идеи Гаусса, можно не предполагать заранее существования поля C комплексных чисел, а построить поле $Q(\theta)$ над данным полем Q, к которому принадлежат коэффициенты заданного неприводимого многочлена $P_n(x)$, посредством чисто алгебраической конструкции (так называемой конструкции Кронекера). Так можно построить поле разложения данного многочлена, после чего доказывается, что это поле изоморфно некоторому подполю C. Эта конструкция была

[1] *C. F. Gauss.* Werke. Bd. III, Göttingen, 1878, S.40.

применена в весьма завуалированной форме Гауссом в его втором доказательстве основной теоремы, затем Коши для многочлена $P_2(x) = x^2 + 1$ над полем действительных чисел, поле разложения которого совпадает со всем полем комплексных чисел, и, наконец, в самом общем виде Кронекером. Мы видим, что математики XVIII в. придерживались алгебраической точки зрения. С каждым многочленом они связывали поле его разложения, но не могли еще провести построение этого поля с той строгостью, которая стала обязательной в XIX в.

Вернемся к доказательству Эйлера. Поскольку любое уравнение нечетной степени имеет вещественный корень, то достаточно рассмотреть уравнения четной степени. Эйлер сперва рассматривает уравнения $P_{2m}(x) = 0$ при $2m = 2^k$ и представляет многочлен $P_{2^k}(x) = 0$ в виде произведения $P_{2^{k-1}}(x) Q_{2^{k-1}}(x)$ двух многочленов 2^{k-1}-й степени с неопределенными коэффициентами; он утверждает, что коэффициенты многочленов $P_{2^{k-1}}(x)$ и $Q_{2^{k-1}}(x)$, определяемые через коэффициенты многочлена $P_{2^k}(x)$, могут быть выбраны действительными. Эйлер приводит подробное исследование уравнений четвертой степени, при котором пользуется такими глубокими фактами, как то, что рациональная функция от корней уравнения, принимающая при всевозможных перестановках корней ν различных значений, удовлетворяет алгебраическому уравнению ν-й степени с коэффициентами, рационально выражающимися через коэффициенты данного уравнения; и что рациональная функция от корней уравнения, не изменяющаяся ни при каких перестановках корней, рационально выражается через коэффициенты данного уравнения (здесь применяются доказанные Эйлером теоремы о симметрических функциях). Однако обобщение этих результатов на общий случай обосновано недостаточно. Применяя эту теорему несколько раз, многочлен $P_{2^k}(x)$ можно представить в виде произведения многочленов второй степени. В случае произвольного уравнения $P_{2m}(x) = 0$, для которого $2m \neq 2^k$, можно найти такое k, что $2^{k-1} < 2m < 2^k$. и, домножив $P_{2m}(x)$ на произведение $2^k - 2m$ множителей вида $x - \alpha$, мы сведем это уравнение к рассмотренному случаю, откуда и вытекает утверждение основной теоремы алгебры.

Восполнению пробелов доказательства Эйлера была посвящена работа Лагранжа «О видах мнимых корней уравнений» (Sur la forme des racines imaginaires des équations. Nouv. Mém. Ac. Berlin, (1772) 1774). Подход Лагранжа к основной теореме алгебры был тот же, что и у Эйлера.

Наконец, как мы уже упоминали, Гаусс провел в своем втором доказательстве основной теоремы редукцию Эйлера вполне строго, без предположения о существовании «мнимых корней», для чего ему пришлось применить совершенно новую алгебраическую конструкцию, в чистом виде выделенную Кронекером.

Численное решение уравнений и рекуррентные ряды

Новый метод приближенного вычисления корней алгебраических уравнений был разработан Д. Бернулли.

Даниил Бернулли (1700—1782) родился к Гронингене (Голландия), где его отец И. Бернулли работал до 1705 г. Даниил учился математике у отца и старшего брата Николая II (1695—1726); наряду с этим он изучал медицину и в 1721 г. сдал в Базеле установленные экзамены и защитил диссертацию на тему о дыхании. Некоторое время он провел в Италии



Д. Бернулли
(гравюра И. Гайда с портрета работы И. Губера, Государственный Эрмитаж, Ленинград)

с целью усовершенствования во врачебной практике и здесь же в 1724 г. выпустил «Математические этюды» (см. стр. 370), принесшие ему известность. Вскоре он был приглашен вместе с братом Николаем в Петербургскую академию наук, где проработал с осени 1725 г. около восьми лет. По условию Д. Бернулли должен был заняться физиологией и приложением в ней математических методов; начало исследованиям в этом направлении, прежде всего по механике движения животных, положил итальянец Дж. Борелли (1608—1679). Впрочем, физиологии Д. Бернулли уделял некоторое внимание лишь первое время, вообще же занялся механикой, физикой и математикой; в 1728 г. он официально сменил звание академического профессора физиологии на звание профессора математики. Вернувшись в 1733 г. в Базель, он получил в здешнем университете кафедру анатомии и ботаники (другой вакантной не нашлось) и только в 1750 г. перешел на освободившуюся кафедру физики. Петербургская академия сохранила за Д. Бернулли при отъезде звание почетного (иностранного) члена и пожизненную пенсию, и он до конца жизни поддерживал с нею постоянную научную связь, публикуя в ее изданиях подавляющее большинство своих работ. Для прогресса физико-математических наук

имела большое значение его научная переписка, в частности. продолжавшаяся около 40 лет переписка с Эйлером, основное содержание которой постепенно переходило в печатные труды обоих корреспондентов.

В Петербурге Д. Бернулли подготовил большой труд по гидродинамике, содержащий описание многочисленных опытов и теоретическое исследование ряда проблем. В окончательной редакции это классическое сочинение, в котором механика жидкостей и газов впервые выступила как отдельная наука, вышло в Страсбурге в 1738 г. под названием «Гидродинамика или записки о силах и движениях жидкостей» (Hydrodynamica sive de viribus et motibus fluidorum commentarii). Здесь, в частности, выведено известное теперь каждому инженеру-гидравлику «уравнение Бернулли», выражающее зависимость между давлением и скоростью идеальной тяжелой жидкости на данной глубине под поверхностью. Дифференциальных уравнений движения в книге еще нет: их установил в 50-е годы Эйлер. Замысел написать вторую часть труда, содержащую применения гидродинамики к кровообращению и движению воздуха при вдыхании и других жидкостей в организме, осуществлен не был.

Как указывал сам автор, этот трактат по гидродинамике являлся скорее физическим, чем математическим. Вообще среди математиков XVIII в. Д. Бернулли был особенно ярким представителем прикладного направления не только по интересам, но и по стилю мышления. Это отмечали уже современники. В похвальной речи памяти Д. Бернулли, произнесенной непременным секретарем Парижской академии наук Кондорсе (Бернулли был избран ее иностранным членом в 1748 г.), дана следующая характеристика его научного творчества: «...Его вкусы влекли его преимущественно к исследованию вопросов, которые представляют больше трудностей в приведении их к математическому аппарату, чем в решении, когда это приведение уже сделано. В задачах, которыми он занимался, он старался в самой их природе найти средства к их упрощению, к их приведению к простейшей форме, оставляя за вычислениями только то. что от них не может быть отнято» [1]. Именно работая на стыке математики и ее приложений, Д. Бернулли внес новые идеи в математическую физику и связанные с нею отделы анализа, в теорию вероятностей и теорию ошибок. Более абстрактные области математики, как теория чисел, его не привлекали (ср. стр. 37). Научные заслуги Д. Бернулли были по достоинству оценены современниками: он состоял членом не только Петербургской и Парижской академий, но также Берлинской, Лондонского королевского общества и т. д.

Занимаясь некоторыми задачами теории колебаний, приведшими его к открытию цилиндрической функции $y = J_0\,(2\sqrt{x/n})$ в форме бесконечного ряда

$$y = 1 - \frac{x}{n} + \frac{xx}{4n\cdot n} - \frac{x^3}{4\cdot 9n^3} + \frac{x^4}{4\cdot 9\cdot 16n^4} - \ . \ \ . \ \ . \ ,$$

Д. Бернулли отметил, что уравнение $y = 0$ имеет бесконечно много действительных корней, и приближенно вычислил значения двух первых с помощью открытого им тогда же метода (Commentarii, (1732—1733) 1738).

---

[1] Цит. по статье *В. И. Смирнова* «Даниил Бернулли» в книге. *Д. Бернулли.* Гидродинамика или записки о силах и движениях жидкостей. Перевод В. С. Гохмана. Комментарии и редакция А. И. Некрасова и К. К. Баумгарта. М., Изд-во АН СССР, 1959, стр. 455.

Самый метод он изложил для случая уравнений конечной степени в «Замечаниях о рекуррентных последовательностях» (Observationes de seriebus recurrentibus, Commentarii, (1728) 1732).

Последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называется рекуррентной, т. е. возвратной, если ее общий член a_n линейно выражается через определенное число предыдущих членов рекуррентной формулой

$$a_n = m_1 a_{n-1} + m_2 a_{n-2} + \ldots + m_k a_{n-k}.$$

Рекуррентными называются и степенные ряды, коэффициенты которых образуют такую последовательность. Мы привели определение, которое почти не отличается от данного в статье, посвященной разложению рациональных дробей и напечатанной в «Philosophical Transactions» за 1722 г. (1724), а затем в «Аналитических этюдах» (1730) Муавром, который, впрочем, как и другие математики XVIII в., не имел отдельных терминов для последовательностей и рядов и называл те и другие по-латыни одинаково — series recurrentes; нашу рекуррентную формулу он именовал «индексом или шкалой отношения» (1730). К рекуррентным рядам Муавр пришел в ходе решения одной задачи теории вероятностей и некоторые сведения о них привел уже в «Учении о случаях» (1718; см. стр. 128): например, то, что рекуррентными являются арифметические последовательности любого порядка n, для которых равны нулю все $(n+1)$-е разности.

Другим давно известным примером рекуррентной последовательности является геометрическая прогрессия, $a_n = qa_{n-1}$. К тому же типу относится и последовательность чисел Фибоначчи (см. т. I, стр. 262), общий член которой есть $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Еще Кеплер заметил, что отношение a_n/a_{n-1} членов этой последовательности стремится к корню $(\sqrt{5}+1)/2$ квадратного уравнения $x^2 - x - 1 = 0$; эта же последовательность применялась к решению квадратных уравнений также Николаем I Бернулли.

Более подробное изложение теории рекуррентных рядов Муавр дал в «Аналитических этюдах». Здесь на примерах бесконечных рядов с двух- и трехчленной шкалой отношения он показал, как вычислять их суммы, являющиеся (если ряд сходится) рациональными функциями; Стирлинг, который также изучал рекуррентные ряды (1730), даже называл их рядами, возникающими при делении,— именно делении друг на друга целых рациональных функций. Сумму конечного числа начальных членов Муавр находил как разность суммы двух бесконечных рядов. Большее внимание он уделил определению произвольного члена a_n по k-членной шкале отношений и k начальным членам. С бесконечными рядами Муавр в «Аналитических этюдах» оперировал формально, не касаясь проблем сходимости и законности производимых действий. В более ранней переписке 1714 г. он предполагал, говоря о суммировании бесконечных рядов, что члены их постоянно убывают (чего, впрочем, для сходимости недостаточно). Примерно тот же круг сведений о рекуррентных рядах, со ссылкой на Муавра, изложил в 13-й главе первого тома «Введения в анализ бесконечных» (1748) Эйлер. О связях теории рекуррентных рядов с исчислением конечных разностей мы еще расскажем в четвертой главе.

Численный метод решения алгебраических уравнений, предложенный Д. Бернулли, состоит в том, что уравнение сначала приводится к виду

$$1 = ax + bx^2 + cx^3 + \ldots + px^\nu.$$

Далее берутся ν произвольных чисел $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$, с помощью которых

для $n = \nu + 1, \nu + 2, \ldots$ последовательно находятся числа

$$A_n = aA_{n-1} + bA_{n-2} + \ . \ . \ . + mA_{n-\nu+1} + pA_{n-\nu}$$

Тогда при достаточно большом n отношение A_{n-1}/A_n приближенно равно корню уравнения, ближайшему к нулю. Для простоты можно взять $A_1 = A_2 = \ldots = A_\nu = 1$. Применение того же процесса к уравнению, записанному в виде

$$x^\nu = ax^{\nu-1} + bx^{\nu-2} + \ . \ . \ . + mx + p,$$

дает приближенное значение корня уравнения, наиболее удаленного от нуля. Отношение A_{n-1}/A_n не всегда стремится к определенному пределу при $n \to \infty$, так что метод применим не всегда, как например, при наличии двух действительных корней $x_1 = -x_2$. В последнем случае, впрочем, можно предварительно сделать замену $x = y + \alpha$. В записках Петербургской академии за 1730—1731 гг. (опубл. 1738) Д. Бернулли приложил свой метод и к отысканию нулей функций, заданных «бесконечно продолжающимися уравнениями», т. е. степенными рядами. Мы не можем здесь остановиться на зависимости между методом Д. Бернулли и приближенным методом, основанным на применении степенных сумм корней (ср. стр. 82).

Метод Д. Бернулли был предложен им без доказательства; исследованию этого метода посвящена 17-я глава первого тома «Введения в анализ бесконечных» Эйлера, где выясняются и условия применения метода при наличии двух действительных корней, отличающихся лишь знаком, тех или иных кратных действительных корней, некоторых мнимых корней и т. д.

Другие численные методы; отделение корней

Метод Д. Бернулли имеет более теоретический интерес, чем практическое значение.

Эйлер в «Дифференциальном исчислении» (1755) предложил способ определения границ корней алгебраических уравнений, в сущности приводящий к методу Ролля (см. т. II, стр. 46), но распространяющийся и на мнимые корни. В основе этого метода лежит использование расположения максимумов и минимумов парабол n-го порядка (для $n = 3$ и 4 этот метод был предложен в 1741 г. Дж. Стирлингом и Ж. П. Гюа де Мальвом). Установлением границ корней алгебраических уравнений занимался также крупнейший английский математик второй половины XVIII в. Эдвард Варинг[1] (1734—1798), блестяще окончивший Кембриджский университет в 1757 г. и уже в 1760 г. получивший в нем Люкасовскую кафедру, которую в свое время занимали Барроу и затем Ньютон. Варинга высоко ценили на родине, и он был избран в 1767 г. членом Лондонского королевского общества, но на континенте его труды были мало известны, так что некоторые его открытия были повторены, как это случилось, например, с интерполяционной формулой, получившей имя Лагранжа (см. стр. 230). Вклад Варинга в математику был бы значительнее, если бы он не увлекся надолго медициной и практической врачебной работой в Кембриджской больнице, которую оставил только из-за плохого зрения. Основные заслуги Варинга относятся к алгебре и теории чисел, и многие ре-

---

[1] Правильное произношение: Уэ́ринг.



Э. Варинг
(с портрета, хранящегося в Ашмолеанском музее, Оксфорд)

зультаты он изложил уже в «Аналитических этюдах об алгебраических уравнениях и свойствах кривых», подготовленных к 1760 г., но изданных несколько позднее (Miscellanea analytica de aequationibus algebraicis et curvarum proprietatibus. Cantabrigiae, 1762). Этот труд был впоследствии переработан, дополнен и разделен на два: «Алгебраические размышления» (Meditationes algebraicae. Ed. 1. Cantabrigiae, 1770) и «Свойства алгебраических кривых» (Proprietates algebraicarum curvarum. Cantabrigiae, 1772; см. стр. 172).

Варинг развил далее теорию симметрических функций корней алгебраических уравнений. Он явно выразил степенные суммы S_n через коэффициенты и обратно («формулы Варинга»). Напомним, что выражения для S_1, S_2, S_3, S_4 нашел еще Жирар (1629), а Ньютон (опубл. 1707) открыл рекуррентное соотношение между S_n, S_{n-1}, . . ., S_1 (см. II, стр. 25 и 46). Далее, Варинг дал метод выражения любой целой рациональной симметрической функции через степенные суммы и через элементарные симметрические функции, т. е. коэффициенты. Этот метод вновь нашел Гаусс (1815), полностью доказавший теорему о том, что целая рациональная симметрическая функция есть целая рациональная функция коэффициентов. Наконец, симметрические функции Варинг использовал для нахождения

уравнений, корни которых выражаются определенным образом через корни данного.

В частности, уравнение, корни которого обратны разностям корней данного уравнения, дало Варингу средства установления границ действительных корней данного уравнения (1762). Для отделения корней исходного уравнения Варинг использовал также уравнение, корни которого суть квадраты разностей корней данного, он указал также некоторые условия существования мнимых корней уравнений третьей, четвертой и пятой степеней. Несколько позднее и независимо уравнение в квадратах разностей было применено в тех же целях Лагранжем, который посвятил отделению действительных и мнимых корней ряд статей (Mém. Ac. Berlin, (1767) 1769 и (1768) 1770); Nouv. Mém. Ac. Berlin, (1777) 1779).

В «Аналитических этюдах» (1762) Варинг предложил идею приближенного метода, в некотором смысле восходящую ко «Всеобщей арифметике» (1707) Ньютона, где изложен прием вычисления наибольшего по абсолютной величине корня уравнения с действительными корнями как предела последовательности $\sqrt[2n]{S_{2n}}$ при $n \to \infty$. Прием Варинга, правда, лишь намеченный, заключается в следующем. Для данного уравнения $x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m = 0$ с действительными различными корнями $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, расположенными в порядке убывания их абсолютных величин, строится уравнение $y^m + A_1y^{m-1} + \ldots + A_m = 0$ с корнями $\beta_1 = \alpha_1^k, \ \beta_2 = \alpha_2^k, \ \ldots, \beta_m = \alpha_m^k$. При достаточно большом четном k каждое из чисел $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ весьма велико по сравнению со всеми, за ним следующими, так что равенство $\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_m = -A_1$ можно заменить приближенным равенством $\beta_1 = \alpha_1^k = -A_1$. Аналогично находятся $\beta_2, \beta_3, \ldots$ с помощью других элементарных симметричных функций. Эта идея была впоследствии успешно разработана, независимо друг от друга, бельгийцем Ж. П. Данделеном в 1826 г., Н. И. Лобачевским в 1834 г. и особенно подробно швейцарцем К. Г. Греффе в 1837 г.; все они брали $k = 2^n$. Метод, иногда называемый по имени Греффе, применим к вычислению всех комплексных корней без предварительного отделения.

Два оригинальных метода приближенного решения алгебраических уравнений были предложены И. Г. Ламбертом, причем один из них специально для трехчленных уравнений вида $x^m + px = q$ (Acta Helvetica, 1758). Не останавливаясь ни на этих методах, ни на их развитии в ряде работ Эйлера, мы скажем несколько слов только о примыкающих исследованиях Лагранжа, получившего результат гораздо более общего характера, изложенный прежде всего в «Новом методе решения буквенных уравнений посредством рядов» (Nouvelle méthode pour résoudre les équations littéraires par le moyen des séries. Mém. Ac. Berlin, (1768)1770). Здесь приведена формула Лагранжа для обращения функций, которую мы приведем в той общей форме, как она записана в XV главе I части его «Теории аналитических функций» (1797; см. стр. 285): если $z = x + yfz$, то

$$\varphi z = \varphi x + y\varphi' xfx + \frac{y^2}{2}(\varphi' xfx^2)' + \frac{y^3}{2\cdot 3}(\varphi' xfx^3)'' + \text{ и т.д.},$$

где φx означает $\varphi(x)$, fx^2 означает $f^2(x)$ и т. п. В следующем томе записок Берлинской академии за 1769 г. (1771) Лагранж дал с помощью этой формулы приближенное решение трансцендентного уравнения Кеп-

лера $x = t - e \sin x$ (ср. т. I, стр. 236). Первые доказательства формулы опубликовали Кондорсе (Miscell. Taurinensia, (1770—1773)) и Лаплас (Mém. Ac. Paris, (1777)1780), после чего ее по-разному вывели Г. А. Роте (1795), И. Ф. Пфафф (1795) и сам Лагранж. Доказательства Лагранжа содержатся в его труде «О решении числовых уравнений всех степеней» (De la résolution des équations numériques de tous les degrés. Paris, год VI, т.е. 1798), в котором он объединил и дополнил свои исследования по этому вопросу, а также в «Теории аналитических функций» (1797).

В мемуаре «О решении числовых уравнений» (Sur la résolution des équations numériques. Mém. Ac. Berlin, (1767)1769) Лагранж предложил метод приближенного решения алгебраических уравнений с помощью непрерывных дробей. Если корень x заключен в пределах $p < x < p + 1$ и если подставить в уравнение $x = p + \frac{1}{y}$, получится уравнение той же степени относительно y. Поскольку $1 > \frac{1}{y} > 0$, новое уравнение имеет корень, больший единицы. Если целая часть приближенного значения y равна q, то полагаем $y = q + \frac{1}{r}$ и т. д., так что

$$x = p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r + \ldots}}.$$

Корень x рационален, если эта непрерывная дробь обрывается, и иррационален, если дробь бесконечна. В добавлении к этому мемуару, напечатанном в «Mém. Ac. Berlin» за 1768 г. (1770), Лагранж показал, что для корней квадратного уравнения эти дроби периодичны (ср. стр. 47).

Ж. Р. Муррайль, секретарь отделения наук Академии в Марселе, впоследствии мэр этого города, в «Трактате о решении любых уравнений» (Traité de la résolution des équations en général. Marseille, 1768) подробно разобрал метод Ньютона (см. т. II, стр. 47—48) и показал, как можно устранить некоторые его недостатки. Сочинение Муррайля не получило известности, и метод Ньютона был позднее вновь подвергнут критическому разбору Лагранжем в его трактате 1797 г., а также Ж. Б. Фурье, который примерно в это же время открыл носящую его имя теорему о числе действительных корней между двумя данными пределами. Фурье опубликовал свои результаты в 1820 г., но излагал их на лекциях в Политехнической школе с 1796 г. Аналогичные результаты были найдены в начале XIX в. врачом Ф. Бюданом, опубликовавшим их в 1822 г. Результаты Фурье были перекрыты работавшим в Париже швейцарцем Ж. Ш. Штурмом[1] в 1829 г., а теорема Штурма об отделении корней была обобщена на случай комплексных корней О. Коши (1831).

Отметим также, что П. Руффини в премированном Итальянским научным обществом сочинении «Об определении корней численных уравнений любой степени» (Sopra la determinazione delle radici nelle equazioni numeriche di qualunque grado, Modena, 1804) и У. Горнер (Philos. Trans., 1819) предложили способ приближенного решения алгебраических уравнений при помощи схемы, часто называемой «схемой Горнера» или «схемой Руффини — Горнера». Этот способ по идее совпадает с методом тянь-юань, применявшимся в средневековом Китае (см. т. I, стр. 171).

[1] Правильное произношение: Стюрм.

Решение алгебраических уравнений в радикалах

Одной из основных проблем алгебры XVIII в. была проблема решения уравнений «в радикалах». Эта проблема имеет два аспекта: общеалгебраический (функциональный) и арифметический (числовой). В первом случае изучается уравнение с буквенными коэффициентами

$$f_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ . \ . \ . + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

т. е. многочлен $f_n(x)$ по существу рассматривается над полем рациональных функций от n переменных $Q(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и ищутся формулы, выражающие корни этого уравнения через его коэффициенты с помощью рациональных операций и радикалов. В древности были найдены такие формулы для $n = 2$, а в XVI в. для $n = 3, 4$. Все попытки получить аналогичными методами решение общих уравнений высших степеней, предпринимавшиеся в XVII и XVIII вв., окончились неудачей.

С развитием алгебраического направления были связаны создание буквенного исчисления, формальное введение мнимых чисел, изучение различных подстановок и открытие симметрических функций.

При арифметическом аспекте рассматривается уравнение с заданными числовыми коэффициентами и исследуется вопрос о разрешимости его «в радикалах» над заданной областью рациональности Q. С самого начала это направление оказалось связанным с изучением числовых полей и их подполей и с определением общего вида целых чисел этих полей. Этот аспект привлек внимание ученых, когда общеалгебраические методы оказались бессильными при попытках решить уравнение пятой степени.

Арифметические вопросы, как всегда, труднее алгебраических. Проиллюстрируем это следующим примером: известно, что уравнение $f_n(x) = 0$ с буквенными коэффициентами имеет над полем $Q(a_1, \ldots, a_n)$ в качестве группы перестановок корней всю симметрическую группу S_n. Между тем построение уравнения с числовыми коэффициентами, имеющего симметрическую группу, представляет отнюдь не легкую задачу. Способ построения таких уравнений при любом n был предложен лишь в 1892 г. Д. Гильбертом.

Интерес исследователей обращался то к алгебраической, то к арифметической стороне вопроса, причем идеи и методы, возникавшие при решении одного рода проблем, помогали при изучении других.

Во «Всеобщей арифметике» (1707) Ньютон поставил задачу, которую, несколько модернизируя, можно сформулировать так: пусть дано уравнение $f_{2m}(x) = 0$ степени $2m$ с целыми рациональными коэффициентами и коэффициентом единица при старшем члене, неприводимое над Q. Требуется узнать, существует ли такое целое D, что над полем $Q(\sqrt{D})$ многочлен $f_{2m}(x)$ распадается в произведение двух множителей степени m:

$$f_{2m}(x) = \varphi_m(x)\,\psi_m(x).$$

Если такое разложение существует, то требуется найти число D и коэффициенты многочленов $\varphi_m(x)$ и $\psi_m(x)$.

Вопрос, поставленный Ньютоном, решается теперь с помощью теории Галуа: для существования искомого разложения необходимо и достаточно, чтобы группа заданного уравнения имела подгруппу индекса два, которая в свою очередь содержала бы подгруппу подстановок, оставляющих инвариантным один из корней.

Первый критерий для решения этого вопроса был дан Ньютоном. Критерий Ньютона — это алгоритм, который позволяет с помощью конечного числа проб либо найти такое число D, что $f_{2m}(x)$ распадается на множители над $Q(\sqrt{D})$, либо установить, что такого числа не существует. Этот же алгоритм дает способ вычисления коэффициентов многочленов $\varphi_m(x)$ и $\psi_m(x)$.

Хотя Ньютон и не дал никаких доказательств, можно без труда восстановить способ, которым был получен его алгоритм: Ньютон представлял заданный многочлен в виде произведения двух многочленов с неопределенными коэффициентами вида $a + b\sqrt{D}$, а затем, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях неизвестной и привлекая теоретико-числовые рассмотрения (а именно вопросы делимости), получал нужные ему условия.

Заметим, что коэффициенты многочленов $\varphi_m(x)$ и $\psi_m(x)$ на основании одной теоремы Гаусса будут целыми числами поля $Q(\sqrt{D})$. Из алгоритма Ньютона следует, что если $D = 4k + 3$, то коэффициенты будут иметь вид $a + b\sqrt{D}$, где a и b — целые рациональные. Если же $D = 4k + 1$, то $a = a_1/2$, $b = b_1/2$, где a_1 и b_1 — целые числа одной четности. Таким образом, Ньютон первый нашел общий вид целых чисел действительных квадратичных полей.

Еще в середине прошлого века вопрос об общем виде целых чисел алгебраических полей был далеко не ясен. Долгое время понятие целого переносили только на числа вида

$$b_0 + b_1\theta + b_2\theta^2 + \ldots + b_n\theta^{n-1},$$

где b_i — целые рациональные, а θ — корень неприводимого над Q уравнения степени n с целыми коэффициентами и коэффициентом единица при старшем члене. Только исследования Р. Дедекинда и Е. И. Золотарева показали, что такое определение недостаточно.

Ньютон знал больше, чем счел нужным изложить. Так, он пишет, что мог бы «присоединить изложение приведения уравнения при помощи извлечения иррационального кубического корня» [1]. Эти слова показывают, что он нашел и общий вид целых чисел поля $Q(\sqrt[3]{D})$. Последняя задача намного труднее предыдущей: вид целых чисел кубического поля зависит от того, как раскладывается число 3 в произведение простых идеалов. То, что Ньютон сумел справиться с проблемой, не имея в своем распоряжении теории идеалов или какого-нибудь ее эквивалента, открывает нам еще одну сторону его удивительного гения: это был не только великий физик и аналист, но и великий исследователь науки о числах.

Некоторыми пояснениями алгоритм Ньютона был снабжен в «Алгебре» Маклорена (1748), однако там ему не придается большого значения: исследования не проводятся до конца и не делается попытка обобщить их. Варинг, по-видимому, первый оценил алгоритм Ньютона. В «Алгебраических размышлениях» (1770) он продолжил исследования Ньютона и пытался применить его методы для решения тех же проблем, которые являются центральными в теории Гаусса,— например, вопроса о том, в каких случаях корень заданного уравнения выражается через иррациональности определенного вида (через одни только квадратные радикалы или через квадратные и кубические). Однако оперирование «прямыми

[1] *И. Ньютон.* Всеобщая арифметика. М., Изд-во АН СССР, 1948, стр. 289.

методами» Ньютона оказалось слишком сложным. Сам Варинг ошибся при определении общего вида целых чисел биквадратичного поля. После него, насколько мы знаем, эти методы были оставлены.

Общеалгебраическая точка зрения была развита в двух работах Эйлера. В «Предположении о виде корней уравнений любого порядка» (De formis radicum aequationum cujusque ordinis conjectatio. Commentarii, (1732—33)1738) Эйлер указывал, что решение уравнений второй, третьей и четвертой степеней сводится соответственно к решению уравнений первой, второй и третьей степеней, которые он называл «разрешающими уравнениями» (aequatio resolvens — отсюда современный термин «резольвента»). Эйлер получил резольвенту кубического уравнения

$$x^3 = ax + b$$

с помощью подстановки

$$x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B},$$

а уравнения четвертой степени

$$x^4 = ax^2 + bx + c$$

с помощью подстановок

$$x = \sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C} \quad \text{или} \quad x = \sqrt[4]{E} + \sqrt[4]{F} + \sqrt[4]{G}$$

и тем самым открыл новый способ решения уравнения четвертой степени. Это дало основание предположить, что и в общем случае уравнение

$$x^n = ax^{n-2} + bx^{n-3} + \ldots + g$$

может быть решено с помощью подстановки

$$x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} + \ldots + \sqrt[n]{G},$$

где число слагаемых есть $n-1$.

Однако при $n = 5$ Эйлеру удалось найти решение в радикалах только для случая возвратных уравнений, которые незадолго до него изучал Муавр (см. стр. 59), установивший, что возвратное уравнение четной степени $2n$ приводится к уравнению степени n (он использовал это свойство для $n = 6$ и 8) и что в случае нечетной степени оно делением на $x + 1$ приводится к возвратному же уравнению.

В работе «О решении уравнений любой степени» (De resolutione aequationum cujusvis gradus. Novi Commentarii, (1762—63)1764) Эйлер заменил указанную подстановку новой подстановкой

$$x = w + A\sqrt[n]{v} + B\sqrt[n]{v^2} + C\sqrt[n]{v^3} + \ldots + Q\sqrt[n]{v^{n-1}}.$$

Эйлер снова уверен, что на этом пути можно найти решение любых алгебраических уравнений в радикалах, но фактически он решил таким образом только уравнения третьей и четвертой степеней и отдельные виды уравнений пятой' степени, допускающие решение вида

$$x = w + A\sqrt[5]{v} + B\sqrt[5]{v^2} + C\sqrt[5]{v^3} + D\sqrt[5]{v^4}.$$

Сходными путями шел Варинг. В «Аналитических этюдах» (1762) он применил к уравнению четвертой степени ту же подстановку, что и Эйлер

тридцатью годами ранее, а относительно уравнения пятой степени заметил, что с помощью подстановки вида $x = \sqrt[5]{\alpha} + \sqrt[5]{\beta} + \sqrt[5]{\gamma} + \sqrt[5]{\delta}$ оно не решается. Варинг пытался использовать и другое представление корней уравнений высших степеней в радикалах, которое, как мы только что видели, одновременно предложил Эйлер, но ограничился его приложением к решению кубического уравнения.

Впоследствии оказалось, что, если уравнение пятой степени разрешимо в радикалах, его корень представляется именно в указанном Эйлером виде, и норвежский ученый Нильс Хендрик Абель в своем доказательстве невозможности решения в радикалах уравнения пятой степени общего вида исходил именно из этого выражения.

Уверенность Эйлера в том, что всякое алгебраическое уравнение допускает решение в радикалах, лежала в основе еще одного доказательства основной теоремы алгебры, предложенного Эйлером в упоминавшихся «Исследованиях о мнимых корнях уравнений» (1749; стр. 74). Основываясь на том, что в силу формулы Муавра следует, что каждый радикал имеет конечное число значений вида $M + N\sqrt{-1}$, Эйлер писал: «Итак, вот новое доказательство общей теоремы, которую я поставил себе целью здесь доказать и против которого нельзя ничего возразить, кроме того, что мы не знаем, как выражены корни уравнения степени выше 4-й. Но это возражение не будет иметь никакой силы, если только согласятся со мной, что выражения для корней не содержат никаких других операций, кроме извлечения корней, не считая четырех обычных операций, а ведь никто не будет утверждать, что туда будут примешаны трансцендентные операции»[1].

Исследования Эйлера были продолжены Этьеном Безу. В статье «О многих классах уравнений всех степеней, допускающих алгебраическое решение» (Sur plusieurs classes d'équations de tous les degrés qui admettent une solution algébrique, Mém. Ac. Paris, (1762)1764) Безу исходил из того, что всякое двучленное уравнение $x^n - a = 0$ разрешимо в радикалах; действительно, одним из корней такого уравнения является арифметический корень α n-й степени из a, однако остальные корни этого уравнения в силу формулы Муавра можно записать в виде

$$x_k = \alpha\left(\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}\right),$$

где $\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}$ — корни уравнения

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-1} = 0,$$

которые Безу еще не умел выражать с помощью радикалов. Считая последние уравнения разрешимыми в радикалах, Безу стремился, подобно Э. В. Чирнгаузу (см. т. II, стр. 51), найти подстановки, переводящие данные уравнения в двучленные, и тем самым выделить классы уравнений, разрешимых в радикалах. В работе «Об общем решении уравнений всех степеней» (Sur la résolution générale des équations de tous les degrés, Mém. Ac. Paris, (1765 (1768) Безу продолжил свои изыскания, причем убедился, что резольвента уравнения степени n имеет степень $2 \cdot 3 \ldots (n - 1)$, и

---

[1] *L. Euler.* Opera omnia, series I, t. 6, p. 120.

привести ее к степени ниже n ему удалось, естественно, только при $n < 5$, а уравнения для определения коэффициентов преобразований при $n = 5$ он нашел прямо отпугивающими. Более полные результаты о степени резольвент вскоре получил Лагранж (см. стр. 90). Мы уже говорили. что в ходе этих занятий Безу пришел к проблеме исключения неизвестных (см. стр. 67).

Шведский любитель математики, профессор истории в Лундском университете Эрланд Самуэль Бринг (1736—1798), используя преобразование Чирнгауза, коэффициенты которого определяются из уравнения не выше третьей степени, привел общее уравнение пятой степени к трехчленному $x^5 + px + q = 0$ («Математические опыты о преобразовании алгебраических уравнений» — Meletemata quaedam mathematica circa transformationem aequationum algebraicarum, Lundae, 1786). Неизвестно, считал ли Бринг возможным сведение к двучленному уравнению. Его открытие не вызвало в свое время интереса, и в 1834 г. оно было повторено англичанином Дж. Джеррардом. Большое значение преобразования Бринга — Джеррарда выяснилось после того, как Ш. Эрмит использовал указанную трехчленную форму для решения уравнений пятой степени в эллиптических модулярных функциях (1858), положив тем самым начало новым методам изучения и решения уравнений высших степеней с помощью трансцендентных функций.

Изучением резольвент занимался в своих «Аналитических этюдах» (1762) и Варинг, который для уравнений четвертой степени выразил корни его кубических резольвент как трехзначные рациональные функции корней данного уравнения. Вскоре затем многозначные рациональные функции корней гораздо шире и успешнее применил Лагранж.

Ж. Л. Лагранж

Поворотным пунктом в истории проблемы решения уравнений в радикалах явились исследования Лагранжа. Жозеф Луи Лагранж (1736—1813), правнук французского офицера, поступившего на службу в армию сардинского короля, родился в Турине, где отец его был казначеем Управления промышленностью и укреплениями. Юношей Лагранж заинтересовался математикой и уже в 17 лет мог без чьей-либо помощи изучать сочинения Ньютона и Лейбница, братьев Бернулли и Эйлера, а в 20 лет начал преподавать математику в туринской Королевской артиллерийской школе. В 1757 г. он, вместе с несколькими другими молодыми людьми, организовал частное научное общество, ставшее затем Туринской академией наук, и принял деятельное участие в подготовке сборников, обыкновенно коротко называемых «Miscellanea Taurinensia» [1]. В этих сборниках появились труды Лагранжа по вариационному исчислению, механике твердых и жидких тел, о распространении звука и др. Когда Лагранжу было всего 18 лет, он вступил в переписку с Эйлером, и последний сразу высоко оценил новый алгоритм варьирования, изложенный ему юным ученым в пись-

[1] Первый том (1759) назывался «Философско-математические сборники частного Туринского общества» (Miscellanea philosophica mathematica Societatis privatae Taurinensis; во втором — пятом томах (1760/1761—1773) название было заменено на французское и слова «частное общество» — на «Королевское общество» (Mélanges de philosophie et de mathématiques de la Société royale de Turin); с шестого тома (1784) издавались «Mémoires de l'Académie royale des sciences de Turin».



Ж.-Л. Лагранж
(с рисунка Бозио)

ме от 12 августа 1755 г. (см. десятую главу). В 1759 г. Лагранж по предложению Эйлера был избран иностранным членом Берлинской академии; в 1766 г. он по рекомендации Даламбера и Эйлера, решившего вернуться в Петербург, был приглашен на пост директора математического класса, который до того занимал сам Эйлер. На годы жизни Лагранжа в Берлине приходятся многие его работы по алгебре, теории чисел, дифференциальным уравнениям и механике. В 1772 г. он был избран иностранным членом Парижской академии наук и в 1776 г.— Петербургской.

В 1787 г. Лагранж переехал в Париж, где перед ним, в условиях Французской революции и в тесном общении с блестящей плеядой парижских ученых, раскрылись новые перспективы деятельности. Еще в Берлине Лагранж начал испытывать некоторое разочарование в математике; ему казалось, что идейный запас ее в главном исчерпан, и в этом можно усмотреть предчувствие глубоких перемен, наступивших в XIX в. Лагранж ожидал теперь большего от физики и химии, которые все сильнее привлекали ученых. Знаменитая «Аналитическая механика» Лагранжа, издан-

ная в 1788 г., с помощью А. М. Лежандра, два года пролежала на столе автора нераскрытой. Вскоре, однако, Лагранж вновь проявил блеск своего математического гения. Из курса анализа, читанного им в Политехнической школе, возникли «Теория аналитических функций» (1797) и «Лекции об исчислении функций» (1801), содержащие замечательный опыт новой системы математического анализа (см. стр. 285). В Нормальной школе он вел курс элементарной математики и отчасти в связи с этим издал несколько сочинений по алгебре. О его участии в комиссии по введению десятичных мер упоминалось ранее.

Лагранж принадлежал к лучшим математикам XVIII в., уступая лишь Эйлеру по количеству областей исследований и разнообразию решенных задач; впрочем, размах интересов Лагранжа был также громадным. Особенно характерным для Лагранжа, в сравнении с ближайшими предшественниками и современниками, было создание широких теоретических концепций, связывающих в единое целое множество отдельных задач, предложений и приемов. После Ньютона и Лейбница, осуществивших первые синтезы инфинитезимальных методов (Ньютон — также механики), был собран и систематизирован гигантский новый материал, нуждавшийся в дальнейшем обобщении, и это касалось не только дифференциального и интегрального исчисления, но и других старых и новых математических наук. Конечно, поисками общих алгоритмов, методов и концепций занимались и другие математики, в первую очередь Эйлер, но в XVIII в. лишь у Лагранжа такие поиски становятся основным направлением творчества, да и манеры мышления. Аналогом его математических и механических конструкций могут служить развитые в ту эпоху философские, философско-исторические и иные идеологические системы. С этим было связано особое «совершенство аналитического стиля» Лагранжа (мы привели в кавычках слова о нем Ж. Б. Фурье), особая изящность, сжатость и вместе с тем общность изложения, которые стали отличительными для языка французской математической школы.

Обрисованные особенности творчества Лагранжа нашли яркое выражение в его трудах по вариационному исчислению, аналитической механике, теории аналитических функций, а также и по алгебре.

В своих «Размышлениях об алгебраическом решении уравнений» (Réflexions sur la résolution algébrique des équations, Nouv. Mém. Ac. Berlin, (1770)1771, (1772)1773) Лагранж подверг критическому пересмотру все существовавшие до него способы решения уравнений первых четырех степеней с тем, чтобы выяснить, почему ни один из этих способов не годится для уравнений пятой степени, и найти общие приемы решения уравнений всех степеней.

Подход Лагранжа был чисто алгебраическим. Он рассматривал уравнения

$$x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

с произвольными буквенными коэффициентами, т. е., по существу, рассматривал вопрос об их решении над полем рациональных функций от коэффициентов уравнения: $Q(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Лагранж показал, что все существовавшие методы решения уравнений в радикалах сводились к нахождению рациональных функций корней $x_1, x_2, \ldots, x_n$ уравнений, которые принимали бы при всевозможных перестановках корней $k < n$ различных значений. В общем случае функция $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ принимает $N = n!$ значений, однако всегда можно найти

такие функции $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, для которых некоторые из этих значений будут совпадать. Например, функция

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i>j} (x_i - x_j)$$

принимает только два различных значения: φ и $-\varphi$.

Опираясь на теорему о симметрических функциях, согласно которой рациональные функции корней, не изменяющиеся ни при каких перестановках корней (они называются симметрическими функциями), выражаются рационально через элементарные симмметрические функции, т. е. через коэффициенты исходного уравнения, Лагранж выводит следующее важное предложение.

Если $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ принимает при всех перестановках корней ровно k значений, то она удовлетворяет уравнению степени k

$$\Phi(y) = (y - \varphi_1)(y - \varphi_2) \ldots (y - \varphi_k) = 0$$

или

$$\Phi(y) = y^k - (\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots \varphi_k) y^{k-1} + \ldots + (-1)^k \varphi_1 \ldots \varphi_k = 0.$$

Коэффициенты этого уравнения не меняются ни при каких перестановках $x_1, x_2, \ldots, x_n$, поэтому они выражаются рационально через $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Проиллюстрируем применение этого предложения на примере решения уравнения третьей степени. Пусть x_1, x_2, x_3 — корни уравнения

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

Тогда, следуя Лагранжу, составим выражение

$$t = x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3,$$

где $\alpha^3 = 1$, $\alpha \neq 1$. Легко видеть, что функция $\theta = t^3$ принимает при всевозможных перестановках корней два различных значения:

$$\theta_1 = (x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3)^3 \text{ и } \theta_2 = (x_1 + \alpha^2 x_2 + \alpha x_3)^3,$$

поэтому она является корнем квадратного уравнения

$$\theta^2 + p\theta + q = 0,$$

коэффициенты которого рационально выражаются через a, b, c. Найдя по обычным формулам корни этого уравнения θ_1 и θ_2, мы определим x_1, x_2, x_3 из системы:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a,$$
$$x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3 = \sqrt[3]{\theta_1},$$
$$x_1 + \alpha^2 x_2 + \alpha x_3 = \sqrt[3]{\theta_2}.$$

В результате глубокого анализа проблемы Лагранж пришел к следующим основным выводам, которые положили начало будущей теории Галуа.

1. Вопрос о решении уравнений в радикалах сводится к рассмотрению группы подстановок корней уравнения и ее подгрупп. При этом, однако, Лагранж не вводил понятий группы и подгруппы, но широко пользовался подстановками. Подстановкой называется преобразование, переводящее

корни $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в другую последовательность тех же корней $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_n}$. Для подстановки приняты теперь обозначения

$$\sigma = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_{k_1} & x_{k_2} & \ldots & x_{k_n} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_n \end{pmatrix}.$$

Произведением двух подстановок σ и τ называется подстановка ρ, равносильная последовательному выполнению подстановок τ и σ. Роль единицы играет тождественная подстановка $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}$, переводящая каждый корень в себя. Каждая подстановка $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_n \end{pmatrix}$ обладает обратной подстановкой $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \ldots & k_n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}$. Группа всех подстановок n элементов называется симметрической группой и обозначается S_n.

Легко видеть, что все подстановки, оставляющие неизменной некоторую рациональную функцию корней φ_1, образуют подгруппу H. Пусть порядок этой подгруппы (т. е. число ее элементов) есть h. Лагранж доказал, что h всегда является делителем порядка N группы S_n и что если $N = kh$, то φ принимает при всех подстановках из S_n ровно k значений. Число k называется индексом подгруппы H в группе S_n. Эта теорема Лагранжа вошла теперь под его именем во все учебники алгебры.

Таким образом, дело сводится к отысканию подгрупп с индексами, меньшими n, и функций, инвариантных при подстановках из этих подгрупп. Именно этот результат и привел, по-видимому, Лагранжа к выводу, что подстановки являются «истинной метафизикой решения уравнений» [1].

2. Две рациональные функции корней $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ и $\psi(x_1, \ldots, x_n)$, не меняющиеся при подстановках одной и той же подгруппы H и только при них, выражаются друг через друга рационально. Такие функции Лагранж называл подобными. В современной терминологии это означает, что подобные функции принадлежат одному и тому же полю $\varkappa$, которое получается путем присоединения к $Q(a_1, \ldots, a_n)$ одной из этих функций. Это частный случай теоремы Галуа, устанавливающей связь между подполем нормального расширения и подгруппами группы Галуа.

Теорема Лагранжа дает возможность выбрать среди подобных функций наиболее простую. Такую функцию можно найти с помощью «резольвенты Лагранжа»

$$t = x_1 + \alpha x_2 + \ldots + \alpha^{n-1} x_n,$$

где $\alpha^n = 1$, $\alpha \neq 1$. При циклической подстановке корней $x_k \to x_{k+b}$ (если $k + b > n$, то берется остаток его от деления на n) резольвента переходит в

$$\alpha^{-b} t = x_{b+1} + \alpha x_{b+2} + \ldots + \alpha^{n-1} x_b,$$

откуда видно, что при циклических подстановках $\theta = t^n$ не меняется и, следовательно, функция θ принимает $\frac{n!}{n} = (n-1)!$ различных значений. Лагранж показывает явно, как, зная $t_1, \ldots, t_n$, найти корни исходного

[1] *J. L. Lagrange.* Oeuvres, t. 3. Paris, 1869, p. 357.

уравнения (способом, аналогичным тому, который мы привели для уравнений третьей степени).

Далее Лагранж рассматривает «метациклическую» подстановку корней $x_k \to x_{ak+b}$, где a взаимно просто с n (если $ak + b > n$, то здесь также берется остаток от деления на n). Метациклическая группа имеет порядок $n\varphi(n)$, где $\varphi(n)$ — функция Эйлера, равная количеству натуральных чисел, меньших n, и взаимно простых с ним. Поэтому, как показал Лагранж, уравнение степени n можно свести к решению уравнения степени $\frac{n!}{n\varphi(n)}$. Если n простое, то $\varphi(n) = n - 1$ и решение сводится к решению уравнения степени $\frac{n!}{n(n-1)} = (n-2)!$ коэффициенты которого рационально выражаются через коэффициенты исходного уравнения. В частности, для $n=3$ и $n=5$ число $\frac{n!}{n(n-1)}$ соответственно равно 1 и 6.

Таким образом, решение уравнения пятой степени сводится к решению уравнений шестой степени! «Отсюда следует,— пишет Лагранж,— что весьма сомнительно, чтобы методы, которые мы рассмотрели, могли дать полное решение уравнения пятой степени» [1].

«Вот, если я не ошибаюсь,— заключает он ,— истинные принципы решения уравнений и анализ, наиболее пригодный, чтобы привести к решению; как мы видели, все сводится к некоторому исчислению комбинаций, с помощью которого получают apriori результаты, которые следует ожидать» [2].

Почти одновременно с работой Лагранжа вышел и «Мемуар о решении уравнений» (Mémoire sur la résolution des équations. Mém. Ac. Paris, (1771)1774) Вандермонда, где были развиты примерно те же идеи и методы, что и у Лагранжа. Здесь также рассматривались рациональные функции корней уравнения, принимающие при подстановке корней меньше n различных значений, также вводились «резольвенты Лагранжа». Однако его работа уступает по общности и ясности трактовки мемуару Лагранжа. Исторически она не оказала влияния на дальнейшие исследования по теории уравнений. Между тем в ней содержалось интересное исследование уравнений деления круга $x^n - 1 = 0$. Сформулированные им результаты о разрешимости этих уравнений в радикалах Вандермонд проверил для $n \leqslant 11$. Эти результаты были в конце века переоткрыты, углублены и строго доказаны Гауссом.

Исследования Гаусса

Во всех рассмотренных нами алгебраических работах предполагалось, что корни n-й степени из единицы присоединены к основному полю. Если не считать утверждений Вандермонда, то вопрос о представлении их в радикалах даже не ставился. Гаусс в последней части своих «Арифметических исследованиях» (1801) предпринял полное исследование этого вопроса, выделив тем самым первый важный класс уравнений любой степени, разрешимых в радикалах. Решения уравнения $x^n - 1 = 0$, т. е. корни n-й степени из единицы, могут быть записаны в виде

$$\alpha^k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}.$$

[1] *J. L. Lagrange*. Oeuvres, t. 3, p. 307.
[2] Там же, стр. 403.

Прежде всего Гаусс сводит задачу к случаю, когда n — простое число, и всюду в дальнейшем предполагает n простыми. Поскольку одним из корней уравнения $x^n - 1 = 0$ является единица, Гаусс ограничивается рассмотрением корней многочлена

$$X = \frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1.$$

Так как комплексные числа $1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1}$ изображаются на плоскости комплексного переменного вершинами правильного n-угольника, делящими окружность $|z| = 1$ на n равных дуг, уравнение $X = 0$ называют «уравнением деления круга».

Далее Гаусс доказывает, что в случае простого n многочлен X неприводим в поле рациональных чисел, т. е. его нельзя представить в виде произведения двух многочленов с рациональными коэффициентами. Гаусс показывает, что если число $n - 1$ разлагается на натуральные множители α, β, γ (которые являются простыми), то X разлагается на α множителей степени $(n - 1)/\alpha$, коэффициенты которых определяются решением уравнения степени $(n - 1)/\alpha$, каждый из этих множителей в свою очередь разлагается на β множителей степени $(n - 1)/\alpha\beta$, коэффициенты которых определяются решением уравнения степени β и т. д., так что если число множителей $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ равно ν, то нахождение корней многочлена X сводится к последовательному решению ν уравнений степеней $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ Например, в случае $n = 17$, где $n - 1 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$, нахождение корней многочлена X сводится к решению четырех квадратных уравнений, а в случае $n = 7$, где $n - 1 = 2 \cdot 3$, нахождение корней многочлена X сводится к решению одного квадратного и одного кубического уравнений. Так как с помощью циркуля и линейки можно осуществить построение, равносильное решению квадратного уравнения, и нельзя осуществить построение, равносильное решению уравнения третьей и высших степеней, из этой теоремы Гаусса вытекает, что при простом n правильный n-угольник может быть построен с помощью циркуля и линейки только в том случае, когда число n имеет вид $2^k + 1$; легко видеть, что в этом случае степень k также имеет вид 2^α, так как если $k = gh$, где g нечетно, то

$$2^{gh} + 1 = (2^h + 1)(2^{h(g-1)} - 2^{h(g-2)} + \ldots - 2^h + 1),$$

т. е. $2^k + 1$ — составное число. Таким образом, циркулем и линейкой можно построить правильные n-угольники, у которых n — простое число вида $2^{2^\alpha} + 1$ (это так называемые простые числа Ферма); в частности, при $\alpha = 0, 1, 2, 3$ имеем $n = 3, 5, 17, 257$. Здесь же Гаусс привел выражение

$$\cos\frac{2\pi}{17} = \frac{1}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{17} + \frac{1}{16}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \frac{1}{8}\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}},$$

позволяющее фактически построить правильный 17-угольник с помощью циркуля и линейки. Из теоремы, доказанной Гауссом для простых n, вытекает, что в общем случае можно построить циркулем и линейкой правильные n-угольники только тогда, когда число n имеет вид $2^\alpha p_1 p_2 \ldots p_m$, где p_i — различные простые числа вида $2^{2^\alpha} + 1$. Далее Гаусс показывает, что при любых n все корни всех полученных им промежуточных уравнений, кроме последнего, если оно квадратное, — действительные числа; с помощью резольвент Лагранжа он выясняет также, что

все эти промежуточные уравнения разрешимы в радикалах, откуда и вытекает разрешимость в радикалах уравнения $x^n - 1 = 0$ при любых n. Анализ Гаусса был, по существу, основан на разложении группы Галуа уравнения деления круга (т. е. группы всех подстановок корней этого уравнения, не изменяющих справедливости рациональных соотношений между ними) в прямую сумму циклических подгрупп и на построении подполей, соответствующих каждой из подгрупп. В случае уравнения деления круга $X = 0$ группа Галуа — циклическая группа порядка $n - 1$. В 1826 г. Абель перенес методы Гаусса на случай уравнений, группа подстановок корней которых коммутативна, показав для этого, что любая коммутативная группа распадается в прямую сумму циклических подгрупп. Этим была построена теория Галуа для класса уравнений с коммутативной группой (так называемых абелевых уравнений).

Работа Руффини

Вопрос о невозможности разрешения в радикалах общих уравнений пятой и высших степеней снова поднимается в книге воспитанника и профессора анализа университета Модены Паоло Руффини (1765—1822). «Общая теория уравнений, в которой доказывается невозможность алгебраического решения общих уравнений выше четвертой степени» (Teoria generale delle equazioni in cui si dimostra impossibile la soluzione algebrica delle equazioni generali di grado superiore al quarto. Bologna, 1798 — 1799). Излагаемое здесь доказательство невозможности решения в радикалах уравнения пятой степени он пытался улучшить в последующих работах 1801, 1802, 1806 и 1813 гг. Упомянем, что в одной работе 1820 г. Руффини показал ошибочность метода решения любых буквенных алгебраических уравнений, предложенного в 1812 г. Вронским. Руффини не удалось дать строгого доказательства этой теоремы, но он сделал важный шаг вперед по пути к такому доказательству. Теория Руффини основана на предложении о том, что не существует функций пяти переменных, принимающих при перестановках этих переменных только три или четыре значения. Руффини, по существу, рассматривал и группы подстановок. Он обнаружил связь между приводимостью алгебраического уравнения и тем, что рассматриваемая им группа перестановок его корней не переводит любой корень в любой другой корень (в настоящее время это свойство группы называется интранзитивностью), а также связь между разрешимостью уравнения с помощью вспомогательных уравнений низшей степени и тем, что корни уравнения делятся на классы, переводящиеся один в другой всякой перестановкой рассматриваемой им группы (в настоящее время это свойство группы называется импримитивностью).

Теорема о неразрешимости в радикалах общих уравнений пятой и высших степеней была строго доказана Н. Х. Абелем в 1824—1826 гг. Уже в работах Абеля выделилось понятие области рациональности, а в 1830—1832 гг. французский математик Эварист Галуа ввел понятия группы, подгруппы и нормального делителя и развил аппарат теории групп. Оперируя новыми понятиями группы и поля, он нашел общее условие разрешимости алгебраических уравнений в радикалах. Теория Галуа, по существу, представляла собой обобщение теории Гаусса и Абеля, однако если они рассматривали уравнения с коммутативной группой Галуа, то Галуа рассмотрел общий случай, когда группа Галуа некоммутативна.



П. Руффини

Выделенный Галуа класс подгрупп некоммутативных групп — нормальные делители — обладает тем же свойством, что и любые подгруппы коммутативной группы: эти подгруппы вместе с их смежными классами составляют группы, называемые фактор-группами группы по нормальному делителю. Условие разрешимости Галуа состоит в том, что группа Галуа обладает цепочкой вложенных друг в друга нормальных делителей, обладающих тем свойством, что фактор-группа группы по первому из них и фактор-группа каждого из них по следующему, а также последний из этих нормальных делителей коммутативны,— такие группы получили название разрешимых групп; в случае коммутативных групп это свойство выполняется автоматически.

Теория Галуа завершила длинный ряд исследований крупнейших математиков XVIII—XIX вв. Основное значение этих исследований и самой теории состоит, как это часто бывает в математике, не столько в окончательном решении проблемы разрешимости уравнений в радикалах, сколько в аппарате теории групп и полей, которые были при этом введены и которым суждено было изменить всю структуру современной алгебры.

Комбинаторика

О развитии комбинаторики в XVII в. мы рассказали во втором томе, в главе, посвященной также теории вероятностей, которая в то время поставляла наиболее разнообразные задачи на соединения и в которой комбинаторные методы находили важнейшие приложения (если не считать задачи возведения в степень двучлена). Там же мы рассмотрели вклад, внесенный в теорию соединений Я. Бернулли, поскольку его классическое «Искусство предположений», изданное в 1713 г., было подготовлено еще в XVII в.

Комбинаторные методы и в дальнейшем сохраняли свое значение в решении многих вопросов теории вероятностей, но вместе с тем в их развитии все бóльшую роль начинают играть проблемы алгебры, теории чисел, геометрии, теории рядов. Постепенно комбинаторика вырастает в отдельную отрасль математики, изучающую определенного рода операции над конечными множествами элементов любой природы, причем общей целью оказывается определение комбинаторных функций—численности множеств, образованных с помощью таких операций. К концу XVIII в. выделение комбинаторики в самостоятельную дисциплину вполне оформилось, и целая школа немецких математиков пыталась даже утвердить ее первенство в системе математических наук.

Несколько отступая от хронологического порядка, мы прежде всего упомянем решение Эйлером нескольких теоретико-числовых задач комбинаторного характера, именно задач на представление натурального числа n в виде суммы $m < n$ натуральных чисел. Эта задача заинтересовала еще Лейбница, затем в 1740 г. Ф. Ноде поставил ее перед Эйлером, который произвел подсчет числа возможных разбиений при различных условиях в ряде статей (Commentarii, (1741—1743)1751; Novi Commentarii, (1750—1751) 1753 и (1769)1770), а также в первом томе «Введения в анализ бесконечных» (1748). Характерно название первой из упомянутых статей: «Различные аналитические заметки о соединениях» (Observationes analyticae variae de combinationibus). Мы еще вернемся к этим задачам в третьей главе, а пока отметим два обстоятельства. Во-первых, здесь появились понятия сочетаний и размещений с определенной суммой, а во-вторых, в комбинаторику был введен метод производящих функций, позволяющий определять комбинаторные функции как коэффициенты разложений производящих функций в степенные ряды. До того единственным приемом комбинаторики служило индуктивное установление рекуррентных соотношений, далеко не всегда доказываемых с помощью полной математической индукции.

Комбинаторной является и геометрическая задача о числе P_n возможных способов разбиения n-угольника на треугольники посредством непересекающихся диагоналей. Эту задачу поставил Эйлер в письме к Гольдбаху от 4 сентября 1751 г., приведя в качестве решения формулу

$$P_n = \frac{2\cdot 6\cdot 10\ldots(4n-10)}{2\cdot 3\cdot 4\ldots(n-1)} \qquad (n \geqslant 3),$$

опубликованную без доказательства в «Novi Commentarii», (1758—1759) 1761. Довольно сложное рекуррентное соотношение для P_n опубликовал там же уже упоминавшийся (стр. 12) профессор ряда немецких университетов, уроженец Венгрии Иоганн Андреас Зегнер (1704—1777), а затем этой задачей занимались С. К. Котельников (Novi Commentarii, (1764)

1766), Н. И. Фусс (в обобщенной постановке — о разбиении n-угольника на m-угольники, 1810; опубл. 1830) и еще многие математики.

Мы только упомянем задачу о числе способов, какими можно без повторений пройти все 64 клетки ходом коня (Эйлер — Mém. Ac. Berlin, (1759) 1766 и Вандермонд — Mém. Ac. Paris, (1771) 1774), а также топологическую задачу Эйлера о семи кенигсбергских мостах, о которой расскажем далее (см. стр. 204).

Большой цикл работ по комбинаторике вырос из исследований о возведении в степень многочлена, которые начались еще в XVII в. В 70-е годы этого столетия общий прием вычисления коэффициентов соответствующего разложения нашел Лейбниц, который, однако, лишь упомянул об открытом им правиле в одном из писем к И. Бернулли 1695 г. и затем в статье об аналогии между дифференцированием произведения многих функций и возведением в степень многочлена, напечатанной в 1710 г. (см. т. II, стр. 273). Рекуррентное правило образования коэффициентов разложения в бесконечный ряд выражения $(az + bz^2 + cz^3 + \ldots)^n$ впервые опубликовал Муавр в «Philosophical Transactions» за 1697 г. Он привел соображения, подтверждающие правило для натуральных значений n, но вывод для дробных n отложил до другого случая, который ему не представился; в «Аналитических этюдах» (1730) он добавил лишь разложение для $n = -1$. Недостатком изложения Муавра и многих последующих авторов было обозначение всех коэффициентов различными буквами и отсутствие какой-либо комбинаторной символики. В этих условиях рекуррентные соотношения или же вид общих членов приходилось определять либо в чисто словесной (как это делал Муавр), либо в довольно громоздкой и недостаточно общей форме (как поступал, например, Эйлер).

Найденные результаты Муавр применил в «Philosophical Transactions» за следующий 1698 г. к вычислению корня «бесконечного уравнения»

$$az + bz^2 + cz^3 + \ldots = gy + hy^2 + iy^3 + \ldots$$

в виде ряда

$$z = \frac{g}{a}y + \frac{h - bA^2}{a}y^2 + \frac{i - 2bAB - cA^3}{a}y^3 + \ldots,$$

где прописные буквы A, B,. . . обозначают всякий раз коэффициент предыдущего члена. И в этом случае Муавр дал словесное правило вычисления коэффициента при степени y^{n+1} по n предыдущим. Доказательство предлагалось провести по методу неопределенных коэффициентов, подставив в данное уравнение выражение z в форме степенного ряда $z = \alpha y + \beta y^2 + \gamma y^3 + \ldots$. Формула обращения рядов Ньютона (см. т. II, стр. 232) получается из найденного для z значения при $h = i = \ldots = 0$.

Появление этой статьи Муавра и начавшийся спор о приоритете в открытии дифференциального исчисления (см. т. II, стр. 220) побудили Лейбница выступить в «Acta Eruditorum» за 1700 г. с изложением собственного приема вычисления корней «бесконечных уравнений». По существу оба ученых пришли к одинаково общим результатам. Замечательной особенностью статьи Лейбница явилось обозначение коэффициентов парами и тройками числовых индексов, правда, без букв,— обозначение, которое он применил и в набросках по теории определителей (см. т. II, стр. 52). Данное уравнение он писал в виде

$$0 = (01y + 02y^2 + 03y^3 + \text{ и т. д.}) + (-10 + 11y + 12y^2 + \text{ и т. д.})\, z^1 + \\ + (20 + 21y + 22y^2 + \text{ и т. д.})\, z^2 + \text{и т. д.},$$

а его корень — в виде $z = 101y + 102y^2 + 103y^3 + 104y^4 + 105y^5 +$ и т. д. Эти обозначения в то время не нашли сторонников, а много позднее были улучшены путем индексирования букв.

После Муавра разложение степени многочлена выводили средствами алгебры или анализа различные математики, в том числе Маклорен (1742) и Эйлер (1748, 1755). При этом получали либо закон последовательного вычисления коэффициентов, либо рекуррентную формулу. Р. И. Бошкович, имя которого нам еще встретится (см. стр. 134), кажется, первый пришел к непосредственному представлению коэффициентов разложения в итальянском «Giornale de'Letterati d'Italia» за 1747 г. Новый подход к задаче предложен был в школе комбинаторного анализа, возникшей в Германии в последней четверти XVII в., особенно благодаря энергии К. Гинденбурга, который правильно понял назревшую потребность в объединении и обобщении методов теории соединений, хотя и сильно переоценил их реальное значение для того времени.

Карл Фридрих Гинденбург (1739—1808), воспитанник и профессор Лейпцигского университета, преподавал в нем философию и затем физику; он был одним из инициаторов и издателей немецких математических журналов, о которых говорилось в первой главе (см. стр. 16). Задаче возведения многочлена в произвольную рациональную степень Гинденбург посвятил целую серию работ, печатавшихся с 1778 г. и получивших известное завершение в одной из статей изданного им сборника, носившего громкое название «Полиномиальная теорема, важнейшее предложение всего анализа» (Der polynomische Lehrsatz, das wichtigste Theorem der ganzen Analysis. Leipzig, 1796). Для вывода общей формулы он применил развитые им приемы теории соединений и в конце концов показал, как коэффициент общего члена выражается через давно уже известные комбинаторные функции. Попутно Гинденбург создал целую систему обозначений и терминов, но они были слишком сложными и не сохранились, и мы приведем два его основных результата в более современной форме:

$$(a + b + c + \ldots)^n = \sum \frac{n!}{n_1!\, n_2!\, n_3! \ldots}\, a_0^{n_1} b^{n_2} c^{n_3} \ldots,$$

где суммирование производится по значениям $n_1, n_2, n_3, \ldots$, сумма которых равна n, и

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots)^n = \sum \frac{n!}{n_0!\, n_1!\, n_2! \ldots}\, a_0^{n_0} a_1^{n_1} a_2^{n_2} \ldots x^m,$$

где $n_0 + n_1 + n_2 + \ldots = n$ и $n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \ldots = m$. Здесь число членов предполагается конечным и показатель — натуральным числом. Распространение на бесконечные многочлены и рациональные значения совершалось формально и не сопровождалось каким-либо исследованием сходимости.

Полиномиальная теорема послужила отправным пунктом работ школы комбинаторного анализа, к которой примкнули Гироним Кристоф Эшенбах (1764—1797), молодым человеком покинувший Лейпциг для службы в одной ост-индийской компании; Кретьен Крамп (1760—1826), после ряда лет странствий и перемен профессий обосновавшийся профессором математики в Страсбурге; Иоганн Фридрих Пфафф (1765—1825), имя которого носит известная задача теории дифференциальных уравнений, профессор в Гельмштедте и Галле; Генрих Август Роте (1773—1842), профессор в Лейпциге и Эрлангене, и другие. То центральное место, которое Гин-

денбург присвоил полиномиальной теореме в системе комбинаторного анализа, на деле она не занимала. Комбинаторики построили обширную систему формул умножения и деления рядов, их возведения в степень и извлечения корней, обращения рядов, подстановки рядов в ряды, разложений различных трансцендентных функций и т. д. Упомянем в качестве одного из характерных примеров вывод общего члена ряда, возникающего при обращении рядов, данный в более частном случае Эшенбахом (1789) и в более общем — Гинденбургом (1793). Некоторые пробелы в исследовании Эшенбаха восполнил Роте (1793), вскоре затем (1795) доказавший при помощи своей формулы обращения известную формулу Лагранжа (см. стр. 83). Комбинаторики раскрыли связи некоторых своих формул с формулами исчисления бесконечно малых. Так, Пфафф (1795) вывел из теоремы Тейлора формулу обращения Лагранжа, а из нее — формулу Эшенбаха — Роте. Любопытно, что, увлеченные аналитическими приложениями, комбинаторики не оценили индексационной символики Лейбница и уделили мало внимания теории определителей, в которой теория соединений играет столь важную роль (ср. стр. 70).

Гинденбург полагал, что на основе комбинаторного анализа удастся построить весь математической анализ, основным аппаратом которого он, как и многие другие математики того времени, считал бесконечные и в первую очередь степенные ряды; можно усмотреть некоторое сходство этой последней концепции с теорией аналитических функций Лагранжа. В действительности формально-комбинаторная разработка инфинитезимальных методов не соответствовала актуальным задачам математики конца XVIII и начала XIX в. Довольно ограниченная проблематика школы вскоре была исчерпана и влияние ее в целом оказалось незначительным. Все же плодом ее деятельности явились не только отдельные изящные общие формулы, но и осознание специфики задач и методов комбинаторного анализа в целом. Одной из ближайших задач явилось создание более удобной и оперативной символики, о чем со всей определенностью писал, например, в 1808 г. Крамп. Мы приведем некоторые обозначения, предложенные в рассматриваемое или близкое к нему время. Для произведения $a(a+r)\ldots(a+nr-r)$ Крамп предложил запись $a^{n/r}$, а в частном случае $1\cdot 2\cdot 3\ldots n$, вместо $1^{n/1}$,— более простой знак $n!$, который и укоренился. Произведения такого вида он называл facultés (факультетами), а его коллега по Страсбургскому университету Л. Арбогаст (1800) factorielles (факториалами). Обозначение числа сочетаний $\left(\dfrac{n}{m}\right)$ ввел в 1827 г. венский математик А. фон Эттингсгаузен, которому принадлежит одно из первых доказательств теоремы Штурма (1830; см. стр. 83); это обозначение восходит к применявшимся Эйлером символам $\left(\dfrac{m}{n}\right)$ (1778; опубл. Nova Acta (1799—1802)1806) и $\left[\dfrac{m}{n}\right]$ (Acta (1781 : I) 1784). Другое принятое теперь обозначение C_n^m возникло, вероятно, из сходного знака М. Ома (1829), так же как знак перестановки P_n.

ТРЕТЬЯ ГЛАВА

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

Труды Эйлера

В конце XVII и начале XVIII в. внимание математиков было в основном поглощено разработкой и приложениями дифференциального и интегрального исчисления. К исследованиям по теории чисел математиков вновь привлек Л. Эйлер. П. Л. Чебышев в своей «Теории сравнений» (СПб., 1849) писал: «Эйлером положено начало всех изысканий, составляющих общую часть теории чисел. В этих изысканиях Эйлеру предшествовал Ферма; он первый начал заниматься исследованием свойств чисел в отношении их способности удовлетворять неопределенным уравнениям того или другого вида и результатом его изысканий было открытие многих общих теорем теории чисел. Но изыскания этого геометра не имели непосредственного влияния на развитие науки: его предложения остались без доказательств и без приложений. В этом состоянии открытия Ферма служили только вызовом геометров на изыскания в теории чисел. Но, несмотря на весь интерес этих изысканий, до Эйлера на них никто не вызывался. И это понятно: эти изыскания требовали не новых приложений приемов, уже известных, и новых развитий приемов, прежде употреблявшихся; эти изыскания требовали создания новых приемов, открытия новых начал, одним словом, основания новой науки. Это сделано было Эйлером»[1]. Вслед за Эйлером теорией чисел занялись Ж. Л. Лагранж, А. М. Лежандр и К. Ф. Гаусс, а за ними и другие крупнейшие математики XIX в., среди них П. Л. Чебышев, положивший начало замечательной Петербургской школе теории чисел.

Л. Эйлер доказал многие результаты своих предшественников, в частности Ферма, успешно применяя средства арифметики и алгебры и метод спуска, создал новые аналитические методы в теории чисел, поставил ряд новых важных задач.

Вклад Эйлера в теорию чисел настолько велик, что здесь нет возможности упомянуть даже об основных его результатах. Ему принадлежит свыше ста отдельных работ по теории чисел. Большинство их было объединено П. Л. Чебышевым и В. Я. Буняковским в двух томах «Собрания арифметических работ» (Commentationes arithmeticae collectae. СПб., 1849). Кроме того, вопросам теории чисел посвящены несколько глав во «Введении в анализ бесконечных» и ряд разделов «Универсальной арифметики» (1768, 1769). Наконец, вопросы теории чисел занимают важное

---

[1] *П. Л. Чебышев.* Полное собрание сочинений, т. I. М.—Л., 1944, стр. 10.

место в записных книжках Эйлера, хранящихся в Архиве Академии наук СССР. Особо следует отметить переписку Эйлера по вопросам теории чисел с некоторыми другими учеными, прежде всего с петербургским академиком Христианом Гольдбахом (1690—1764), автором нескольких интересных работ по анализу и весьма наблюдательным арифметиком. Хотя по математическому дарованию и эрудиции Гольдбах значительно уступал Эйлеру и математикой вообще занимался не систематически, духовный обмен с ним имел для Эйлера очень большое значение, тем более, что как раз теорией чисел в то время занимались очень немногие.

Исследование задач Ферма

Именно Гольдбах привлек внимание Эйлера к утверждению Ферма, что все числа вида $2^{2^n} + 1$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) — простые. Эйлер указал, что это утверждение неверно, в своей первой заметке по теории чисел «Замечания о теореме Ферма и других теоремах о простых числах» (Observationes de theoremate quodam Fermatiano aliisque ad numeros primos spectantibus. Commentarii, (1732—1733) 1738). Оказалось, что уже число $2^{2^5} + 1$ делится на 641.

Эйлер доказал утверждение Ферма, что всякое простое число вида $4n + 1$ разлагается на сумму двух квадратов и притом единственным образом (Novi Commentarii, (1754—1755) 1760) и много других подобных теорем о представимости чисел некоторыми квадратичными формами вида $mx^2 + ny^2$. Дальнейшие исследования в этом направлении предпринял Лагранж.

Переписка с Гольдбахом послужила толчком для открытия Эйлером теоремы о том, что всякий делитель числа вида $x^2 + y^2$, где $(x, y) = 1$ есть число того же вида. Эта теорема и аналогичные ей породили впоследствии теорию делителей бинарных квадратичных форм.

В предыдущем изложении мы упомянули теорему Баше де Мезириака о представлении целого положительного числа суммой не более чем четырех целых квадратов (см. т. II, стр. 75). В Novi Commentarii, (1754—1755) 1760, Эйлер доказал, что всякое рациональное положительное число есть сумма четырех квадратов рациональных чисел, и подготовил средства для полного решения этой задач. Лагранжем (см. стр. 116). По одному замечанию Ферма Эйлер сумел воссоздать метод бесконечного спуска и доказал этим методом два случая великой теоремы Ферма: для $n = 4$ (Commentarii, (1738) 1747) и для $n = 3$ (Универсальная арифметика, т. II, 1769), сообщив о доказательстве для $n = 3$ еще в письме Гольдбаху 26 апреля 1755 г. Такой большой временнóй интервал между обоими доказательствами объясняется, по-видимому, тем, что случай $n = 3$ потребовал применения существенно новых идей. В ходе доказательства Эйлер пришел к выражению вида $a^2 + 3b^2$ (где a и b — целые числа), которое должно было равняться кубу. Эйлер разложил его на множители, положив

$$a^2 + 3b^2 = (a + b\sqrt{-3})(a - b\sqrt{-3}) = t^3.$$

Далее он, по существу, рассматривал выражения вида $a \pm b\sqrt{-3}$ как целые числа. В частности, он применил для них следующую теорему: если произведение двух взаимно простых чисел α и β равно некоторой степени z^n то $\alpha = \alpha_1^n$ и $\beta = \beta_1^n$. Эта теорема была в то время установлена

только для целых рациональных чисел, но имеет место в любом кольце с однозначным разложением на простые множители. Таким образом, здесь впервые понятие целого числа было перенесено в новую область. Правда, Эйлер не предпринял систематического исследования новых чисел — это было сделано гораздо позже, но в своем доказательстве он открыл новый путь, по которому в дальнейшем и начала развиваться высшая арифметика.

Позднее различные случаи теоремы Ферма доказали Лежандр, Э. Куммер, П. Лежен-Дирихле и др. Попытки решения этой задачи стимулировали создание теории целых алгебраических чисел в работах Дирихле, Куммера, Эрмита и других математиков XIX в. и ее разработку в трудах Дедекинда, Золотарева, Кронекера.

Отправляясь от теорем Ферма, Эйлер рассмотрел также уравнения $x^4 + y^4 = u^4 + v^4$ и $x^4 + y^4 + z^4 + u^4 = v^4$ и нашел все целые решения первого из них.

Ферма считал одной из важнейших задач теории чисел отыскание простого числа, большего, чем любое заданное. С этой задачей были связаны попытки найти многочлен, все значения которого простые числа. Однако попытки эти были обречены на неудачу. Теорему о том, что ни один многочлен с целыми коэффициентами

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n$$

($n \geqslant 1$) не может при всех целых значениях x принимать значения, равные простым числам, впервые сообщил Гольдбах в письме Эйлеру от 28 сентября 1743 г. Теорема была доказана Эйлером в 1752 г. (в письме 28 октября 1752 г.). Гольдбах указал свое доказательство этой теоремы, близкое к доказательству Эйлера, и доказательство Гольдбаха было опубликовано в статье Эйлера «Об очень больших простых числах» (De numeris primis valde magnis. Novi Commentarii, (1762—1763) 1764). В переписке и сочинениях Эйлера имеются примеры многочленов, дающих при целых значениях много простых значений.

Обобщение малой теоремы Ферма и теория степенных вычетов

С рассмотрения малой теоремы Ферма (см. т. II, стр. 74) начались исследования Эйлера по теории степенных вычетов. В заметке «Доказательство некоторых теорем о простых числах» (Theorematum quorundam ad numeros primos spectantium demonstratio. Commentarii, (1736) 1741) Эйлер привел доказательство теоремы Ферма, основанное на свойстве биномиальных коэффициентов. Другое доказательство малой теоремы Ферма Эйлер дал в работе «Теоремы об остатках, получающихся при делении степеней» (Theoremata circa residua ex divisiones potestatum relicta. Novi Commentarii, (1758—1759) 1761). Оно основано на исследовании ряда остатков (или, как теперь говорят, «вычетов»), получающихся при делении на простое число последовательных членов геометрической прогрессии $1, a, a^2, a^3, \ldots$ Эйлер показывает, что если p — простое и a — целое, не делящееся на p, то ни один из членов этой геометрической прогрессии не делится на p. При этом получается не более $p - 1$ различных остатков (остатки периодически повторяются).

Пусть k — наименьший показатель из ряда степеней $1, a, a^2, a^3, \ldots$, такой, что при делении a^k на простое число p получается в остатке единица:

$$a^k = 1 + pm \qquad (m \text{ — некоторое целое}),$$

тогда k равно $p-1$ или является делителем числа $p-1$. Число a, для которого $k = p-1$, называется первообразным корнем для простого p (т. е. $a^{p-1} = 1 + pm$ и никакое a^x, где $x < p-1$ уже не может дать при делении на p в остатке единицу). Теорема о существовании первообразного корня была по существу высказана И. Г. Ламбертом (Nova Acta Eruditorum, 1769). Несколько позднее, в работе «Доказательства, относящиеся к остаткам, происходящим от деления степеней на простые числа» (Demonstrationes circa residua ex divisione potestatum per numeros primos resultantia. Novi Commentarii, (1773) 1774), Эйлер определил понятие первообразного корня (ввел и самый этот термин), предложил первое доказательство существования его для каждого простого числа, содержащее, однако, существенные пробелы, установил число первообразных корней и дал их важные приложения. Показав, что k делит $p-1$, Эйлер на частном примере установил основной факт будущей теории конечных групп: порядок подгруппы есть делитель порядка группы (ср. стр. 92).

Эйлер обобщает малую теорему Ферма: если N и a взаимно просты, $\varphi(N)$ — количество чисел, взаимно простых с N и меньших N, то $a^{\varphi(N)} - 1$ всегда делится на N. Это предложение называют теоремой Эйлера, а функцию $\varphi(N)$ — функцией Эйлера. Формулу для $\varphi(N)$ при $N = p^\alpha q^\beta \ldots s^\delta$

$$\varphi(N) = p^{\alpha-1}(p-1)\,q^{\beta-1}(q-1)\ldots s^{\delta-1}(s-1)$$

Эйлер вывел в работах «Арифметические теоремы, доказанные новым методом» (Theoremata arithmetica nova methodo demonstrata. Novi Commentarii, (1758—1759) 1763) и «Размышления относительно некоторых важных свойств чисел» (Speculationes circa quasdam insignes proprietates numerorum. Acta, (1780) 1784).

Важнейший вклад в теорию чисел представляет собой открытый Эйлером квадратичный закон взаимности.

Число r называют квадратичным вычетом по модулю p, если существует такое число x, что x^2 при делении на p дает в остатке r, т. е.

$$x^2 = r + mp \qquad (m \text{ — целое}).$$

В более поздней формулировке Дирихле закон взаимности можно высказать следующим образом (Эйлер выразил его иначе): если из двух нечетных простых чисел p и q по крайней мере одно имеет вид $4n+1$, то q будет квадратичным вычетом или невычетом p, смотря по тому, будет ли p квадратичным вычетом или невычетом q; если же оба числа имеют вид $4n+3$, то q есть квадратичный вычет или невычет p, смотря по тому, будет ли p квадратичным невычетом или вычетом q. Пользуясь символом Лежандра $\left(\frac{r}{p}\right)$, где $\left(\frac{r}{p}\right) = +1$, если r — квадратичный вычет по модулю p, $\left(\frac{r}{p}\right) = -1$, если r — квадратичный невычет по модулю p (ср. стр. 119), закон взаимности теперь формулируют так: если p и q — нечетные простые числа, то

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}.$$

Например, если $p = 3$, $q = 5$, то $\left(\frac{3}{5}\right) = \left(\frac{5}{3}\right) = -1$, если $p = 3$, $q = 13$, то $\left(\frac{3}{13}\right) = \left(\frac{13}{3}\right) = +1$, а если $p = 3$, $q = 7$, то $\left(\frac{3}{7}\right) = -\left(\frac{7}{3}\right) = -1$.

Первая еще неполная формулировка квадратичного закона взаимности имеется в работе Эйлера, написанной в 1744 г. и содержащей ряд теорем о делителях формы $mx^2 \pm ny^2$ (Commentarii, (1749) 1751), а развернутая формулировка — в «Замечаниях о делении квадратов на простые числа» (Observationes circa divisionem quadratorum per numeros primos), представленных им Петербургской академии в 1772 г. и опубликованных в первой части «Аналитических сочинений» (1783). Доказательства закона Эйлер не дает.

Математики долгое время не обращали внимания на работы Эйлера о квадратичном законе взаимности, к которому вновь пришел Лежандр и который затем явился предметом глубоких исследований Гаусса (см. стр. 119 и 124). Только Чебышев в 1849 г. обнаружил в трудах Эйлера эту замечательную теорему; в Западной Европе на это обратил внимание Кронекер в 1875 г.

Диофантов анализ

Решению неопределенных уравнений и систем неопределенных уравнений посвящено более 50 работ Эйлера, вторая часть «Универсальной арифметики» и большое количество записей в «Записных книжках». Эти задачи особенно привлекали внимание Ферма и других предшественников Эйлера.

Одной из важнейших задач диофантова анализа является решение в целых числах уравнения Ферма

$$x^2 - ay = 1. \qquad (1)$$

В статье «О применении нового алгоритма для решения задачи Пелля» (De usu novi algorithmi in problemate Pelliano solvendo. Novi Commentarii, (1765) 1767), представленной в 1759 г., Эйлер дал полное решение уравнения Ферма (1) с помощью разложения $\sqrt{a}$ в непрерывную дробь, обнаружив при этом на частных примерах периодичность этой дроби. Одновременно он представил Петербургской академии еще одну работу на ту же тему (Novi Commentarii, (1762—1763) 1764). Наконец, он изложил решение уравнения Ферма во второй части «Универсальной арифметики» (1769), воспользовавшись для этой цели разложением формы $u^2 \pm av^2$ на иррациональные или мнимоиррациональные множители:

$$u^2 \pm av^2 = (u + v\sqrt{\mp a})(u - v\sqrt{\mp a}). \qquad (2)$$

Строгого обоснования своему методу Эйлер не дал.

Эйлер рассмотрел также общее неопределенное уравнение второй степени

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \qquad (3)$$

привел его к виду

$$u^2 - av^2 = b \qquad (4)$$

и связал решение уравнения (4) с решением уравнения Ферма

$$x^2 - ay^2 = 1.$$

Он показал, что если x_0, y_0 — наименьшее решение уравнения (1), а u_0, v_0 — наименьшее решение уравнения (4), то другие решения u_n, v_n уравнения (4) можно получить по формуле

$$u_n + v_n \sqrt{a} = (u_0 + v_0 \sqrt{a})(x_0 + y_0 \sqrt{a})^n, \tag{5}$$

где надо раскрыть скобки и приравнять в обоих частях равенства свободные члены и коэффициенты при $\sqrt{a}$. Впоследствии Лагранж показал, что формула (5) не дает, вообще говоря, всех решений уравнения (4). Мы скоро обратимся к теоретико-числовым работам этого математика.

Аналитические методы

В XVIII в. значительное развитие получили дифференциальное и интегральное исчисление и теория рядов. Эйлер принимал в их разработке самое активное участие, и неудивительно, что именно он ввел методы математического анализа в теорию чисел.

Эйлер применил аналитические методы для решения как аддитивных задач — о представлении чисел в виде суммы некоторых слагаемых, так и задач мультипликативных, связанных с разложением чисел на множители.

Ряд работ Эйлера посвящен выводу рекуррентной формулы для суммы делителей. В первой из них, «Открытии необычайного числового закона для суммы делителей чисел» (Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs. Bibliothèque impartiale, (1747) 1751), Эйлер впервые указывает рекуррентную формулу для суммы делителей числа n, которую он обозначил $\int n$, в виде

$$\int n = \int (n-1) + \int (n-2) - \int (n-5) - \int (n-7) + \ldots$$

Он получает ее сначала с помощью индукции, а потом выводит средствами математического анализа. Эйлер рассматривает бесконечное произведение

$$s = (1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3) \ldots$$

Перемножая скобки, он приходит к представлению произведения в виде ряда

$$s = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + \ldots$$

Показатели этого ряда суть пятиугольные числа, т. е. числа вида $(3n^2 - n)/2$, где n принимает значения $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, а закон следования знаков очевиден из записи. Заметим, что функция $s = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - x^k)$ принадлежит к числу тета-функций Якоби (ср. стр. 341).

Дифференцируя $\ln s = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \ln(1 - x^k)$ и умножая на $-x$, Эйлер находит

$$t = \frac{-x}{s}\frac{ds}{dx} = \frac{x}{1-x} + \frac{2x^2}{1-x^2} + \frac{3x^3}{1-x^3} + \ldots \qquad (6)$$

С другой стороны, деля

$$\frac{ds}{dx} = -1 - 2x + 5x^4 + 7x^6 - 12x^{11} - 15x^{14} + \ldots \qquad (7)$$

на s и умножая частное на $-x$, он получает

$$t = -\frac{x}{s}\frac{ds}{dx} = \frac{x + 2x^2 - 5x^5 - 7x^7 + 12x^{12} + 15x^{15} - \ldots}{1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - \ldots}. \qquad (8)$$

Каждый член правой части (6) он раскладывает в геометрическую прогрессию

$$\begin{array}{llllllllllll}
t = x + & x^2 + & x^3 + & x^4 + & x^5 + & x^6 + & x^7 + & x^8 + & x^9 + & x^{10} + & \ldots \\
 & +2x^2 & & +2x^4 & & +2x^6 & & +2x^8 & & +2x^{10} + & \ldots \\
 & & +3x^3 & & & +3x^6 & & & +3x^9 & & \ldots \\
 & & & +4x^4 & & & & +4x^8 & & + & \ldots \\
 & & & & +5x^5 & & & & & +5x^{10} + & \ldots \\
 & & & & & +6x^6 & & & & + & \ldots
\end{array}$$

и складывает по столбцам одинаковые степени x. Каждая степень x встречается в ряде для t столько раз, сколько делителей имеет показатель x, так как каждый делитель показателя становится коэффициентом при той же степени x. Если объединить однородные члены, получается, что коэффициент при каждой степени x будет равен сумме всех делителей показателя этой степени:

$$t = 1 \cdot x + (1+2)x^2 + (1+3)x^3 + (1+2+4)x^4 + (1+5)x^5 + $$
$$+ (1+2+3+6)x^6 + \ldots = \int 1x + \int 2x^2 + \int 3x^3 + \ldots \qquad (9)$$

Умножив левую и правую части равенств (8) на знаменатель, имеем

$$t(1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + \ldots) - x - 2x^2 + 5x^5 + 7x^7 - \ldots = 0.$$

Наконец, подставим сюда значение t из (9)

$$\left(\int 1x + \int 2x^2 + \int 3x^3 + \ldots\right)(1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + \ldots) -$$
$$- x - 2x^2 + 5x^5 + 7x^7 - \ldots = 0.$$

Коэффициент при x^n равен $\int n - \int(n-1) - \int(n-2) + \ldots$, откуда

$$\int n = \int(n-1) + \int(n-2) - \int(n-5) - \ldots,$$

причем сумма обрывается, когда под знаком $\int$ оказывается отрицательное число; $\int 0$ считается равным n.

Тому же вопросу посвящено еще несколько работ. В одной из них «Об удивительных свойствах пятиугольных чисел» (De mirabilibus proprietatibus numerorum pentagonalium. Acta, (1780) 1783) Эйлер доказывает равенство выражений для s в виде ряда и произведения, перенося свойства корней и коэффициентов обычных алгебраических уравнений на уравнения с бесконечным числом корней.

Большой цикл, связанный с предыдущими исследованиями, составляют работы Эйлера о разбиении чисел на слагаемые (partitio numerorum). Одной из простейших задач этого вида является издавна бытовавшая задача о взвешивании всевозможных грузов с помощью наименьшего числа гирь, приведенная Эйлером в качестве примера в 16-й главе первого тома «Введения в анализ бесконечных», специально посвященной разбиению чисел на слагаемые. Другая задача: сколькими способами данное целое число может быть разложено на сумму меньших целых чисел? — была впервые поставлена Лейбницем в 1674 г.

Задача о разбиении чисел была предложена Эйлеру в 1740 г. берлинским математиком Филиппом Ноде (1684—1745). Спрашивалось, сколькими различными способами число может быть представлено как сумма двух, трех, четырех или вообще любого количества чисел. В своем ответе Ноде Эйлер в сентябре 1740 г. впервые приводит аналитическое решение этого вопроса, опубликованное прежде всего в упомянутой 16-й главе «Введения в анализ бесконечных», а затем в одной статье 1741 г., увидевшей свет позднее (Commentarii, (1741—1743) 1751). Чтобы решить вопрос, сколькими различными способами данное число N может быть разложено на p частей, неравных между собой, Эйлер составляет произведение

$$s = (1 + xz)(1 + x^2z)(1 + x^3z)\ldots$$

и приравнивает его ряду $s = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + \ldots$ Тогда

$$\begin{aligned} A &= x + x^2 + x^3 + \ldots, \\ B &= x^3 + x^4 + 2x^5 + 2x^6 + 3x^7 + 3x^8 + \ldots, \\ C &= x^6 + x^7 + 2x^8 + 2x^9 + 4x^{10} + 5x^{11} + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Коэффициенты второго, третьего и последующих рядов показывают, сколькими различными способами показатель степени x может быть разложен соответственно на две, три и т. д. неравные части. Например, из второго ряда видно, что число 7 может быть разложено на две неравные части тремя способами (именно: $7 = 1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4$). Аналогично решаются и другие задачи на разложение чисел.

Во «Введении в анализ бесконечных» мы встречаем применение аналитического метода и к решению мультипликативных задач. В 15-й главе Эйлер рассматривает разложение в ряд дроби

$$\frac{1}{(1 - \alpha z)(1 - \beta z)(1 - \gamma z)\ldots}$$

и путем формального выполнения делений (вероятно, сперва 1 на $1 - \alpha z$, затем получившегося ряда на $1 - \beta z$ и т. д.) находит

$$1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + \ldots,$$

где A — сумма всех $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, B$ — сумма произведений пар этих чисел, C — сумма произведений троек этих чисел и т. д., не исключая одинако-

вых множителей. Если $z = 1$ и α, β, γ суть обратные величины n-х степеней всех простых чисел, то возникает тождество

$$\prod_p \frac{1}{\left(1-\frac{1}{p^n}\right)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}, \qquad (10)$$

где в произведении p принимает значения всех простых чисел начиная с 2, а в сумме k пробегает весь ряд натуральных чисел. Это — знаменитое тождество Эйлера, лежащее в основе всей аналитической теории чисел и впервые приведенное им в «Различных замечаниях о бесконечных рядах» (Variae observationes circa series infinitas. Commentarii, (1737) 1744). Отсюда следует новое доказательство теоремы, что простых чисел бесконечно много, так как ряд справа при $n = 1$ расходится. О сходимости применяемых им рядов и бесконечных произведений здесь Эйлер ничего не говорит. Теперь функцию $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ обозначают $\zeta(s)$ и называют «дзета-функцией Римана» (см. стр. 337).

Во «Введении в анализ бесконечных» есть и другие формулы для $\zeta(s)$, среди которых такая (в современных обозначениях):

$$\zeta^{-1}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s},$$

где $\mu(n)$ — функция, получившая впоследствии название функции Мёбиуса [1].

Заметим, что для решения аддитивных задач Эйлер использовал степенные ряды (и их выражение в виде бесконечных произведений), для мультипликативных задач — ряды, ныне называемые рядами Дирихле (и соответствующие произведения). Аналитические методы Эйлера в мультипликативных задачах были в XIX в. развиты Лежен Дирихле, в 1837 г. доказавшим с их помощью высказанную Эйлером предположительно («Аналитические сочинения», т. II, 1783) теорему о бесконечности количества простых чисел в арифметической прогрессии $ax + b$, где $(a, b) = 1$. Новая страница в истории аналитических методов была открыта Б. Риманом, который определил $\zeta(s)$ для любых комплексных s, вновь вывел основное тождество, связывающее $\zeta(s)$ и $\zeta(1-s)$, оперируя уже в комплексной области и пользуясь аналитическим продолжением, и высказал знаменитую гипотезу о расположении нулей $\zeta(s)$ (см. стр. 338). Отправляясь от идей Римана, Ш. Ж. де ла Валле-Пуссен и Ж. Адамар в 1896 г. смогли доказать асимптотический закон распределения простых чисел, а именно сходимость $\pi(x)/\operatorname{li} x$ к 1 при $x \to \infty$, где $\pi(x)$ — это обозначение ввел Э. Ландау (1909) — обозначает число простых чисел, не превышающих x, а $\operatorname{li} x$ — интегральный логарифм $\int_2^x \frac{dx}{\ln x}$

[1] Эта функция такова: $\mu(1) = 1$; $\mu(n) = 0$, если n делится на какой-либо квадрат, больший единицы; $\mu(n) = (-1)^k$, если $n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \ldots p_k$, где все множители различные простые числа.

(ср. стр. 360). Мы упоминаем об этом потому, что еще Эйлер в письме к Гольдбаху от 28 октября 1752 г. высказал некоторые соображения о порядке роста функции $\pi(x)$. Однако начало долгой серии работ в этом направлении положил только Лежандр (см. стр. 119).

Трансцендентные числа

В рассматриваемое время были достигнуты успехи в изучении арифметической природы чисел e и π и поставлены важные проблемы теории трансцендентных чисел, решенные, впрочем, много позднее.

В иррациональности числа π математики были уверены с давних пор (см. т. I, стр. 77, 178, 198, 229). Впервые на особую природу этого числа, отличного от употребительных иррациональностей, указал, по-видимому, Валлис (1656), предвосхищая мысль о трансцендентности π. Таково же было мнение Дж. Грегори, пытавшегося доказать неалгебраичность как круговых, так и логарифмических функций (см. т. II, стр. 150—151). Вычисление π со все бо́льшим и бо́льшим числом знаков убеждало математиков, по крайней мере, в его иррациональности. Так, Д. Мечин (1706) нашел 100 десятичных знаков π, а Т. де Ланьи в «Мемуаре о квадратуре круга», представленном Парижской академии в 1717 г. («Mémoire sur la quadrature du cercle». Mém. Ac. Paris, (1719) 1721) еще более — 127 (см. стр. 331). Никакой закономерности в следовании цифр обнаружить не удавалось. В только что упомянутой работе Ланьи высказал замечательное предположение об иррациональности $\operatorname{tg} x$ при рациональном $x \neq 0$ и, наоборот, об иррационалыности дуги с рациональным тангенсом. Отсюда следовала бы иррациональность π, поскольку $\operatorname{tg}(\pi/4) = 1$. Догадка Ланьи была подтверждена полвека спустя.

Эйлер также приложил немало усилий к созданию различных эффективных приемов вычисления π, о них говорится далее (см. стр. 308). Его интересовала и теоретическая сторона проблемы квадратуры круга, и он не раз давал заключения о попытках ее точного решения, поступавшие в Петербургскую и Берлинскую академии.

В переписке Эйлера с Гольдбахом несколько раз поднимался вопрос о природе числа π. Оба полагали, что π не является рациональным числом, причем Эйлер еще не исключил возможности точного выражения π с помощью простых иррациональностей и логарифмов рациональных чисел. Во «Введении в анализ бесконечных» Эйлер прямо писал, что иррациональность π достаточно ясна. В статье, содержащей изящное геометрическое спрямление четверти круга, написанной в связи с одним построением Декарта и законченной в 1758 г. (Novi Commentarii, (1760—1761) 1763), Эйлер писал, что π следует отнести «к гораздо более высокому роду иррациональностей, которого можно достичь только посредством бесконечного повторения извлечения корней» [1].

Вероятно, он склонялся к мнению, что π трансцендентно, но все же осторожно замечал в одной статье 1775 г., что невозможность выражения π через «радикальные количества» никем еще не обнаружена (опубл. в «Аналитических сочинениях», т. II, 1785).

Первый крупный шаг в теоретическом изучении арифметической природы обоих чисел e и π сделал Иоганн Генрих Ламберт (1728—1777).

[1] *L. Euler.* Opera omnia, series I, t. 15, p. 1—2.



И. Г. Ламберт
(с литографии П. Р. Виньерона; городской музей в Мюлузе)

Ламберт был уроженцем Мюлуза в Эльзасе, который до Французской революции входил в Швейцарский союз. Сам Ламберт именовал себя Mulhusino-Helvetus (Мюлузо-швейцарцем). Сын бедного портного, вынужденный с ранних лет зарабатывать себе на жизнь перепиской рукописей, Ламберт, главным образом, самоучкой приобрел глубокие познания во всех областях науки и выдвинулся в ряды крупнейших ученых XVIII в. В физике он положил начало фотометрии, в астрономии вел исследования по небесной механике и высказал взгляды о развитии Вселенной, близкие к космогонической гипотезе Канта — Лапласа, в математике внес значительный вклад в теорию чисел, алгебру, анализ, теорию параллельных, учение о перспективе и т. д. Он писал и по вопросам философии. Несколько лет Ламберт работал в основанной в 1759 г. Мюнхенской академии наук, а с 1764 г.— в Берлинской академии, причем состоял членом обеих.

Иррациональность e и π Ламберт доказал в двух работах 1766 г.: в «Предварительных сведениях для ищущих квадратуру и спрямление круга» (Vorläufige Kenntnisse für die, so die Quadratur und Rectification des Circuls suchen), напечатанной во втором томе «Очерков о математике и ее применении» (Beiträge zur Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung. Berlin, 1770), и, более подробно, в «Мемуаре о некоторых замечательных свойствах круговых и логарифмических трансцендентных коли-

честв» (Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes circulaires et logarithmiques, Mém. Ac. Berlin, (1761) 1768).

Отправным пунктом доказательств Ламберта явились разложения в непрерывные дроби чисел e, $(e+1)/(e-1)$ и некоторых других, данные ранее Эйлером (для e такое разложение предложил еще Коутс в 1714 г.), а также приемы преобразования в непрерывные дроби бесконечных рядов, принадлежащие тому же Эйлеру (ср. стр. 47).

На этом пути Ламберт получил представления в форме бесконечных непрерывных дробей двух функций:

$$\frac{e^x-1}{e^x+1}=\cfrac{1}{\cfrac{2}{x}+\cfrac{1}{\cfrac{6}{x}+\cfrac{1}{\cfrac{10}{x}+\cfrac{1}{\cfrac{14}{x}+\ddots}}}}$$

$$\operatorname{tg} x=\cfrac{1}{x-\cfrac{1}{\cfrac{3}{x}-\cfrac{1}{\cfrac{5}{x}-\cfrac{1}{\cfrac{7}{x}-\ddots}}}}$$

(второе можно вывести из первого, пользуясь равенством

$$\operatorname{tg} x=\frac{1}{\sqrt{-1}}\,\frac{e^{2x\sqrt{-1}}+1}{e^{2x\sqrt{-1}}-1},$$

как это сделал Лежандр).

Из того, что обе непрерывные дроби бесконечны, следует, что при рациональных x ни $\operatorname{tg} x$, ни e^x не могут быть рациональными и, в частности, иррациональность e и π. Для полной строгости рассуждениям Ламберта не хватало доказательства того, что если в бесконечной непрерывной дроби

$$\cfrac{m}{n+\cfrac{m'}{n'+\cfrac{m''}{n''+\ddots}}}$$

числа m, n, m', n' — целые положительные или отрицательные, причем дроби m/n, m'/n', . . ., начиная с некоторой, меньше единицы, то значение этой дроби — иррациональное число. Это утверждение доказал А. М. Лежандр в IV приложении к его «Началам геометрии» (Eléments de Géométrie. Paris, 1800).

Ламберт не только доказал иррациональность e и π, но и был уверен, что они, как и e^x при рациональном $x \neq 0$, не принадлежат к числу, как он выразился во второй из упомянутых статей, «радикальных иррациональных количеств», а именно иррациональных корней алгебраических уравнений. Вслед за ним и Лежандр писал: «Представляется вероятным, что число π даже не принадлежит к классу алгебраических иррациональностей, т. е. что оно не может быть корнем никакого алгебраического

уравнения с конечным числом членов, коэффициенты которого рациональны. Но эту теорему, по-видимому, очень трудно строго доказать. Мы можем только показать, что и квадрат π есть иррациональное число» [1]. В самом деле, для такого доказательства требовались более сильные методы анализа, чем существовавшие в XVIII в.

Если e^x трансцендентно при рациональном $x \neq 0$, то это значит, что натуральные логарифмы рациональных чисел, кроме единицы, трансцендентны. В таком виде эту гипотезу высказал в письме к Гольдбаху от 28 апреля 1729 г. еще Д. Бернулли: гиперболические логарифмы рациональных чисел не выражаются ни в рациональных, ни в «радикальных» числах. Несколько позже (точная дата письма неизвестна) Д. Бернулли писал, что точные квадратуры гиперболы и круга либо обе возможны, либо обе невозможны, так как «между ними существует некоторая взаимозависимость через посредство мнимых чисел» [2]. Гольдбах, со своей стороны, утверждал, что может привести бесконечное число рядов, сумма которых, по нашей терминологии, суть трансцендентные числа, и в качестве примера указал 20 октября 1729 г. число

$$\sum_{k=1}^{\infty} 10^{-2^{k-1}} = 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}0001 + 0{,}00000001 + \ldots$$

Эйлер во «Введении в анализ бесконечных» (1748) утверждал, что при рациональном основании логарифм любого рационального числа, не являющегося рациональной степенью основания, есть «количество трансцендентное».

Доказательства всех этих предположений о трансцендентности были даны не скоро [3]. Первый достаточный критерий трансцендентности и примеры чисел, трансцендентность которых была строго доказана, привел Ж. Лиувилль (1844, 1851) [4]. В 1873 г. Эрмит доказал трансцендентность e, а Ф. Линдеман в 1882 г.— теорему, обобщающую результат Ламберта: e^z в алгебраической степени, отличной от нуля, не может быть рациональным числом. Так как, по формуле Эйлера, $e^{\pi i} = -1$, то πi, а значит, и π трансцендентно. Из другой, более общей теоремы Линдемана вытекает следствие, обобщающее предложение Д. Бернулли: натуральный логарифм любого алгебраического числа, не равного единице, трансцендентен. А. А. Марков в 1883 г. упростил доказательства теорем Эрмита и Линдемана.

Д. Гильберт в 1900 г. включил в список поставленных им 23 актуальных проблем математики вопрос об арифметической природе чисел вида

---

[1] *Архимед, Гюйгенс, Ламберт, Лежандр*. О квадратуре круга. Перевод С. Н. Бернштейна. М. — Л., 1934, стр. 209.

[2] «Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII^e siècle», t. II, p. 310.

[3] Напомним теперь, что алгебраическим называют всякое число, удовлетворяющее какому-либо алгебраическому уравнению с рациональными коэффициентами. остальные числа называются трансцендентными.

[4] Лиувилль строго построил первые примеры трансцендентных чисел. Через тридцать лет, в 1874 г., Г. Кантор методами теории множеств в общем виде установил, что в то время, как множество алгебраических чисел счетно (т. е. они могут быть перенумерованы) и имеет ту же мощность, что и совокупность натуральных чисел, множество трансцендентных чисел несчетно и имеет ту же мощность, что и множество всех действительных чисел. Тем самым в некотором смысле действительные числа, как правило, являются трансцендентными.

a^b, где a — алгебраическое число, не равное нулю или единице, а b — алгебраическое и иррациональное. Эту седьмую проблему Гильберта решил до конца в 1934 г. А. О. Гельфонд, доказавший трансцендентность всего того класса чисел. Тем самым было доказано в обобщенной форме предположение Эйлера: при алгебраическом основании логарифмы алгебраических чисел трансцендентны или рациональны.

Укажем, наконец, что трансцендентность числа Гольдбаха (см. стр. 113) доказал в 1938 г. Р. О. Кузьмин.

В XX в. теория трансцендентных чисел, ростки которой появились в рассматриваемое нами время, выросла в большой отдел теории чисел со своими собственными кругом проблем и методами.

Работы Лагранжа

Лагранж посвятил вопросам теории чисел девять работ, добавления к французскому изданию «Алгебры» Эйлера (Лион, 1774) и несколько глав в «Элементарных лекциях по математике, читанных в Нормальной школе» (Leçons élémentaires sur les mathématiques données à l'École normale. Paris, 1795).

Первая работа по теории чисел «Решение одной арифметической задачи» (Solution d'un problème d'arithmétique. Miscellanea Taurinensia, 1766—1769) была опубликована в Турине. Здесь ставилась задача решения в целых числах уравнения Ферма,— Лагранж еще не знал тогда о работах Эйлера в этом направлении. Он самостоятельно решил уравнение Ферма с помощью разложения $\sqrt{a}$ в непрерывную дробь. При этом он доказал, что дробь обязательно будет периодической.

В «Решении одной арифметической задачи» и в статье «О решении неопределенных задач второй степени» (Sur la solution des problèmes indeterminés du second degré. Mém. Ac. Berlin, (1767), 1769) Лагранж дал исчерпывающее исследование решений уравнения Ферма

$$x^2 - ay^2 = 1 \tag{11}$$

и неопределенного уравнения второго порядка от двух переменных

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{12}$$

в рациональных и целых числах. Он показал, что общее неопределенное уравнение второго порядка (12) можно всегда свести к уравнению вида

$$A = x^2 - By^2. \tag{13}$$

Таким образом, дело сводится к представлению числа A в виде

$$A = (x + y\sqrt{B})(x - y\sqrt{B}),$$

где $x + y\sqrt{B}$ — элемент поля $Q(\sqrt{B})$.

Отыскивая условия, необходимые и достаточные для разрешимости уравнения (13) в рациональных числах или, что то же, для возможности решения уравнения

$$Ar^2 = p^2 - Bq^2 \tag{14}$$

в целых числах, Лагранж пришел к рассмотрению делителей формы $z^2 - B$.

Действительно, как легко видеть, для разрешимости уравнения (14) необходимо, чтобы A было делителем формы $z^2 - B$ или $(B/t) = +1$, где t — простой делитель A. Для нахождения условий достаточности Лагранж применил алгоритм сведения уравнения (14) к уравнению того же вида

$$A_1 r^2 = p^2 - B_1 q^2,$$

но с меньшими коэффициентами, т. е. применил метод спуска; при этом A должно быть делителем $z^2 - B_1$. Повторяя тот же алгоритм, мы придем через конечное число шагов к уравнению

$$A_n r^2 = p^2 - B_n q^2,$$

где какой-либо коэффициент равен единице или полному квадрату, т. е. сведем дело либо к решению соответствующего уравнения Ферма, либо к уравнению

$$a^2 r^2 = p^2 - B_n q^2,$$

которое без труда решается общим методом.

Работа Лагранжа «О решении неопределенных задач второй степени» была написана, когда ее автор уже познакомился с трудами Эйлера об уравнении Ферма, и здесь Лагранж отмечал их недостатки. Вопросам решения в целых числах неопределенных уравнений второй степени общего вида посвящена еще одна работа Лагранжа «Новый метод для решения неопределенных задач в целых числах» (Nouvelle méthode pour resoudre les problèmes indéterminés en nombres entiers. Mém. Ac. Berlin, (1768) 1770).

Позднее в «Арифметических исследованиях» (Recherches d'arithmétique. Nouv. Mém. Ac. Berlin, (1773) 1775), исследуя вид делителей таких форм, Лагранж сделал замечательное открытие, положившее начало теории квадратичных форм.

Он обнаружил, что хотя все делители p чисел n, представимых в виде

$$n = u^2 \pm av^2, \qquad (15)$$

и не могут быть, вообще говоря, записаны формой того же вида, зато допускают представление

$$p = bx^2 \pm 2cxy \pm dy^2, \qquad (16)$$

где

$$\pm bd - c^2 = a.$$

Выражение $\pm bd - c^2 = a$ называется теперь, по Гауссу, дискриминантом форм (16), а форма (15) — главной формой данного дискриминанта a.

Лагранж фактически ввел понятие эквивалентности двух форм одного и того же дискриминанта (он говорил об их «тождественности»), положив, таким образом, начало теории классов форм, и доказал, что число таких классов всегда конечно. Для этого Лагранж доказал, что произвольную форму данного дискриминанта

$$bx^2 + 2cxy + dy^2,\ bd - c^2 = a, \qquad (17)$$

можно преобразовать конечным числом линейных подстановок:

$$x = Lx' + My', \quad y = lx' + my', \tag{18}$$

где $Lm - lM = \pm 1$, в приведенную форму того же дискриминанта, т. е. такую форму

$$px^2 + 2qxy + ry^2, \quad pr - q^2 = a, \tag{19}$$

что

$$2|q| \leqslant |p|, \quad 2|q| \leqslant |r|.$$

Совершенно ясно, что если какое-нибудь число n представимо некоторой формой вида (17), то оно будет представимо и всеми эквивалентными ей формами. Это оправдывает гауссово наименование таких форм эквивалентными, т. е. равнозаменяемыми во всех вопросах о представлении. Таким образом, каждой форме данного дискриминанта ставится в соответствие приведенная форма. Это соответствие при данном Лагранжем способе приведения неоднозначно: одной и той же форме могут соответствовать несколько приведенных форм. Однако, как показывает Лагранж, все такие приведенные формы будут эквивалентны между собой.

Лагранж показывает далее, что существует только конечное число различных (т. е. неэквивалентных) приведенных форм данного дискриминанта.

Утверждение Лагранжа, согласно которому всякий делитель p формы $bx^2 + 2cxy + dy^2$, где $(x, y) = 1$ может быть представлен в такой же форме и с тем же дискриминантом a, в сущности означает, что p есть делитель нормы некоторой квадратичной иррациональности, зависящей от $\sqrt{-a}$. Иными словами, эта теорема утверждает, что всякий делитель нормы есть норма идеала. Из результатов этой статьи следует, что число классов идеалов конечно. Метод приложения теории делителей квадратичных форм к разложению чисел на множители был впоследствии усовершенствован П. Л. Чебышевым в «Теории сравнений» (1849).

В 1770 г. была опубликована небольшая статья Лагранжа «Доказательство одной арифметической теоремы» (Démonstration d'un théorème d'arithmétique. Nouv. Mém. Ac. Berlin, (1770) 1772). Здесь Лагранж дал полное доказательство теоремы Баше де Мезириака о четырех квадратах (см. стр. 102), которое Эйлер упростил в Nova acta eruditorum за 1773 г.

В работе «О некоторых задачах диофантова анализа» (Sur quelques problèmes de l'analyse de Diophante. Nouv. Mém. Ac. Berlin, (1777) 1779) Лагранж рассмотрел задачу Ферма об отыскании прямоугольного треугольника, у которого сумма катетов p, q и гипотенуза суть квадратные числа, т. е. $p + q = y^2$, $p^2 + q^2 = x^4$. Если положить $p - q = z$, то получается уравнение $2x^4 - y^4 = z^2$. Ферма утверждал, что наименьшие натуральные значения x, y, z, при которых p и q оба целые и положительные, суть $x = 2\,165\,017$, $y = 2\,372\,159$, $z = 1\,560\,590\,745\,759$, причем $p = 1\,061\,652\,293\,520$, $q = 4\,565\,486\,027\,761$. Для решения указанного уравнения и доказательства утверждения Ферма Лагранж применил метод, сходный с методом спуска, который характеризовал как один из самых плодотворных в теории чисел.

Арифметические вопросы затрагивались Лагранжем также в его «Лекциях по математике». Здесь говорилось о важности теории чисел для всех математических наук. В лекциях рассмотрены признаки делимости, а затем теория вычетов, где использованы результаты Эйлера по тео-

рии степенных вычетов. Здесь доказаны некоторые свойства вычетов, которые легко сформулировать как свойства сравнений. У Лагранжа не было лишь этого понятия.

Упомянем еще, что в статье Лагранжа о трехгранных пирамидах, опубликованной в 1775 г. (см. стр. 181), содержатся первые ростки будущей геометрической теории чисел.

Теорема Вильсона; проблемы Варинга и Гольдбаха

В «Алгебраических размышлениях» (1770) Варинга Лагранж нашел следующую теорему: если n какое-нибудь простое число, то число $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\ \ldots\ (n-1)+1$ всегда будет делиться на n, т. е. если разделить произведение $(n-1)!$ на простое число n, получится в остатке $n-1$ или -1. Варинг считал доказательство этой теоремы, принадлежащей, по его словам, Джону Вильсону (1741—1793), воспитаннику и некоторое время преподавателю Кембриджского университета, очень трудным. Лагранж в «Доказательстве одной новой теоремы относительно простых чисел» (Démonstration d'un théorème nouveau concernant les nombres premiers. Nouv. Mém. Ac. Berlin, (1771) 1773) привел два доказательства теоремы Вильсона. Предложение Вильсона в принципе дает возможность узнать, является ли некоторое n простым, но Лагранж указал, что этот метод ввиду быстрого роста $n!$ очень трудоемкий, и предлагал другим математикам упростить его. Лагранж доказал и другие теоремы Варинга. В 1773 г. теорему Вильсона вновь доказал Эйлер («Аналитические сочинения», т. I, 1783).

В «Алгебраических размышлениях» Варинга имеется целый ряд новых теоретико-числовых теорем, в частности высказана без доказательства знаменитая «проблема Варинга»: «Каждое целое число есть или куб или составлено из двух, трех, четырех, пяти, шести, семи, восьми или девяти кубов; есть квадрато-квадрат или составлено из двух, трех и т. д. до девятнадцати квадрато-квадратов и т. д. Кажется поэтому, что можно утверждать то же самое для любого числа величин любого измерения» [1].

Здесь же Варинг привел без доказательства утверждение, известное под именем гипотезы Гольдбаха: «Каждое четное число есть сумма двух простых чисел, и каждое нечетное число является простым или суммой трех простых чисел» [2]. В несколько ином виде эти утверждения были высказаны много ранее в переписке Гольдбаха с Эйлером, которая, однако, была впервые опубликована только в 1843 г. А именно Гольдбах сформулировал ее в письме 7 июня 1742 г. так: «Представляется, что каждое число, большее, чем 2, есть сумма трех простых чисел» [3], причем он относил к простым числам и единицу. В нескольких примерах, им указанных, четные числа были представлены также суммой двух простых. Эйлер 30 июня ответил, что, как это заметил Гольдбах еще ранее, каждое четное число есть сумма двух простых, а нечетное, в таком случае, сумма трех простых. «Но что каждое четное число есть сумма двух простых, я считаю несомненной теоремой, хотя и не могу ее доказать» [4].

---

[1] *E. Waring*. Meditationes algebraicae. Ed. III. Cantabrigae, 1782, p. 349.
[2] Там же, стр. 379.
[3] *L. Euler* und *Chr. Goldbach*. Briefwechsel, 1729—1764. Berlin, 1965, S. 104.
[4] Там же, стр. 111. В бумагах Декарта есть замечание, что всякое число есть сумма не более трех простых, но оно было опубликовано лишь в его «Oeuvres» (v. 10, Paris, 1908, p. 298).

Теперь под гипотезой Варинга понимают следующее утверждение: для любого целого k существует целое $s = s(k)$, зависящее только от k, такое, что каждое целое число N есть сумма не более s k-х степеней, т. е. для каждого k существует s, зависящее только от k, такое, что уравнение

$$N = n_1^k + n_2^k + \ldots + n_s^k$$

имеет хоть одно решение в целых неотрицательных числах.

Первое решение проблемы Варинга дал в 1909 г. Д. Гильберт, который установил существование для любого k соответствующего $s(k)$, но для самого s получил еще слишком большие значения. Оценки величины s были улучшены в 20-е годы Г. Харди и Дж. Литлвудом, которые показали, что для всех достаточно больших N число слагаемых s есть величина порядка $k \cdot 2^k$. В 1934 г. И. М. Виноградов, применив свой новый метод тригонометрических сумм, резко улучшил оценку: s есть величина порядка $k \ln k$.

Успехи в решении проблемы Гольдбаха были получены несколько позднее. В 1930 г. Л. Г. Шнирельман с помощью оригинального метода решил проблему Гольдбаха в ослабленной постановке, доказав, что всякое целое число есть сумма ограниченного числа простых чисел. Подсчетом этого числа k занимались многие ученые, до сих пор его удалось снизить до 20.

Применяя свой только что упомянутый метод, И. М. Виноградов вывел асимптотическое выражение для числа представлений нечетного $N > 0$ в виде суммы трех простых чисел. Отсюда следовало, что всякое достаточно большое нечетное число можно представить в виде суммы трех простых чисел (1937). С помощью метода Виноградова было показано также, что почти все четные числа можно представить суммой двух простых. Однако этого еще не удалось доказать для всех четных чисел, хотя бы начиная с некоторого.

«Опыт теории чисел» Лежандра

Итог работам по теории чисел в XVIII в. подвел Адриан Мари Лежандр (1752—1833), воспитанник Колледжа Мазарини и с 1775—1780 гг. преподаватель Военной школы в Париже, а с 1783 г. член Парижской академии наук. В годы Французской революции Лежандр активно участвовал в Комиссии по введению метрической системы, в частности, в измерении длины одного градуса между Дюнкерком и Барселоной для установления эталона метра, с 1795 г. стал профессором Нормальной школы, а в 1799 г. заменил на посту экзаменатора Политехнической школы Лапласа, с которым он вместе преподавал ранее в Военной школе. Для среднего образования выдающееся значение имели его уже не раз упоминавшиеся «Начала геометрии», выдержавшие множество изданий при его жизни и посмертных переработок другими авторами.

В своем творчестве Лежандр охватил многие области математики и существенно продвинул прежде всего, не считая теории чисел, теорию эллиптических интегралов, теорию потенциала (разрабатывая которую ввел шаровые функции), вариационное исчисление (вторая вариация), теорию ошибок измерений (метод наименьших квадратов). Эти исследования его мы рассмотрим в дальнейшем, а сейчас обратимся к его «Опыту теории

чисел» (Essai sur la théorie des nombres. Paris, 1798) — первому полному и последовательному изложению результатов по теории чисел, полученных как его предшественниками, так отчасти им самим. Это сочинение имело заслуженный успех и дважды переиздавалось при жизни Лежандра: в 1808 и в 1830 гг., когда оно вышло под названием «Théorie des nombres». Имеется также издание 1900 г. Во втором издании были добавлены некоторые результаты Гаусса (1801), в третьем — подробное изложение метода Гаусса для решения двучленных уравнений, доказательство Коши теоремы о многоугольных числах, доказательство последней теоремы Ферма для $n = 5$ (Лежен-Дирихле — Лежандра) и некоторые другие вещи.

Ознакомившись с «Аналитическими сочинениями» (Opuscula Analytica. Petropoli, 1783) Эйлера, Лежандр предпринял первую попытку доказать закон взаимности в статье «Исследования по неопределенному анализу» (Recherches d'analyse indeterminée. Mém. Ac. Paris, (1785) 1788). Современная формулировка закона была дана Лежандром в «Опыте теории чисел»[1]. С помощью закона взаимности Лежандр доказал ряд утверждений Эйлера и других теорем. Свой символ $\left(\frac{N}{c}\right)$ для обозначения остатка от деления $N^{\frac{c-1}{2}}$ на простое число c, равного $+1$ или -1, Лежандр ввел в первом же издании «Опыта теории чисел». Здесь «закон взаимности» (la loi de réprocité) получил свое наименование, современную символическую запись и новое доказательство, в котором Лежандр постарался восполнить пробелы, которые сам видел в предыдущем. Однако доказательство Лежандра так и осталось неполноценным, на что указал в 1801 г. Гаусс.

В книге Лежандра введен также символ $E(x)$ для обозначения целой части (entier) числа x; он использован для определения наибольшей степени данного числа m, которая содержится в $n!$

Вторым крупным вкладом Лежандра в теорию чисел было исследование функции $\pi(x)$, выражающей число простых чисел, не превосходящих x. Оценка $\pi(x)$ интересовала еще Эйлера. Во втором томе второго издания своей книги (1808) Лежандр предложил асимптотическую формулу для функции

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x - 1{,}08366}.$$

Сверив результаты, полученные по этой приближенной формуле, с результатами таблиц простых чисел от 10 000 до 1 000 000, Лежандр показал, что они очень близки. Он пытался также доказать формулу с помощью интегрального исчисления. Его рассуждения не были убедительны, но интересно, что Лежандр с самого начала желал привлечь к доказательству закона распределения простых чисел и средства математического анализа.

Абель в одном письме 1823 г. назвал это предложение Лежандра самым замечательным во всей математике. Все же эта действительно замечательная формула не была строгой. Из нее следовало бы, что $\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x}{\pi(x)} - \ln(x)\right] = -1{,}08366$, но последнее неверно: в 1848 г. П. Л. Чебышев доказал, что этот предел, если он существует, есть -1. Подробно рассмотрев вопрос о приближенном выражении функции $\pi(x)$, П. Л. Чебышев установил, что среди функций вида $x/(A \ln x + B)$ только функция $x/(\ln x - 1)$ может представить $\pi(x)$ с точностью до величины порядка $x/\ln^2 x$, а еще

[1] *А. М. Legendre.* Essai sur la théorie des nombres. Paris, 1798, p. 210.

лучшие приближения дает $\mathrm{li}\, x = \int_2^x \frac{dx}{\ln x}$. О доказательстве асимптотического закона распределения простых чисел в 1896 г. мы уже упоминали (см. стр. 109).

Лежандр нестрого доказал еще несколько предложений, например, теорему о том, что всякая арифметическая прогрессия, первый член и разность которой взаимно просты, содержит бесконечное множество простых чисел. Лежандр указывает промежуток, в котором должно найтись хоть одно простое число. Теорему об арифметических прогрессиях, которую в виде предположения несколько ранее высказал Эйлер, доказал в 1837 г. Дирихле (ср. стр. 109).

Отметим еще метод определения числа членов произвольной арифметической прогрессии, не делящихся ни на какое из простых чисел, содержащихся в данной прогрессии. В частном случае получается аналитическая запись процесса решета Эратосфена — для количества чисел, остающихся в натуральном ряде после исключения всех чисел, делящихся на 2, 3, 5, 7, . . . В 1857 г. эта формула была вновь найдена Лиувиллем и Дедекиндом. Когда вышло первое издание «Опыта» Лежандра, молодой Гаусс уже подготовил к печати свой классический труд, выход которого три года спустя открыл новую эпоху в развитии теории чисел.

«Арифметические исследования» Гаусса

К концу XVIII в. относится начало деятельности Карла Фридриха Гаусса (1777—1855). Так как его творчество и по времени и по духу в большей части принадлежит XIX в., мы ограничимся лишь немногими замечаниями о жизненном пути этого великого человека, оказавшего сильное влияние на прогресс математических наук. Гаусс родился в Брауншвейге в семье водопроводчика. Впоследствии он говорил друзьям, что научился считать раньше, чем говорить. В народной школе учитель обратил внимание на математические способности маленького Гаусса, после того как тот быстро просуммировал в классе числа $1 + 2 + \ldots + 40$, заметив, что эта сумма есть $(1 + 40) + (2 + 39) + \ldots$, т. е. $41 \cdot 20$. Молодой помощник учителя М. Бартельс (1769—1836), который впоследствии был в Казани университетским профессором Н. И. Лобачевского, начал заниматься с мальчиком и, убедившись в его исключительных способностях, добился того, что герцог Брауншвейгский оказал ему материальную помощь для получения образования.

В математике Гаусс с ранних лет пошел собственным путем. Уже в 14—15 лет он занялся изучением свойств арифметически-геометрического среднего (конечно, не зная еще о роли этого понятия в будущей теории эллиптических функций [1]), простыми числами, теорией параллельных.

[1] Арифметически-геометрическим средним Гаусс назвал общий предел M (m, n), к которому стремятся последовательности чисел m_k, n_k, образуемых из данных положительных чисел m, n следующим образом:

$$m_1 = \frac{m+n}{2}, \quad n_1 = \sqrt{mn}, \quad m_2 = \frac{m_1+n_1}{2}, \quad n_2 = \sqrt{m_1 n_1}$$

и т. д. В 1799 г. он установил связь между арифметико-геометрическим средним и длиной дуги лемнискаты, выражаемой некоторым эллиптическим интегралом. Через год он уже приступил к разработке теории эллиптических функций.



К. Ф. Гаусс
(с портрета Хр. А. Шварца, 1803 г.)

В 1795 г. он изобрел метод наименьших квадратов. 30 марта 1796 г. он нашел правило построения правильного 17-угольника с помощью циркуля и линейки (об этом по инициативе одного профессора даже появилось краткое сообщение в печати за подписью «Гаусса из Брауншвейга, студента математики в Гёттингене»). До того времени Гаусс еще не решил, выбрать ли себе специальностью древние языки или математику, и удачное решение этой задачи побудило Гаусса посвятить себя математике. Через 10 дней после первого замечательного открытия Гаусс нашел доказательство вновь обнаруженного им квадратичного закона взаимности. В тот же год он индуктивно открыл закон распределения простых чисел: $\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x}$ при $x = \infty$. Обучаясь в 1795—1798 гг. в Гёттингенском университете, он посещал здесь лекции престарелого Кестнера, которые не оказали, да и не могли по своему уровню оказать на него какое-либо влияние. Впоследствии Гаусс, вспоминая о нем, говорил, что Кестнер обладал выдающимся природным остроумием во всем, даже когда говорил о математике вообще, но утрачивал его, если речь шла о более специальных математических вопросах. Зато Гаусс читал труды Ньютона, Эйлера, Лагранжа, Лежандра, а еще более черпал в глубинах своего личного гения. Большинство сделанных им в то время открытий, кроме теоретико-числовых, он опубликовал после более глубокой разработки много позднее, следуя девизу, выгравированному на его печати: pauca, sed matura (немногое, но зрелое); некоторые увидели свет только при посмертном издании его бумаг. Мы уже знаем, что в 1797 г. Гаусс оригинально доказал основную теорему алгебры, и это «Новое доказательство теоремы о том, что любая целая рациональная алгебраическая функция одного переменного может быть разложена на действительные множители первой или второй степени», опубликованное в 1799 г., явилось первой его печатной работой. Впоследствии, не вполне удовлетворенный своим первым доказательством, он предложил еще три других в 1815, 1816 и 1849 гг. (последнее уточняет доказательство 1797 г.; ср. стр. 74). «Новое доказательство теоремы...» в корректурных листах было направлено в Гельмштедтский университет профессору И. Пфаффу, и Гауссу заочно присудили докторскую степень. С 1799 г. он работал приват-доцентом университета в Брауншвейге, а с 1807 г. до конца жизни был профессором в Гёттингене и директором местной астрономической обсерватории. С именем Гаусса связаны фундаментальные исследования почти во всех основных областях математики: алгебре, дифференциальной и неевклидовой геометрии, в математическом анализе, теории функций комплексного переменного, теории вероятностей, а также в астрономии, геодезии, механике и теории магнетизма.

Работы прикладного характера занимали в его творчестве видное место и сообщили ряд стимулов его собственно математическим занятиям. Наука, говорил Гаусс, должна быть подругой практики, добавляя: подругой, но не рабыней. И, подобно Эйлеру, Гаусс был преимущественно математиком. В беседах с друзьями он называл математику царицей наук, а теорию чисел — царицей математики.

Знаменитые «Арифметические исследования» (Disquisitiones arithmeticae), которые послужили источником новых идей и одновременно моделью для арифметических теорий XIX в., находившиеся в типографии еще в 1798 г., вышли из печати в Гёттингене летом 1801 г. Хотя содержа-

ние книги было по существу новым и относилось к исследованию арифметики квадратичных полей и построению алгебры над конечным полем, форма ее оставалась еще старой. Арифметика полей алгебраических чисел изучалась без введения этих чисел, как теория квадратичных форм, а алгебра над конечным полем строилась без введения самого понятия конечного поля, как теория сравнений. Здесь же было положено начало изучению структуры конечных коммутативных групп, опять-таки без определения понятия группы (см. стр. 95). Последующие поколения математиков обращались к книге Гаусса так же, как ученые XVII в. к книгам Архимеда, чтобы уяснить себе его методы, перевести его результаты на новый язык, почерпнуть там способы конструкций и свойства новых объектов.

Остановимся вкратце на содержании «Арифметических исследований». Книга состоит из семи разделов. Первые шесть посвящены теории сравнений и теории квадратичных форм, последний раздел — исследованию уравнений деления круга (о нем см. стр. 94).

Сравнения уже применялись, по существу, в работах Эйлера, Лагранжа и Лежандра. Накопленные сведения были преобразованы Гауссом в стройную теорию, которая играет в высшей арифметике такую же роль, как теория уравнений в алгебре.

Два целых числа a и b Гаусс называет сравнимыми по модулю p, если разность $a - b$ делится на p. Он записывает это следующим образом:

$$a \equiv b \pmod{p}.$$

Легко проверить, что отношение сравнения обладает всеми свойствами отношения равенства: рефлексивностью, симметричностью и транзитивностью. Поэтому оно разбивает множество целых чисел на непересекающиеся классы сравнимых между собой чисел, которые называются классами вычетов по модулю p. Множество классов вычетов по любому модулю образуют коммутативную группу по сложению, а классы вычетов по простому модулю образуют поле. Это был первый пример конечного поля.

Теорию сравнений Гаусс развивает по аналогии с теорией алгебраических уравнений: сперва он рассматривает сравнения первой степени

$$ax + b \equiv c \pmod{p},$$

затем переходит к сравнениям вида

$$x^n \equiv A \pmod{p}$$

и развивает теорию степенных вычетов, наконец, отдельно он изучает сравнения второй степени

$$x^2 \equiv a \pmod{p},$$

которые изложены с наибольшей полнотой. Гаусс показывает, что сравнение степени n не может иметь более n корней, доказывает существование первообразного корня по любому простому модулю (т. е. такого числа a, что сравнение $a^k \equiv 1 \pmod{p}$ имеет место при $k = p - 1$ и не выполняется при $k < p - 1$), вводит понятие индекса, являющееся аналогом логарифма.

Здесь же дается первое строгое доказательство квадратичного закона взаимности, который Гаусс назвал фундаментальной теоремой. Стремясь к наиболее естественному выводу этого замечательного закона, Гаусс нашел еще семь его доказательств, из которых второе также помещено в «Арифметических исследованиях», а шесть других были опубликованы позже. Все доказательства Гаусса основываются на различных принципах. Впоследствии математики не раз возвращались к поискам «естественного» доказательства этого закона. В настоящее время существует более 40 его доказательств.

Центральное место в книге занимает теория квадратичных форм, которую Гаусс систематически развил для форм от двух переменных и исследовал также для форм от трех переменных. Следуя Лагранжу, он рассмотрел множество форм $ax^2 + 2bxy + cy^2$ одного и того же дискриминанта $D = a - b^2$ и разбил их на непересекающиеся классы эквивалентных между собой форм [1]. Для этих классов Гаусс ввел закон композиции, причем установил, по существу, что эти классы форм образуют коммутативную группу. Это было одно из первых определений закона композиции для объектов, отличных от чисел. Гаусс отмечает аналогию между композицией классов форм и умножением классов вычетов по простому модулю. Все рассуждения он проводит с максимальной степенью общности, хотя и добавляет, что границы его труда не позволяют в нем изложить теорию классов форм с надлежащей полнотой. По некоторым замечаниям Гаусса можно заключить, что он знал, что группа классов форм не всегда является циклической, но распадается в прямую сумму циклических подгрупп.

Только много позже, исследуя биквадратичные вычеты, Гаусс пришел к убеждению, что «применявшиеся до сих пор арифметические принципы ни в коем случае недостаточны для обоснования общей теории, а что эта теория с необходимостью требует в некотором смысле бесконечно расширить область высшей арифметики» («Теория биквадратичных вычетов», Theoria residuorum biquadraticorum, ч. I, 1828) [2]. Такое явное расширение области целых чисел Гаусс сделал во второй части мемуара «Теория биквадратичных вычетов» (1832), в которой он ввел целые комплексные числа как выражения вида $a + bi$, где i — корень неприводимого уравнения $x^2 + 1 = 0$, а a и b — обычные целые числа [3]. Он перенес на эти новые числа всю ту арифметическую структуру, которая была развита для целых рациональных чисел: определил простые и составные числа, ввел алгоритм Евклида, доказал однозначность разложения каждого целого числа на простые множители, построил для новых чисел теорию степенных вычетов, доказал аналог малой теоремы Ферма, ввел понятие первообразного корня и развил теорию индексов. Наконец, он сформулировал для целых комплексных чисел квадратичный закон взаимности. Таким обра-

---

[1] Гаусс называет две формы F и F' собственно эквивалентными (proprie aequivalentes), если одна из них переходит в другую при подстановке

$$x = \alpha x' + \beta y',$$
$$y = \gamma x' + \delta y',$$

где $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Если $\alpha\delta - \beta\gamma = -1$, то Гаусс называет формы F и F' несобственно эквивалентными (improprie aequivalentes).

[2] *К. Ф. Гаусс.* Труды по теории чисел. Перевод В. Б. Демьянова. Редакция И. М. Виноградова, комментарии Б. Н. Делоне. М., 1959, стр. 655.

[3] В этом же мемуаре Гаусс дал геометрическую интерпретацию комплексных чисел, которая стала с тех пор общепринятой (см. стр. 65).

зом, здесь впервые арифметическая структура была оторвана от своего первоначального носителя — целых рациональных чисел — и перенесена в иную область. С помощью целых комплексных чисел Гаусс сформулировал биквадратичный закон взаимности для обыкновенных целых чисел.

Гаусс понимал, что это только начало необъятной области исследований, он писал, что для изучения кубических вычетов надо будет рассмотреть числа вида $a + b\rho$, где $\rho^3 = 1$, $\rho \neq 1$, что вскоре и было сделано Ф. Эйзенштейном. О впечатлении, которое произвела теория Гаусса, свидетельствует тот факт, что вплоть до Дедекинда алгебраические числа называли «комплексными», и это даже в том случае, если они принадлежали полю действительных чисел, как, например, $a + b\sqrt{3}$.

В XIX в. в работах П. Лежен-Дирихле, Э. Куммера, Р. Дедекинда, Е. И. Золотарева и Л. Кронекера была построена арифметика полей алгебраических чисел. При этом было уточнено само понятие целого числа из заданного поля алгебраических чисел. Однако математики встретились здесь при попытке построения арифметики с новыми трудностями: Куммер заметил, что для таких чисел не имеет места закон однозначности разложения на простые множители, если считать простыми те целые числа, которые нельзя разложить в произведение двух множителей, отличных от единиц. Для построения арифметики круговых полей он ввел в 1847 г. идеальные множители, а арифметика в любых полях была построена Дедекиндом, Золотаревым и Кронекером в 70-х годах XIX в. При этом оказалось, что вся теория квадратичных форм Гаусса эквивалентна арифметике квадратичных полей, построенной с помощью идеалов Дедекинда, идеальных множителей Золотарева или дивизоров Кронекера. Но и дальше, вплоть до работ Д. Гильберта, развитие алгебраической теории чисел следовало не только духу, но и букве Гаусса. Идеи, содержащиеся в скрытой форме в работах Гаусса, получили здесь свое полное воплощение. Исследования законов взаимности для вычетов высших степеней, начатые Гауссом и продолженные Эйзенштейном и Якоби (кубический закон), велись до наших дней Куммером, Гильбертом, Э. Артином и другими. Наиболее общую форму закона взаимности для любых полей алгебраических чисел установил И. Р. Шафаревич (1949).

ЧЕТВЕРТАЯ ГЛАВА

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

От Я. Бернулли до Муавра

Начало XVIII в. ознаменовалось посмертной публикацией «Искусства предположений» Я. Бернулли (1713 г.: см. т. II, гл. 5). Доказанный в ней закон больших чисел оказал сильнейшее влияние на последующее развитие теории вероятностей. Обычно закон больших чисел Я. Бернулли записывают в виде

$$\lim_{\nu\to\infty} P\left\{\left|\frac{\mu}{\nu}-p\right|<\varepsilon\right\}=1,$$

где p — вероятность осуществления события при каждом испытании, μ — количество появлений события при ν испытаниях. Но сам Бернулли сформулировал свой закон в виде, который является прообразом локальной предельной теоремы. Именно, он оценил отношение суммы $2n$ членов ряда $(r+s)^{(r+s)n}$, симметрично расположенных относительно максимального члена, к сумме остальных членов ряда и соответственно получил при $(r+s)\,n \geqslant 8226 + 5758\ \lg c$

$$P\left\{-\frac{1}{r+s}\leqslant\frac{\mu}{(r+s)\,n}-\frac{r}{r+s}\leqslant\frac{1}{r+s}\right\}>\frac{c}{1+c}.$$

Здесь $c>0$ — любое наперед заданное число, $(r+s)\,n$ — число испытаний (ν) и $r:(r+s)$ — вероятность (p), причем $(r+s)$ может быть сделано сколь угодно большим.

Хотя Я. Бернулли и предполагал применить вероятностные рассуждения «к гражданским, моральным и экономическим вопросам», но он этого не сделал, оставив свою книгу незавершенной по сравнению с первоначальным планом. Книга обрывается после доказательства «теоремы Бернулли». В этом направлении работа была продолжена племянником Якова и Иоганна Бернулли, Николаем I Бернулли (1687—1759), который посвятил этим вопросам свой «Опыт применения искусства предположений к правовым вопросам» (Specimina artis conjectandis ad quaestiones juris applicatae, 1709; краткое изложение также в Actorum erud. suppl., 1711). Здесь теоретико-вероятностные идеи и методы применялись к оценке свидетельских показаний, к объявлению безвестно-отсутствующих умершими, подсчетам пожизненных рент, вопросам смертности, страхования жизни и товаров, а также к так называемому генуэзскому лото, на основе

которого впоследствии возникло нумерное лото. Таким образом, уже в начале XVIII в. было положено начало и различным «моральным» приложениям теории вероятностей, которым впоследствии уделяли внимание крупнейшие математики, включая Лапласа.

Но роль Н. Бернулли отнюдь не ограничивается указанным выше. Он был редактором посмертного издания «Искусства предположений» Я. Бернулли, опубликовал несколько статей по теории вероятностей, состоял в переписке с рядом математиков. Заслуживает упоминания, что в «Опыте применения искусства предположений» Н. Бернулли вывел формулу для математического ожидания длины случайного интервала AB, образованного фиксированной точкой A и самой правой из случайных точек B_i ($i = 1, 2, \ldots, n$), равномерно распределенных на заданном отрезке AB ($B_i \leqslant C$). Эта задача, сформулированная в терминах смертности n человек и решенная при условии $n \to \infty$, была первой, в которой вводились непрерывное равномерное распределение и, одновременно, порядковая статистика (наибольший элемент из выборки).

Другой специальный результат Н. Бернулли относится к классической задаче о соотношении количеств рождений мальчиков и девочек. Приняв биномиальное распределение с параметром $m : f$ для вероятности новорожденному оказаться мальчиком, Бернулли определил вероятность ежегодному числу рождений мальчиков μ находиться в заданных пределах (n — общее ежегодное количество рождений, $r = n : (m + f)$):

$$P\{|\mu - rm| \leqslant l\} \approx \frac{t-1}{t}, \quad t \approx \left[1 + \frac{l(m+f)^2}{mfn}\right]^{l\,2} \approx \exp\left[\frac{l^2(m+f)^2}{2mfn}\right]$$

и (чего уже нет у Н. Бернулли) при $m : (m + f) = p$, $f : (m + f) = q$

$$P\{|\mu - rm| \leqslant l\} \approx 1 - \exp\left(\frac{-l^2}{2pqn}\right). \qquad (1)$$

Как и Я. Бернулли, Н. Бернулли в своем выводе опирался на алгебраическое изучение сумм отрезков биномиального ряда и отношений этих сумм к сумме «среднего» отрезка ряда. В рассуждении Н. Бернулли, хотя и в косвенной форме, впервые фактически участвовала показательная функция вида e^{-x^2}, а само рассуждение, как и у Я. Бернулли, является прообразом локальной предельной теоремы.

Отметим, что $pqn = D\mu$, где D — символ дисперсии, и что формула (1), исправленная числовым множителем $\sqrt{2/\pi} \approx 0{,}80$, могла бы служить для подсчетов в соответствии с интегральной предельной теоремой.

Изложенные результаты Н. Бернулли сообщил 23 января 1713 г., т. е. еще до выхода в свет «Искусства предположений», в письме к любителю математики П. Р. де Монмору (1678—1719). Монмор опубликовал это письмо во втором издании своего «Опыта анализа азартных игр» (Essai d'analyse sur les jeux de hazard, 1708 и 1713, p. 388—393) и впоследствии на это письмо сослался Муавр.

В «Опыте» содержался теоретико-вероятностный разбор ряда азартных игр, а во втором издании в качестве приложений приведена переписка автора с Н. Бернулли и И. Бернулли. Одна из игр (le her) приводила к затруднениям, которые были решены лишь в современной теории игр на основе принципа минимакса.

Предельные теоремы А. де Муавра

Француз по национальности и гугенот по религиозной принадлежности, Абрахам де Муавр[1] (1667—1754) вынужден был покинуть Францию, где, после отмены Нантского эдикта (1685), гарантировавшего гугенотам, т. е. протестантам, свободу вероисповедания, от него ни насилием, ни угрозами не смогли добиться перехода в католичество. Примерно в 1688 г. ему удалось переселиться в Лондон, где он и прожил всю остальную жизнь. Здесь он самостоятельно восполнил свое математическое образование и вскоре выдвинулся как талантливый математик; в 1697 г. он был избран членом Королевского общества. Он пользовался благожелательным отношением и уважением Ньютона, латинское издание «Оптики» которого вышло в свет при большом редакционном участии Муавра. В поздние годы своей жизни Ньютон имел обыкновение отсылать к Муавру всех, обращавшихся к нему, Ньютону, с вопросами математического характера. Однако новая родина Муавра не обеспечила ему какого-нибудь официального положения и материального обеспечения и зарабатывал он на жизнь частными уроками да платными консультациями. В 1735 г. Муавр был избран членом Берлинской академии наук, а незадолго до смерти (1754) — иностранным членом Парижской академии.

Основные теоретико-вероятностные сочинения Муавра таковы: «Учение о случаях, или метод вычисления вероятности событий при игре» (The doctrine of chances: or, a method of calculating the probability of events in play. London, 1718, 1738, 1756), развернутое из объемистой статьи «О мере случая» (De mensura sortis, 1711. Philos. Trans., 1712) и «Аналитические этюды о рядах и квадратурах» (Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis. Londini, 1730) с двумя, очевидно, позднее приплетенными дополнениями. Второе дополнение, датированное 1733 г., имеется лишь у нескольких экземпляров книги, но в переводе на английский язык оно включено в позднейшие издания «Учения о случаях». Именно в этом дополнении — «Метод аппроксимации суммы членов разложенного в ряд бинома $(a+b)^n$ с выводом некоторых практических правил для оценки степени согласия, которую следует придать экспериментам» (A method of approximating the sum of the terms of the binomial $(a+b)^n$ expanded into a series, from whence are deduced some practical rules to estimate the degree of assent which is to be given to experiments) — Муавр доказал теоремы, которые сейчас называются локальной и интегральной предельными теоремами Муавра — Лапласа. Не владея, разумеется, введенным позднее понятием равномерной сходимости, Муавр доказал (например, в случае интегральной теоремы), что

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{a \leqslant \frac{\mu - np}{\sqrt{npq}} \leqslant b\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{z^2}{2}} dz, \qquad (2)$$

где μ — число наступлений события в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность этого события равна $p \equiv 1 - q$. При выводе своих теорем Муавр широко использовал разложения функций в степенные ряды, а также так называемую формулу Стирлинга

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n},$$

[1] Первоначальная фамилия А. де Муавра была просто Муавр; он был сыном врача. Частицу «де» он добавил к своей фамилии сам.



А. Муавр
(с портрета Хаймора, хранящегося в Лондонском
королевском обществе)

которая, однако, была известна и самому Муавру (лишь значение константы, $\sqrt{2\pi}$, Муавру сообщил Стирлинг) и которую следовало бы называть формулой Муавра — Стирлинга. Это тем более справедливо, что Муавр, в первом дополнении к «Аналитическим этюдам», опубликовал первую таблицу $\lg n!$ для $n = 10, 20, 30, \ldots, 900$.

Схема вывода Муавра была такова. Подсчитывалось: 1) отношение среднего члена бинома $(1 + 1)^{2m}$ к сумме всех членов разложения; 2) отношение среднего члена этого бинома к члену, удаленному от этого последнего на произвольное расстояние l; 3) отношение произвольного члена бинома к сумме всех членов разложения (т. е. к 2^{2m}) и 4) отношение суммы членов между средним и удаленным от него на l к сумме всех членов разложения. В дальнейшем изложении Муавр распространил ход рассуждений на бином $(a + b)$ и тем самым доказал в общем случае локальную (в пункте 3)) и интегральную (в пункте 4)) предельные теоремы.

И с точки зрения Муавра и с современной точки зрения, «предельные теоремы Муавра — Лапласа» являются непосредственным развитием закона больших чисел Я. Бернулли. Эти теоремы были заново доказаны Лапласом, который вообще почти не указывал своих предшественников, и по

этой причине упомянутая выше основная заслуга Муавра в теории вероятностей оставалась неизвестной до конца XIX в.

Непосредственный повод к составлению «Метода аппроксимации» дала упомянутая выше задача о рождаемости мальчиков и девочек. Но фактически цели Муавра были очень широкими: исходя из философских взглядов Ньютона, которому он посвятил первое издание своего «Учения о случаях», Муавр хотел установить вероятностный критерий для отличия необходимого (предначертанного провидением) и случайного, особенно если результаты опыта (статистическая частота осуществления ряда событий) значительно отличаются от ожидаемого (по априорной вероятности) результата. Аналогичные цели ставили себе ученые и в более позднее время. Так, Лаплас систематически применял теоретико-вероятностные методы и рассуждения для выявления детерминированных законов небесной механики.

Заслуги Муавра не ограничиваются выводом нормального закона распределения и доказательством предельных теорем. В связи с вопросами смертности и подсчетом пожизненных рент он систематически употреблял непрерывное равномерное распределение; он исследовал целый ряд азартных игр и для этой цели разработал новый аналитический аппарат — теорию возвратных последовательностей, продолженную далее Эйлером, Лагранжем и Лапласом. Его влияние на Лапласа и Лагранжа было исключительно велико, но уже после первых работ Лапласа Муавра почти забыли. Этому способствовал ряд причин: частично работы Муавра были опубликованы на малораспространенном на континенте Европы английском языке, его символика быстро устарела, а форма изложения — решение бесконечного числа отдельных задач, притом, в ряде случаев, без доказательства, — отпугивала читателей.

Статистика народонаселения

Основные проблемы статистики народонаселения (или, как было принято говорить, политической арифметики), т. е. проблемы рождаемости, смертности и т. д., а также связанные с ними проблемы подсчетов для страхования жизни и вычислений стоимости пожизненных рент оказались важнейшими приложениями теории вероятностей XVIII в.

Таблицы смертности появились еще в XVII в. после основополагающей для политической арифметики книги Дж. Граунта (см. т. II, гл. 5). Определенные предположения о смертности, основанные, видимо, на фактическом материале, привел политический деятель и математик Ян де Витт (1625—1672) в объяснительной записке членам правительства Генеральных штатов (Голландии) «Стоимость пожизненных рент в отношении к обычным рентам» (Waerdije van lijf-renten near proportie van los-renten, 1671). Но наиболее значительной оказалась упомянутая в пятой главе второго тома статья 1694 г. Э. Галлея, который составил эмпирическую таблицу одновременно живущих людей по возрастным группам для стационарного населения, определил вероятность дожития до каждого возраста и вычислил соответствующую стоимость пожизненной ренты. Вычисления Галлея легли в основу работы вдовьей и сиротской касс, учрежденных в Лондоне в 1699 г.

Галлея высоко ценил Муавр, который именно на основе эмпирических данных Галлея пришел к непрерывному равномерному распределе-

нию как к единому закону смертности (исключая детскую смертность). Этот закон не удержался в специальной литературе, которая к середине XVIII в. стала носить узкорецептурный характер. Но в руках настоящих мастеров, каким был, например, Муавр, проблемы политической арифметики приводили к постановке и решению важных теоретико-вероятностных проблем, а также и к зарождению математической статистики.

Самое слово статистика (от итальянских stato — государство, statista — политик, страновед) появилось в немецкой школе государствоведения XVIII в. и сперва означало общее описание стран, включавшее и некоторые числовые данные. Эта школа распалась ввиду разнородного содержания своего предмета, и, хотя некоторые ученые XVIII в. занимали промежуточную позицию между государствоведением и политической арифметикой, именно в рамках последней возникла собственно математическая статистика. Впрочем, в сочинениях XVIII в. и, пожалуй, первой половины XIX в. подчас трудно разделить теорию вероятностей и математическую статистику.

Историческую близость теории вероятностей и математической статистики можно иллюстрировать тем, что «классическая» вероятность события (отношение числа благоприятных случаев к общему числу всех равновозможных случаев) применялась наравне с частотной, статистической вероятностью события (т. е. с наблюдаемой относительной частотой события). Хотя формальным определением служило только первое, практически применялись, повторяем, оба определения вероятности. Более того, именно сочетание этих определений вероятности, попытки установить классическую вероятность по наблюденной частоте и оценить возможные уклонения последней от предсказанной на основе классической вероятности частоты служили основой для развития теории вероятностей, пожалуй, до середины XIX в. (закон больших чисел Я. Бернулли, предельные теоремы Муавра — Лапласа).

Современники Я. Бернулли понимали его закон больших чисел как теорему, позволившую обосновать проводившиеся с XVII в. вероятностные расчеты в демографии. Тем самым теория вероятностей получила важное поле приложений и поистине стала отдельной научной дисциплиной. Что же касается названия этой дисциплины, то впервые оно было предложено Паскалем, который намеревался написать книгу «Математика случая» (Aleae geometria; см. т. II, стр. 88). Но этот термин остался неизвестным, и в употребление вошло название «Учение о случаях», как назвал свою книгу 1718 г. Муавр. Лишь в XIX в. стало применяться современное название, которое окончательно закрепилось в результате работ Лапласа.

Первой политико-арифметической работой XVIII в. оказалось сочинение врача, математика и сатирика Дж. Арбутнота (1667—1735) «Довод в пользу божественного провидения, взятый из постоянной закономерности, наблюдаемой в рождении (младенцев) обоих полов» (An argument for divine Providence, taken from the constant regularity observed in the births of both sexes. Philos. Trans., v. 27, (1710) 1712). Заметив, что 82 года подряд в Лондоне рождалось больше мальчиков, чем девочек, Арбутнот заявил, что этот факт не может соответствовать равной вероятности рождений обоих полов, а потому выражает волю провидения, заботящегося о постоянном преобладании рождений мальчиков. Иными словами, он отверг гипотезу биномиального распределения рождений с $p = q = 1/2$ и принял $p > q$.

Рассуждения Арбутнота о «воле провидения» оказались характерными для ряда последующих авторов. В научном отношении мы имеем здесь дело с одной из первых, если не первой, проверкой статистической гипотезы о значении параметра функции распределения; впрочем, вопрос о критериях проверки в то время не ставился.

После Арбутнота и Н. Бернулли следует упомянуть Муавра, Симпсона и Зюссмильха. Но если работы первого были в основном теоретико-вероятностными, второго — частично также теоретико-вероятностными, частично узко прикладными, то с сочинением пастора Иоганна Петера Зюссмильха (1707—1767) «Божественный порядок в изменениях человеческого рода, доказываемый рождениями, смертью и размножением» (Die göttliche Ordnung in den Veränderungen des menschlichen Geschlechts, aus der Geburt, dem Tode und der Fortpflanzung desselben erwiesen, 1741), фактически возникла статистика народонаселения как научная дисциплина.

Статистические закономерности были подмечены и использованы еще Граунтом, но Зюссмильху принадлежит заслуга фундаментального исследования статистики народонаселения. Во всех закономерностях этой статистики Зюссмильх видел проявление воли провидения, «божественный порядок». Такой подход естественно обусловил тенденциозность многих положений Зюссмильха. Вместе с тем Зюссмильх в каждом удобном случае утверждал, что от количества и «качества» населения зависит могущество государства и что поэтому правители, в соответствии со своими собственными интересами, а также в соответствии с волей провидения, должны заботиться о населении своих государств. Осуждая те факторы общественной жизни, которые нарушают «божественный порядок», Зюссмильх выступил против войн, нищеты, чрезмерной роскоши и т. п. Во втором двухтомном издании своего труда (1761—1762) он высказался за освобождение крестьян.

Следует сказать, что первое издание сочинения Зюссмильха менее известно, чем второе, расширенное примерно в 3—4 раза. Восьмая глава этого второго издания «О скорости умножения и периоде удвоения человеческого рода» (а возможно, и все издание в целом) была написана при деятельном участии Эйлера, которого Зюссмильх называет своим «высокочтимым другом» и «академическим коллегой».

Заслуги Эйлера в самой теории вероятностей не очень велики. Гораздо более значительны его работы в области статистики народонаселения и математических основ страхования жизни. Помимо соавторства с Зюссмильхом Эйлеру принадлежит ряд статей по указанной теме, собранных в седьмом томе первой серии его «Opera omnia», 1923. В одной из этих статей — «Общие исследования о смертности и умножении человеческого рода» (Recherches générales sur la mortalité et la multiplication du genre humain. Mém. Ac. Berlin, (1760) 1767) — Эйлер поставил и решил ряд задач о вероятностях выживания отдельных лиц одного и того же возраста, вычислил соответствующую стоимость пожизненной ренты и привел приближенную формулу для возрастания населения во времени.

Ни в этой, ни в других работах аналогичного направления Эйлер не вводит предположений о законах смертности, а предлагает пользоваться статистическими данными. Его рассуждения, как всегда, изящны и убедительны и действительно представляют собой методическую разработку принципов вычислений, интересную и в наше время.

Несколько работ Эйлера по теории вероятностей были вызваны широким распространением различных лотерей, которые должны были попол-

нить казну Прусского королевства. Он решал задачи о вероятностях различных исходов, появления подряд нескольких номеров, о цене лотерейных билетов и т. п. Эйлер занимался также вопросами демографии и создал законченную теорию повозрастной смертности. Наконец, ему пришлось рассмотреть и ряд задач страхового дела, касающихся организации пенсионных касс и обеспечения лиц, уходящих в отставку. Свои решения Эйлер дополнял подробно составленными таблицами. Не затрагивая основных проблем теории вероятностей и ограничиваясь разбором отдельных конкретных задач, Эйлер все же оставил заметный след в указанных приложениях этой науки.

Теория ошибок

Элементы теории ошибок были сформулированы Галилеем (см. т. II, гл. 5) в связи с требованиями астрономии. После Ньютона фундаментальной научной задачей явилась задача определения фигуры Земли по астрономо-геодезическим измерениям. Эта задача, связанная и с более непосредственными нуждами картографирования обширных территорий, привела к дальнейшим работам в области математической обработки измерений.

Здесь прежде всего следует назвать опубликованную вместе с «Гармонией мер», т. е. посмертно (см. стр. 61), статью Р. Коутса «Оценка погрешностей в прикладной математике с помощью изменений [1] элементов плоского и сферического треугольника» (Aestimatio errorum in mixta mathesi per variationes partium trianguli plani et sphaerici, 1722). В самом конце сочинения Коутс рекомендовал употреблять при обработке непосредственных измерений среднее арифметическое, дав определенное правило для учета весов измерений и сравнив общее среднее арифметическое с центром тяжести системы точек — результатов измерений.

Рассуждение Коутса носило качественный характер. Но уже через несколько десятилетий, в основном в работах Т. Симпсона и И. Г. Ламберта, были заложены основы теории ошибок. Симпсон принял для погрешностей измерений дискретное треугольное распределение вероятностей, симметричное относительно оси ординат, с максимумом на этой оси, и доказал, что при этом распределении среднее арифметическое в вероятностном смысле предпочтительнее отдельного измерения. Тем самым Симпсон дал первое обоснование широко применявшемуся в астрономии среднему арифметическому. Свою статью «О преимуществе выбора среднего из некоторого числа наблюдений в практической астрономии» (On the advantage of taking the mean of a number of observations in practical astronomy. Philos. Trans., (1755) 1756) в расширенном виде Симпсон включил в «Сборник трактатов по некоторым изящным и весьма интересным темам из механики, физической астрономии и спекулятивной математики» (Miscellaneous tracts on some curious, and very interesting subjects in mechanics, physical astronomy and speculative mathematics. London, 1757), и здесь мы находим у него непрерывное треугольное распределение.

Ламберт описал вероятностные свойства ошибок наблюдений, дал правила оценки их точности и подбора параметров эмпирических прямых и кривых по точкам — наблюдениям, отягощенным случайными погрешностями. Он также сформулировал цели теории ошибок (этот термин,

---

[1] Именно — весьма малых приращений.

кажется, предложен им самим) и впервые предложил (1760) принцип максимального правдоподобия для определения параметра сдвига одновершинной кривой распределения по результатам наблюдений.

Соответствующие сочинения Ламберта: «Фотометрия» (Photometria, 1760, §§ 271—306) и «Очерки о математике и ее применении» (т. I, Берлин, 1765; ср. стр. 111) [1].

Работы по теории ошибок продолжались на протяжении последующих десятилетий. Ж. Л. Лагранж в 1775 или 1776 г. опубликовал мемуар «О применении метода составления среднего из результатов большого числа наблюдений» (Mémoire sur l'utilité de la méthode de prendre le milieu entre les résultats de plusieurs observations, Misc. Taur., том V, за 1770—1773 гг., датировка произведена по переписке Лагранжа), в котором решил ряд задач о вероятности погрешности в среднем арифметическом при различных законах распределения погрешностей наблюдений (дискретных и непрерывных). При этом Лагранж фактически пользовался производящими функциями (что, впрочем, делал еще Муавр) и, без должного обоснования, ввел в математику первые интегральные преобразования. Будучи, однако, не естествоиспытателем, а математиком, Лагранж остановился на этом и уступил дорогу Лапласу, важнейшие работы которого относятся уже к XIX в.

До конца века были еще опубликованы сочинения Р. Бошковича, Л. Эйлера, Д. Бернулли и П. С. Лапласа.

Ружер Иосип Бошкович (1711—1787), уроженец Дубровника в Далмации, получил научную подготовку и работал главным образом в Италии, с которой Дубровник имел тесные культурные связи. Автор оригинальной системы динамической атомистики (1758), Бошкович приобрел большие заслуги в области физики и особенно астрономии; он был иностранным членом Лондонского королевского общества и с 1760 г. Петербургской академии наук. Занятия Бошковича астрономией соединялись с разработкой тригонометрии; они же привели его к работе по градусному измерению между Римом и Римини (1750—1753), которую он выполнил совместно с английским иезуитом Христофером Мейром (1697—1767), автором ряда сочинений по астрономии.

Это градусное измерение было описано Мейром и Бошковичем в «Научной экспедиции в Папскую область для измерения двух градусов меридиана и исправления географических карт» ([C.] Maire, [R.] Boscovich. De litteraria expeditione per Pontificiam ditionem ad dimetiendos duos meridiani gradus et corrigendam mappam geographicam. Roma, 1755). Но лишь во французском переводе этого сочинения «Астрономическое и географическое путешествие в Папскую область» (Voyage astronomique et géographique dans l'Etat de l'Eglise. Paris, 1770), в приложении к пятой книге, написанной Бошковичем, описана интересующая нас математическая обработка их градусного измерения и вывод параметров (x, y) земного эллипсоида по результатам ряда градусных измерений.

Фактически Бошкович решал переопределенную систему линейных алгебраических уравнений

$$a_i x + b_i y + l_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{3}$$

[1] Следует указать, что подбор эмпирических кривых с учетом погрешностей наблюдений произвел еще в XVI в. Николай Коперник. Хотя его работы в этом направлении не изучены, заслуга его здесь несомненна.



Р. И. Бошкович
(с портрета Р. Пайна 1760 г., хранящегося в Музее Мале Браче, Дубровник)

Указанная задача являлась классической и решалась рядом современников Бошковича, включая Эйлера.

Системы вида (3) были, естественно, несовместными и потому решались при некоторых дополнительных условиях, накладываемых на неизбежно остававшиеся остаточные свободные члены (v_i). В описанной задаче следует полагать, что v_i подчинены некоторому закону распределения, независимы и не смещены. Дополнительные условия Бошковича, в которых он видел теоретико-вероятностный смысл, оказались весьма целесообразными и были приняты впоследствии Лапласом. Лишь в XIX в. от них отказались в пользу получившего универсальное применение условия наименьших квадратов. В настоящее время подобного рода задачи (но детерминированные, а не вероятностные) решаются также в рамках математического программирования.

Д. Бернулли в мемуаре «Наиболее вероятное определение по нескольким расходящимся между собою наблюдениям и устанавливаемое отсюда наиболее правдоподобное заключение» (Dijudicatio maxime probabilis plurium observationum discrepantium atque verisimillima inductio inde formanda. Novi Commentarii, (1777) 1778) вторично (после Ламберта) применил принцип максимального правдоподобия к отысканию абсциссы $\overline{x}$ вершины кривой распределения погрешностей наблюдений.

Д. Бернулли начинает свой мемуар с сомнений в целесообразности применения «всеобще принятой» арифметической средины, которая соответствует лишь случаю равной вероятности всех ошибок, т. е. «стрельбе вслепую». Для плотности распределения («шкалы вероятности») Д. Бернулли принимает ряд условий и в качестве кривой плотности предлагает полуокружность вида

$$y=\sqrt{r^2-(x-\bar{x})^2},\quad y\geqslant 0,\quad \bar{x}>0. \tag{4}$$

Обозначив результаты наблюдений через 0, a, b, ... ($a>0$, $b>0$, ...)

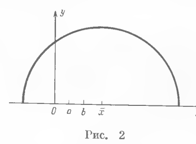


Рис. 2

(рис. 2), он составляет функцию правдоподобия

$$(r^2-\bar{x}^2)\,[r^2-(\bar{x}-a)^2]\,[r^2-(\bar{x}-b)^2]\ldots$$

и отыскивает параметр $\bar{x}$ из условия ее максимума. Поскольку для удобства вычислений функция правдоподобия была составлена им для квадратов плотности (4), то фактически следует считать, что за кривую плотности Д. Бернулли принял дугу параболы $y=r^2-(\bar{x}-x)^2$.

Решение уравнения правдоподобия оказалось исключительно громоздким: даже для случая трех наблюдений этого уравнение есть алгебраическое уравнение пятой степени с 20 членами. Впрочем, рабочие формулы могут быть также записаны в виде

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}p_ix_i}{\sum_{i=1}^{n}p_i},\qquad p_i=\frac{1}{r^2-(\bar{x}-x_i)^2}, \tag{5}$$

где $x_i=0$, a, b, ...— результаты наблюдений, числом n. Эти формулы, которые Д. Бернулли не привел, предполагают применение метода последовательных приближений и показывают, что «веса» тем больше, чем дальше находятся соответствующие наблюдения от средней группы и, вообще говоря, от среднего арифметического. Этот результат должен был казаться неожиданным, и лишь в последние годы он получил подтверждение в работах Ллойда (наилучшие линейные оценки Ллойда).

Быть может, ввиду этой неожиданности Д. Бернулли и не отметил прямо, что оценка $\bar{x}$ в его формулах зависит больше от крайних, а не от средних наблюдений. И объективно получилось так, что современники Д. Бернулли, прочитав его исходные соображения о нецелесообразности применения среднего арифметического, могли ошибочно считать, что

автор предлагает усилить роль средних наблюдений. Именно такую ошибку совершил Эйлер в комментарии, приложенном к мемуару Д. Бернулли. Эйлер высказался против оценки максимального правдоподобия, предложив взамен оценку (5) с весами

$$p_i = r^2 - (\bar{x} - x_i)^2.$$

Впрочем, его оценка также соответствовала максимуму некоторой функции правдоподобия

$$(r^2 - \bar{x}^2)^2 + [r^2 - (\bar{x} - a)^2]^2 + [r^2 - (\bar{x} - b)^2]^2 + \ldots$$

И работа Д. Бернулли, и комментарий Эйлера, кажется, оставались плохо известными.

Кроме того, в связи со своими астрономо-геодезическими вычислениями Эйлер неоднократно решал системы (3) и предложил для этого первый из нескольких применявшихся в XVIII в. методов — метод минимакса $|v_{\max}| = \min$, где минимум берется относительно всех возможных решений системы (3). Строго говоря, система (3) несовместна. Под ее решением мы здесь понимаем любой «разумный» набор $\{x, y, \ldots\}$.

Классическая теория ошибок была завершена в XIX в. в работах Лапласа и Гаусса, а также ближайших предшественников последнего — А. М. Лежандра и Р. Эдрейна. Что же касается ранних мемуаров Лапласа, то к теории ошибок имеет отношение его «Мемуар о вероятностях причин по событиям» (Mémoire sur la probabilité des causes par les événements. Mém. Acad. Roy. Sci. Paris, 1774). Лаплас, исходя из аналитического предположения, основанного лишь на «отсутствии причин» (!) для противоположного предположения, принял для плотности распределения погрешностей наблюдений функцию

$$\varphi(x) = \frac{m}{2} e^{-m|x|} \quad (m > 0)$$

и предложил определить m, исходя, по существу, из байесовской концепции, используя результаты опыта (астрономических наблюдений).

Теорема Байеса

Томас Байес (1702—1761) [1], священник и член Королевского общества, в посмертно изданной статье «Опыт решения одной задачи учения о случаях» (An essay towards solving a problem in the doctrine of chances. Philos. Trans., (1763—1764), 1764—1765) исследовал воображаемый опыт — падение материальной точки (у Байеса — мяча) на квадрат $ABCD$ со стороной $a = 1$ (рис. 3). Опыт проводится $p + q = n$ раз. Если p раз падение произошло правее случайной прямой so и q раз левее этой прямой (положение точки o на AB равновероятно), то, полагая, что вероятность падения в любую точку квадрата одна и та же,

$$P\{o \in [bc]\} = \frac{\int_b^c x^p (a-x)^q \, dx}{\int_0^a x^p (a-x)^q \, dx} \qquad (a = 1). \tag{6}$$

[1] Правильное произношение: Бэйз.

Таким образом, по результатам опыта (соотношения $p : q$) фактически определялась классическая, априорная вероятность падения материальной точки правее so в единичном испытании.

Полученный результат широко использовался, пожалуй, всеми последующими учеными, в том числе и Лапласом. Но часто допускалось и ошибочное применение формулы Байеса, при котором не учитывалось, что отысканию подлежит апостериорный закон распределения случайной величины с известным априорным законом распределения. У Байеса априорное распределение точки o на AB принималось равномерным (прямая so определялась падением специальной «пробной» материальной точки),

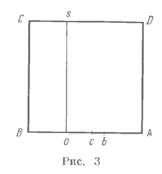


Рис. 3

что, впрочем, не является существенным ограничением общности: его формулу можно обобщить на случай других априорных распределений. Но при практическом использовании априорное равномерное распределение подчас постулировалось ввиду «полного незнания» и, более того, применяли формулу Байеса для отыскания значения неизвестной константы, которая, естественно, вообще не является случайной величиной.

По указанной причине в недалеком прошлом (Р. Фишер, Ю. Нейман) делались попытки вообще полностью отказаться от всяких априорных оценок в математической статистике и руководствоваться только результатами опыта. Но, начиная, пожалуй, с А. Вальда, старая байесовская точка зрения в более совершенной форме снова получила признание в математической статистике.

Некоторые примеры применения формулы Байеса привел Р. Прайс (1723—1791), публицист, экономист и философ-моралист, горячий защитник североамериканских колоний и Французской буржуазной революции, опубликовавший статью Байеса. В частности, он отметил, что при «полном незнании» законов природы можно было бы по формуле Байеса определять вероятность последующих восходов Солнца. Этот пример неоднократно приводился в последующей литературе (например, Бюффоном и Лапласом). Прайс подчеркнул, что формула Байеса в некотором смысле обратна результатам Муавра (т. е. интегральной предельной теореме Муавра — Лапласа), более непосредственно применима к отделению воли провидения от случайного и, в отличие от этих результатов, применима также к малым p (или q).

Формула (6) может быть выписана сразу, на основе определения плотности распределения. Байесу, который этим понятием не владел, пришлось специально обосновывать формулу (6) и, конечно же, его рассуждения

могут быть применены для любого распределения (не обязательно биномиального).

Но основная часть мемуара посвящена вычислению интегралов, входящих в формулу (6), при больших p и q при помощи несложных, но громоздких выкладок и привлечения специальной «осредняющей» кривой вида

$$y = a^p b^q \left(1 - \frac{n^2 x^2}{pq}\right)^{\frac{p+q}{2}}.$$

Байес нигде не использует предельного перехода, видимо, полагая его не нужным для практических приложений. Если все же перейти к пределу, то из результатов Байеса получится, что

$$\lim_{p+q=n\to\infty} P\left\{-x \leqslant \frac{\bar{p}-a}{\frac{\sqrt{pq}}{n\sqrt{n}}} \leqslant x\right\} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2}\,dz.$$

Здесь $\bar{p}$ — статистическая оценка фактически определяемого Байесом параметра p, $a = E\bar{p}$ — математическое ожидание этой оценки,

$$\frac{pq}{n^{3/2}} = D\bar{p},$$

где D — символ дисперсии. Равенство параметров a и $pq/(n\sqrt{n})$ соответственно математическому ожиданию и корню из дисперсии $\bar{p}$ имеет место до членов порядка $1/n$.

Полученный результат с указанной точностью совпадает с результатом Муавра (2), так как в (2) $npq = D\mu$.

Но примечательно, что Байес, видимо, понимал, что формула Муавра (2) непригодна для его схемы, в которой по известным частотам p и q определялось $\bar{p}$.

Так называемой «формулы Байеса» (дискретного аналога формулы (6))

$$P\{A_i/B\} = \frac{P(B/A_i)\,P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B/A_j)\,P(A_j)}$$

апостериорной вероятности события A_i не содержится в мемуаре Байеса. (Здесь A_1, A_2, ..., A_n — несовместимые и априорно равновероятные события, а событие B может осуществиться с одним и только с одним из событий A_i.) Эта формула (в словесном виде) была причислена Лапласом в «Опыте философии теории вероятностей» (см. далее стр. 148) к основным принципам теории вероятностей (принцип VI) и притом обобщена на случай неравных априорных вероятностей событий A_i.

Следующий, VII принцип у Лапласа есть формула полной вероятности $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\,P(B/A_i)$, также записанный им в словесной форме.

У Байеса в начале мемуара имеется только формула

$$P(B) = P(A)\,P(B/A).$$

Название «формула Байеса» появилось, как можно думать, в середине XIX в.

Работы Д. Бернулли

В середине и во второй половине XVIII в., до Лапласа, в теории вероятностей работал целый ряд ученых, среди которых первое по значению место принадлежит Д. Бернулли.

С 1738 по 1778 г. он опубликовал семь мемуаров, содержащих решение важных вероятностных проблем статистики народонаселения и астрономии. Д. Бернулли принадлежат первенство в систематическом употреблении дифференциальных уравнений для вывода целого ряда формул, в публикации таблицы нормального распределения, во введении в литературу «морального ожидания». Вторым после Муавра он вывел нормальный закон распределения и доказал «предельные теоремы Муавра — Лапласа» и вторым после Ламберта применил принцип наибольшего правдоподобия (см. выше).

Непосредственной целью мемуара Д. Бернулли «Опыт новой теории меры случая» (Specimen theoriae novae de mensura sortis. Commentarii, (1730—1731) 1738) было решение парадокса одной придуманной Николаем I Бернулли азартной игры, которая получила название *петербургской* именно ввиду появления этого мемуара Бернулли в «Записках» Петербургской академии наук. К слову сказать, из семи мемуаров по теории вероятностей Д. Бернулли опубликовал в Петербурге шесть.

Игра состояла в том, что один игрок (Павел) бросает монету до первого выпадения герба. Если это событие происходит при k-м броске ($k = 1, 2, 3, \ldots$), то второй игрок (Петр) выплачивает первому 2^{k-1} дукатов. Для безобидности игры Павел должен уплатить Петру сумму, равную математическому ожиданию своего выигрыша. Но математическое ожидание выигрыша Павла равно

$$1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{8}+\ldots,$$

т. е. бесконечно, что делает игру невозможной. Этот результат привел к попыткам видоизменить условия игры и, что более важно, к попыткам исследовать основы приложений теории вероятностей.

Одна такая попытка (правда, более поздняя) была сделана крупнейшим естествоиспытателем Ж. Л. Бюффоном (1707—1788), которому не были чужды теоретико-вероятностные идеи. Бюффон предложил принимать, что в практических задачах малые вероятности $p < 1/10\,000$ просто равны нулю или, иначе, что редкие события при единичном испытании практически неосуществимы. Мы еще вернемся к Бюффону, а пока отметим, что этот принцип, основанный на законе больших чисел Я. Бернулли, используется и сейчас, причем соответствующая вероятность выбирается в каждом отдельном случае независимо и, кроме того, этот выбор осуществляется вне рамок теории вероятностей.

Бюффон также утверждал (1730), что с возрастанием имущества игрока падает ценность выигрыша заданной величины. Из аналогичных соображений исходил в своем мемуаре Д. Бернулли, который, однако, облек эти соображения в математическую форму: приняв, что произвольному (малому) выигрышу dx соответствует выгода y, обратно пропорциональная имуществу x игрока, Д. Бернулли записал это предположение в виде:

$$dy=\frac{b\,dx}{x}, \quad b>0, \quad x>0, \quad y\equiv f(x)=b\ln\frac{x}{\alpha},$$

где α — исходный капитал (имущество) игрока.

Тем самым он впервые в теории вероятностей применил дифференциальное уравнение, а логарифмическую функцию выгоды $f(x)$ он предложил ввести в выражение для математического ожидания взамен x. Получающееся при этом «моральное ожидание»

$$\frac{m_1 f(x_1) + m_2 f(x_2) + \ldots}{m_1 + m_2 + \ldots}, \tag{7}$$

по мнению Д. Бернулли, следовало использовать для анализа выгодности азартных игр, а также и в коммерческих операциях, связанных с риском.

Азартные игры, при которых математическое ожидание выигрыша равно нулю, при употреблении морального ожидания с логарифмической функцией $f(x)$ оказываются невыгодными,— моральное ожидание проигрыша превышает моральное ожидание выигрыша,— и в этом Д. Бернулли усматривал «отчетливое указание природы» на необходимость уклоняться от азартных игр.

По формуле (7) моральное ожидание выгоды Павла от участия в петербургской игре оказывается равным

$$z = b\frac{\frac{1}{2}\ln\frac{\alpha+1}{\alpha} + \frac{1}{4}\ln\frac{\alpha+2}{\alpha} + \frac{1}{8}\ln\frac{\alpha+4}{\alpha} + \ldots}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots} =$$

$$= b\left[\ln\left(\sqrt{\alpha+1}\,\sqrt[4]{\alpha+2}\,\sqrt[8]{\alpha+4}\,\ldots\right) - \ln\alpha\right],$$

соответствующее ожидание капитала Павла

$$x = \sqrt{\alpha+1}\,\sqrt[4]{\alpha+2}\,\sqrt[8]{\alpha+4}\,\ldots,$$

а ожидаемое приращение капитала

$$\Delta x = \sqrt{\alpha+1}\,\sqrt[4]{\alpha+2}\,\sqrt[8]{\alpha+4}\,\ldots - \alpha.$$

Поэтому плата (s) за право участия в игре должна быть такой, чтобы для имущества $(\alpha - s)$ выполнялось равенство

$$\sqrt{\alpha - s + 1}\,\sqrt[4]{\alpha - s + 2}\,\sqrt[8]{\alpha - s + 4}\,\ldots - \alpha = 0.$$

Приближенно, при больших α, $s \approx \Delta x$, т. е. конечно.

Отметим, что по так называемому неравенству Иенсена для математического ожидания выпуклой функции $f(x)$, т. е. функции, расположенной «ниже» своей хорды, $Ef(x) \geqslant f(Ex)$. В рассматриваемом случае $E(-\ln x) \geqslant -\ln Ex$ или $E\ln x \leqslant \ln Ex$, а потому при $x > 0$ заведомо $E\ln x < Ex$, т. е. моральное ожидание выигрыша меньше математического ожидания. Хотя в данном случае это несущественно,— математическое ожидание выигрыша было бесконечным,— но выпуклые функции в настоящее время играют важную роль в теории вероятностей и математической статистике (случайные процессы, теория статистических решений).

Добавим еще, что логарифмическая функция оказалась удобной для применения в теории информации.

Термин «моральное ожидание» (которого не применял Д. Бернулли) и формула (7) в частных случаях

$$f(x) = \min(x; 2^{24}) \quad \text{и} \quad f(x) = \sqrt{x}$$

принадлежат Г. Крамеру (см. его письмо 1728 г., адресованное Николаю I Бернулли и опубликованное Д. Бернулли в конце рассматриваемого мемуара). Свои формулы Крамер предложил для решения парадокса той же петербургской игры, однако именно логарифмическая функция Д. Бернулли оказалась в ходу у последующих авторов, пожалуй, до второй половины XIX в. Хотя моральное ожидание так и не получило тогда практического применения, современные математико-статистические функции ущерба по своему духу близки к нему.

Не рассматривая всех мемуаров Д. Бернулли, мы теперь остановимся на «Аналитических исследованиях новой проблемы предположений» (Disquisitiones analyticae de novo problemate conjecturali. Novi Commentarii, (1769) 1770). Здесь он рассматривает урновые схемы, решая, например, следующую задачу: в первой урне содержится n белых шаров, во второй урне — n черных и в третьей урне — n красных шаров. Каково ожидаемое количество шаров каждого цвета в урнах после r циклических перекладок из одной урны в другую? Не отличая количества шаров от математического ожидания этого количества (ошибка, встречающаяся во всех мемуарах Д. Бернулли), он получает комбинаторным методом и методом дифференциальных уравнений, например, для количества белых шаров в первой урне при больших n и r

$$A \approx ne^{-r/n}\left[\alpha e^{r/n} + \beta e^{-r/2n} \sin\frac{r\sqrt{3}}{2n} + \gamma e^{-r/2n}\cos\frac{r\sqrt{3}}{2n}\right], \qquad (8)$$
$$\alpha = {}^1/_3, \quad \beta = 0, \quad \gamma = {}^2/_3.$$

Интересно, что $A = f(r/n)$, т. е. что математическое ожидание оказалось зависящим от дискретного параметра, что характерно для нестационарных случайных процессов. Еще интереснее, что Д. Бернулли отметил существование предельного состояния шаров в урнах (равное количество шаров каждого цвета в каждой урне), точнее, предельных значений математического ожидания количества шаров.

Этот факт, учитывая соображения симметрии, легче всего доказывается и притом обобщается на случай любого конечного числа урн теоремой о существовании предельной матрицы перехода в однородных цепях Маркова. Физики могли бы увидеть в этой урновой схеме прообраз некогда популярной вероятностной модели тепловой смерти конечной Вселенной.

Следует отметить, что использование дифференциальных уравнений является характерной чертой мемуаров Д. Бернулли. В рассматриваемом мемуаре метод дифференциальных уравнений для вывода формулы (8) носил вероятностный характер. Обозначив через x, y и $[n - (x + y)]$ количества белых шаров в урнах после некоторого числа перекладок, он исходил из дифференциальных уравнений:

$$dx = -\frac{x}{n}\,dr + \frac{n-(x+y)}{n}\,dr, \qquad dy = -\frac{ydr}{n} + \frac{xdr}{n}.$$

Например, первое из этих уравнений выражает изменение количества, точнее, математического ожидания количества белых шаров в первой урне: первый член учитывает вероятность перекладки белого шара из этой

урны в третью, второй член — вероятность перекладки белого шара из третьей урны в первую, причем введение dr означает замену дискретного процесса, поскольку r принимает только натуральные значения, непрерывным.

Подсчеты, аналогичные последним, Д. Бернулли применил еще ранее, в «Применении алгоритма бесконечных в искусстве предположений» (De usu algorithmi infinitesimalis in arte conjectandi specimen. Novi Commentarii, (1766—1767) 1768), но для случая извлечения карточек разных цветов из урны наугад без возвращения. Если в урне первоначально находилось $2n$ карточек, из которых n белого и n черного цветов, перенумерованных от 1 до n, то каждые две карточки разных цветов, но с одинаковыми номерами составляют пару. Изучение количества парных карточек, остающихся в урне после заданного числа извлечений, равносильно изучению законов вымирания браков. И эта последняя задача — одна из важнейших в статистике народонаселения — действительно рассматривалась Д. Бернулли в мемуаре «О средней продолжительности браков при всяком возрасте супругов и о других смежных вопросах» (De duratione media matrimoniorum pro quacunque conjugum aetate, aliisque quaestionibus affinibus. Novi Commentarii, (1768) 1769). Соответственно со случаем, когда карточки одного цвета по какой-то причине извлекаются более часто, Д. Бернулли изучил и случай неравной смертности мужчин и женщин, а также рассмотрел ряд дополнительных вопросов.

Другой важнейшей проблеме статистики народонаселения был посвящен мемуар Д. Бернулли «Опыт нового анализа смертности, вызванной оспой, и преимуществ предотвращающей ее инокуляции» (Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole, et des avantages de l'inoculation pour la prévenir. Hist. Acad. Roy. Sci. avec les Mém. Math. et Phys., (1760) 1766). В середине XVIII в. эпидемии оспы уносили весьма большое число жертв,— по оценке Д. Бернулли, правда весьма приближенной, $^1/_{64}$ часть населения ежегодно. Истории этих эпидемий и борьбы с ними при помощи инокуляции, т. е. прививки оспы от больного человека здоровому, посвящены, в частности, два мемуара Ш. М. Кондамина (1701—1774), опубликованных в том же издании в 1759 и 1763 гг.

Д. Бернулли составил и решил дифференциальное уравнение между статистически средними величинами, получив формулу для подсчета относительного количества лиц, не болевших оспой. Аналогичную формулу он получил для инокулированного населения, предположив, что инокуляция исключает оспу, но с малой вероятностью приводит к смертельному исходу. Окончательный результат мемуара заключался в построении таблицы смертности инокулированного населения, для которого средний срок жизни оказывался увеличенным на 3 года 2 месяца.

Наиболее интересным является все же мемуар Д. Бернулли «Приложение меры случая к случайным последовательностям естественных событий» (Mensura sortis ad fortuitam successionem rerum naturaliter contingentium applicata. Novi Commentarii (1769—1770), 1770—1771), в котором ставился классический вопрос о соотношении рождаемости мальчиков и девочек. С точки зрения математической статистики это была проверка статистической гипотезы о значении параметра биномиального распределения. Этот вопрос Д. Бернулли так и не решил, но в процессе решения он, вторым после Муавра, вывел «предельные теоремы Муавра — Лапласа».

Д. Бернулли вначале отыскивает математическое ожидание (M) количества мальчиков из общего числа ежегодных рождений $2N$ при относительной частоте рождений мальчиков и девочек, равной $a : b$. Предположив фактически, что имеет место биномиальный закон рождений с параметром $a : b$, и соответственно вычислив максимальный член разложения $(a + b)^{2N}$, он получил

$$M = \frac{2Na}{a+b} .$$

Далее, для μ порядка $\sqrt{N}$, снова используя бином $(a + b)^{2N}$, Д. Бернулли вычисляет приращение вероятности

$$P\{m = M + \mu + 1\} - P\{m = M + \mu\} \equiv d\pi = \pi - \frac{2N - M - \mu}{M + \mu + 1} \frac{a}{b} \pi d\mu,$$

где m — количество рождений мальчиков. Выведя таким образом дифференциальное уравнение для интересующей его вероятности, Д. Бернулли интегрирует его, получая

$$P\{m = M \pm \mu\} \equiv \pi = Q \exp\left(-\frac{a+b}{2b}\frac{\mu^2}{M}\right),$$
$$Q \equiv P\{m = M\}$$

и, наконец, отыскивает суммы вида

$$\sum_{k=0}^{\mu} P\{m = M \pm k\},$$

но не интегрированием, а непосредственным суммированием. Иначе говоря, он применял аналог интегральной предельной теоремы с суммированием взамен интегрирования. Интересно, что в мемуаре содержится и первая опубликованная таблица нормального распределения для $e^{-\mu^2/100}$ при $\mu = 1, 2, 3, 4, 5, 10, 15, 20, 25, 30$ (с четырьмя значащими цифрами).

Д. Бернулли не приводит ссылок на Муавра, быть может, потому, что в свое время просто не обратил должного внимания на мемуар последнего.

Критические выступления Даламбера

Целый ряд статей по теории вероятностей опубликовал Даламбер. В них по преимуществу выражаются сомнения в правильности основополагающих идей классической теории вероятностей и, кроме того, критикуются отдельные теоретико-вероятностные мемуары. Будучи иногда совершенно ошибочной, критика Даламбера, кажется, не оказала существенного влияния на современников и последующих ученых. Вместе с тем эта критика свидетельствовала о недостаточно четкой формулировке некоторых положений теории вероятностей и, особенно, принципов приложения последней.

Ошибка Даламбера в подсчете вероятностей при игре в орлянку, содержащаяся в статье «Герб и решетка» (Croix et pile) 4-го тома «Энциклопедии» (Encyclopédie, v. 4, 1754), стала печально знаменитой. По его мнению, вероятность выпадения *герба* два раза подряд при двух бросках монеты равна $1/3$ (а не $1/4$): если при первом броске выпала *решетка*, то

второй бросок делать незачем, кроме того, возможны броски *герб, герб* и *герб, решетка*, так что всех возможных случаев оказывается не четыре, а только три. На деле равновозможны случаи: *решетка, герб*; *решетка, решетка*; *герб, герб*; *герб, решетка*.

Также ошибочны рассуждения Даламбера о «математической» и «физической» вероятностях в статьях, помещенных в его «Математических работах» (Opuscules mathémathiques, v. 4, 1768; v. 7, 1780). Если два взаимоисключающихся события *математически* равновероятны и одно из них произошло несколько раз подряд, то *физически* более вероятным становится появление другого события; последовательности 100 гербов или 100 решеток при игре в орлянку менее вероятны, чем любая другая последовательность из 100 бросков; вероятность выпадения герба m раз подряд при бросках одной монеты меньше вероятности выпадения m гербов при однократном броске m монет. Первое из этих рассуждений к тому же противоречит одновременно высказываемому утверждению о желательности вычисления вероятностей событий по эксперименту.

Гораздо интереснее мысли Даламбера о практической неосуществимости редких событий в одиночном испытании, о связанной с этим непригодности подсчетов математического ожидания выигрыша в играх и о качественном отличии «абсолютной уверенности» от «самой большой вероятности». Первая мысль восходит к Бюффону (см. выше), и Даламбер ссылается на него. Вторая мысль, как сначала представляется, противоречит первой; однако обе они, взятые совместно, означают осторожный подход к использованию теории вероятностей: в одиночном испытании нельзя рассчитывать на осуществление маловероятных событий, а при большом числе испытаний нельзя рассчитывать на неосуществление маловероятных событий. При дальнейшем развитии теории вероятностей подобные рассуждения были формализованы (например, в усиленном законе больших чисел).

Даламбер не замечает порочного круга в классическом определении вероятности: вероятность определяется из равновозможности, а последняя, молчаливо,— из вероятности. На этот факт обратили внимание, кажется, лишь во второй половине XIX в. Даламбер, несмотря на его общее критическое отношение к теории вероятностей, которую он не относил к «точным и верным исчислениям ни по принципам, ни по результатам» [1], этого не заметил.

Особо следует остановиться на приложениях теории вероятностей к статистике народонаселения у Даламбера. И здесь Даламбер допустил неточность. Его почему-то смущает различие между вероятным и средним сроком жизни, которое прекрасно понимал еще X. Гюйгенс, он видит в этом различии дополнительный недостаток теории вероятностей. Он делает ошибки и при комментировании «Опыта нового анализа смертности» Д. Бернулли, однако высказывает при этом и дельные соображения («Математические работы», т. 4, стр. 310—341).

Прежде всего Даламбер замечает, что исходные предпосылки Д. Бернулли об эпидемиях оспы слишком упрощены и что необходимы подробные статистические данные. Затем он справедливо утверждает, что окончательный вывод о пользе инокуляции не может быть сделан только на основании удлинения среднего срока жизни: не каждый согласится инокулироваться и, следовательно, подвергнуться риску, хотя и малому, не-

---

[1] *J. D'Alembert*. Opuscules mathématiques, v. 4. Paris, 1768, p. 309—310.

медленной смерти в обмен на отдаленную перспективу прожить несколько дополнительных лет. Кроме того, в этом вопросе существует моральная сторона, например при инокулировании детей, так что полный математический анализ невозможен и т. д. Тем не менее Даламбер поддерживал инокуляцию, предлагая даже выдавать компенсацию или «Знаки отличия» семьям погибших от нее.

Собственный метод сравнения рисков смерти от оспы и от инокуляции Даламбера громоздок и, пожалуй, не продуман до конца, но в его основе лежит, как бы сейчас сказали, мысль о функции ущерба, т. е. фактически мысль самого Д. Бернулли.

В сочинениях Д. Бернулли и Даламбера таким образом наметился осуществленный в XX в., в рамках математической статистики, путь сравнения двух рисков с соответствующим выбором той или иной гипотезы.

Даламбер неоднократно ссылается на Бюффона. Полагая, например, что вероятности, меньшие 1/10 000, следует считать равными нулю, Даламбер следует за Бюффоном, который заметил, что $p = 1/10\,000$ есть вероятность здоровому человеку в возрасте 56 лет умереть в течение ближайших 24 часов. Это и другие вероятностные рассуждения Бюффона содержатся в его «Естественной истории» (Histoire naturelle, Suppl., v. 4, Paris, 1777).

Здесь мы находим также задачу о вероятности восхода Солнца, выражение «средний человек» (l'homme moyen, § 8), понятие о котором в XIX в. легло в основу статистических теорий А. Кетле, замечание о невыгодности азартных игр с нулевым математическим ожиданием выигрыша и разбор петербургской игры, включая опыт,— 2048 партий игры, причем максимальная длительность в девять бросков монеты оказалась только у шести партий.

Но более всего известен опыт с «бюффоновой иглой», из которого, как заметил впоследствии Лаплас, может быть экспериментально подсчитано число π. Менее известно, что Бюффон придумал эту игру с целью доказать преимущество «анализа» перед «геометрией» в теории вероятностей, которая до сего времени занималась исследованием дискретных азартных игр. Иначе говоря, Бюффон хотел ввести в теорию вероятностей непрерывные величины, но, конечно, намного опоздал. Впрочем, следует оговориться: отчет об этом опыте Бюффона был опубликован еще в издании Парижской академии наук 1735 г. (Hist. Acad. Roy. Sci. avec les Mém. Math. et Phys., (1733) 1735).

Лаплас

Выдающийся вклад в теорию вероятностей внес Пьер Симон Лаплас (1749—1827), родившийся в небогатой крестьянской семье в нормандском городке Бомон-ан-Ож. Юношей Лаплас переехал в Париж, где обратил на себя внимание Даламбера и по его рекомендации стал преподавателем математики в Военном училище. Уже первые работы Лапласа в области исчисления конечных разностей (см. стр. 236) и по небесной механике показали силу его дарования. В 1773 г. он был избран адъюнктом и в 1783 г. членом Парижской академии наук; добавим, что с 1802 г. он был почетным членом Петербургской академии.

В революционные годы Лаплас принял руководящее участие в работах комиссии по введению метрической системы, а также Бюро долгот, и,



П. С. Лаплас
(с портрета, хранящегося в Институте Франции, Париж)

подобно Лагранжу, читал лекции в Нормальной школе. На всех этапах бурной политической жизни тогдашней Франции Лаплас не вступал в конфликты с властями, которые почти неизменно осыпали его почестями. Наполеон в бытность первым консулом назначил Лапласа министром внутренних дел, но этот пост он занимал недолго, так как внес в управление, как выразился позднее Наполеон, «дух бесконечно малых», т. е. мелочность. Титул графа, данный ему в годы империи, Лаплас сменил вскоре после реставрации Бурбонов на маркиза. Вообще же делом жизни его было научное творчество, охватившее широкий круг проблем теоретической и особенно прикладной математики, а также физики.

Большую известность в широких кругах читателей принесло Лапласу популярное «Изложение системы мира» (Exposition du système du monde. Paris, 1796, и многие переиздания). Здесь была разработана гипотеза о происхождении Солнечной системы из постепенно охлаждающейся туманности под действием ее вращения — гипотеза, близкая к космогонической гипотезе, гораздо менее удовлетворительно развитой ранее Кантом (1755). Лаплас дал первое научно аргументированное объяснение загадки, волновавшей людей тысячелетиями, но ранее порождавшей только произвольные мифологические толкования или метафизические догадки. Впоследствии были обнаружены слабые стороны гипотезы и в нее

вносились уточнения, а наряду с ней были построены другие модели. Это не умаляет исторического значения гипотезы Лапласа.

В гигантской пятитомной «Небесной механике», которую он опубликовал на протяжении четверти века (Traité de mécanique céleste, v. 1—5. Paris, 1799—1825), Лаплас подвел итоги как собственным исследованиям в этой области, так и трудам своих предшественников, начиная с Ньютона. Он дал глубокий анализ всех известных движений тел Солнечной системы на основе закона всемирного тяготения и доказал ее устойчивость в смысле практической неизменности средних расстояний планет от Солнца и незначительности колебаний остальных элементов их орбит. Наряду с массой специальных результатов, касающихся движений отдельных планет, спутников и комет, фигуры планет, теории приливов и т. д., важнейшее значение имело общее заключение, опровергавшее мнение (которое разделял и Ньютон), что поддержание настоящего вида Солнечной системы требует вмешательства каких-то посторонних сверхъестественных сил.

Ранее говорилось о работах Лапласа по теории определителей, а далее будут рассмотрены его исследования по уравнениям в конечных разностях, математической физике и по другим вопросам анализа, здесь же мы, естественно, ограничиваемся теорией вероятностей.

Работы Лапласа по теории вероятностей в XVIII в. охватывают 1774—1786 гг. Намного позже он подготовил сжатое изложение теории вероятностей в рамках «Лекций по математике для Нормальной школы» (Leçons de mathématiques données à l'Ecole Normale en 1795, 1812), послужившее основой для будущего «Опыта философии теории вероятностей» (Essai philosophique sur les probabilités. Paris, 1814). Опубликовав к 1805 г. четыре из пяти томов «Небесной механики», Лаплас еще раз вернулся к теории вероятностей и издал свою грандиозную «Аналитическую теорию вероятностей» (Théorie analytique des probabilités. Paris, 1812), подытожив в ней все свои предыдущие результаты, равно как и результаты своих предшественников. Об этом сочинении будет сказано ниже, а сейчас мы кратко опишем мемуары Лапласа XVIII в.

В упомянутом выше (см. стр. 137) «Мемуаре о вероятности причин по событиям» 1774 г. Лаплас, не ссылаясь на Байеса, повторил его результаты, причем записал их в современных обозначениях типа (6), а за исходную модель принял более естественную урновую задачу: в урне имеется бесконечное количество белых и черных полосок в неизвестном соотношении друг к другу. Если из $p+q$ полосок, извлеченных из урны наугад, p полосок оказались белыми и q полосок — черными, какова вероятность того, что при следующем опыте из урны будет извлечена белая полоска? Что при следующих $m+n$ опытах будут извлечены m белых полосок и n черных?... В первом случае искомая вероятность равна

$$P = \frac{\int_0^1 x^{p+1}(1-x)^q\,dx}{\int_0^1 x^p(1-x)^q\,dx} = \frac{p+1}{p+q+2}.$$

Именно такого рода подсчеты при $q=0$ Лаплас использовал (уже в XIX в.) для решения задачи Прайса о вероятности восхода Солнца. Мы не

будем входить в подробности дискуссий, которые вызвало предложенное Лапласом решение этой задачи.

Описанная байесовская концепция неоднократно применялась Лапласом и в дальнейшем. Так, в «Мемуаре о вероятностях» (Mémoire sur les probabilités. Mém. Ac. Paris, (1778) 1781) он применил ее к исследованиям демографического характера и к астрономии.

В мемуаре «О рождениях, женитьбах и смертности в Париже с 1771 по 1784 г. и во всей Франции в 1781 и 1782 гг.» (Sur les naissances, les mariages et les morts à Paris depuis 1771 jusqu'en 1784, et dans toute l'étendue de la France, pendant les années 1781 et 1782. Mém. Ac. Paris, (1783) 1786) Лаплас применил формулы типа байесовских к вычислению населения Франции (p') по известным из частичных переписей данным о населении (p) и о рождаемости (q) и данным о рождаемости во Франции в целом (q'): положив, что $p/q = p'/q'$, он определил p' и его погрешность, полагая p и q выборкой шаров двух цветов из урны с шарами этих цветов при известном общем соотношении их в урне (p'/q').

При отсутствии статистических данных другого выхода, возможно, не было, однако вряд ли исходные предположения были выполнены и, следовательно, вычисленная погрешность p' должна была оказаться заниженной.

Специальную задачу, которую поставил себе Лаплас в «Мемуаре о вероятностях»,— оценить влияние климата на соотношение ($m : f$) рождаемости мальчиков и девочек,— он, естественно, смог решить только в узком смысле, придя к выводу о статистической значимости расхождений значений $m : f$ в Лондоне и Париже. Аналогичное расхождение для Парижа и всей Франции в целом он объяснил в «Лекциях по математике» искажением статистических данных: в парижский приют для подкидышей попадали подкидыши из окрестных деревень с иным соотношением $m : f$, так как крестьяне часто подкидывали девочек.

Следует подчеркнуть, что установление статистической значимости расхождений между эмпирическими данными, а также задача о влиянии того или иного фактора на исследуемый признак явились важнейшими задачами математической статистики со второй половины XIX в.

В этом же «Мемуаре о вероятностях» у Лапласа впервые появляется задача о вероятности сумме независимых случайных величин с заданным законом распределения находиться в заданных пределах (но еще без предельного перехода). Эта задача, к которой Лаплас вернулся в «Аналитической теории вероятностей», стала центральной задачей теории вероятностей XIX в.

В «Исследованиях об интегрировании дифференциальных уравнений в конечных разностях и об их применении к теории случаев» (Recherches sur l'intégration des équations différentielles aux différences finies, et sur leur usage dans la théorie des hasards. Mém. Ac. Paris, (1773) 1776) Лаплас по существу дал сборник решения теоретико-вероятностных задач при помощи уравнений в конечных разностях. В этом же мемуаре, а также в «Мемуаре о возвратно-возвратных последовательностях и об их применениях в теории случаев» (Mémoire sur les suites récurro-récurrentes et sur leurs usages dans la théorie des hasards. Mém. Ac. Paris, 1774) он ввел уравнения в конечных разностях с двумя переменными и применил их к решению ряда теоретико-вероятностных задач. Эти решения оказались исключительно громоздкими и, пожалуй, имели лишь теоретический интерес.

В «Мемуаре о последовательностях» (Mémoire sur les suites. Mém. Ac. Paris, (1779) 1782) Лаплас опубликовал цельную теорию производящих функций, которую он впоследствии применял в теории вероятностей для решения конечно-разностных уравнений [1].

В мемуаре «О приближениях для формул, которые являются функциями весьма больших чисел» (Sur les approximations des formules qui sont fonctions de très grands nombres. Mém. Ac. Paris, (1782—1783) 1785—1786) ему пришлось вычислять определенные интегралы — решения конечно-разностных уравнений. В связи с этим Лаплас рассмотрел общую задачу о вычислении интегралов типа

$$\int_a^b u_1^{s_1}(x)\, u_2^{s_2}(x) \ldots \varphi(x)\, dx \equiv \int_a^b y\, dx, \qquad (9)$$

приняв

$$x = a + t\dot{x} + \frac{t^2}{2}\ddot{x} + \ldots, \qquad y = y_0 e^{-t^{\mu+1}}.$$

Это привело его к необходимости вывести рекуррентные формулы для четных моментов нормального распределения. Впрочем эти моменты, как и сама экспоненциальная функция отрицательного квадрата, как и моменты функции e^{-t^4} в «Мемуаре о вероятностях», еще не имели у него непосредственного вероятностного смысла.

Таким образом, уже в XVIII в. наметились многие направления теоретико-вероятностных работ Лапласа. Но, кроме того, отчетливо проявилась и связь этих работ с общематематическими результатами Лапласа, способность разработки нового математического аппарата и его использования в математике в целом.

«Аналитическая теория вероятностей» переиздавалась в 1814 и 1820 гг., а в 1886 г. была опубликована в качестве тома седьмого полного собрания сочинений Лапласа. Начиная со второго издания, книге предшествует, в качестве введения, «Опыт философии», а собственно «Аналитическая теория» состоит из двух отделов («книг») и четырех дополнений, появившихся в издании 1820 г., причем последнее дополнение имеется не во всех экземплярах этого издания.

«Опыт философии» является как бы расширенным рефератом всего сочинения и дает хорошее представление о содержании последнего и о философских взглядах Лапласа. Вместе с тем в «Опыте философии» Лаплас почему-то счел нужным полностью отказаться от математичских формул и добился только того, что его математические рассуждения оказались крайне сложны.

Лаплас полагал, что движение молекул воздуха в принципе может быть столь же точно определено, как и движение небесных тел, и что нынешнее состояние природы есть следствие — по контексту детерминированное — ее предыдущего состояния и вместе с тем есть причина ее последующего состояния. Примеры вероятностных процессов у Лапласа

[1] Производящей функцией $A(s)$ числовой последовательности $a_0, a_1, a_2, \ldots$ называется сумма ряда $a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots$, причем область определения $A(s)$ совпадает с интервалом сходимости ряда. В частности, если $a_0, a_1, a_2, \ldots$ суть вероятности значений $x_0, x_1, x_2 \ldots$ дискретной случайной величины ξ, то $A(s)$ будет производящей функцией распределения ξ. Производящие функции облегчают вычисление моментов закона распределения, могут применяться при изучении композиций этих законов и т. д.

являются, кажется, лишь методическими и не относятся к естествознанию непосредственно. Так, вслед за Д. Бернулли (см. стр. 142) он отметил существование предельного состояния при обмене шаров между урнами. Лишь во второй половине XIX в. в связи с запросами естествознания возникла проблема реализации маловероятных состояний при неограниченном течении времени.

Следует, однако, добавить, что отмеченные детерминистические взгляды не помешали Лапласу, основываясь на астрономических наблюдениях ряда эпох и народов, каждый раз исследуя, как бы сейчас сказали, статистическую значимость этих наблюдений и отвергая маловероятные состояния, теоретически обосновывать результаты наблюдений. Именно таким образом он пришел ко всем своим астрономическим открытиям. подытоженным, как было сказано выше, в «Небесной механике».

Первая книга «Аналитической теории» посвящена теории производящих функций одной и двух переменных, вычислению интегралов типа (9) и решению конечно-разностных уравнений. Во второй книге даются основы собственно теории вероятностей в применении к дискретным случайным величинам, доказательство предельных теорем Муавра — Лапласа и приложения теории вероятностей к математической обработке наблюдений, статистике народонаселения и «нравственным наукам». Математической обработке наблюдений в основном посвящены и все четыре дополнения.

Работами Лапласа завершился «классический» этап развития теории вероятностей. Были доказаны первые предельные теоремы, широко применялись конечно-разностные уравнения и способы приближенного вычисления определенных интегралов. В качестве вспомогательного средства начало допускаться интегрирование функций комплексного переменного. Теория вероятностей ответила на естественнонаучные запросы своего времени и, в частности, была создана классическая теория ошибок [1]. Новым запросам,— из области физики и биологии, а также социологии и экономики,— настал черед не раньше, чем во второй половине XIX в., и теория вероятностей после Лапласа в основном устремилась в «нравственные науки» — в вопросы вероятностного обоснования свидетельских показаний. решений судов и результатов голосования и, конечно же, не добилась в этом направлении никаких успехов.

С другой стороны, изложение теории вероятностей у Лапласа было основано на рассмотрении конкретных задач. Не только не было достаточно формализовано понятие о функциях распределения и об их моментах, но не было введено понятие о случайной величине, пусть даже на интуитивном, «классическом» уровне. И после Лапласа введение этого понятия частично тормозилось некорректным применением теоремы Байеса (стр. 137), но главным образом самой философией Лапласа, его «лапласовым детерминизмом».

Ввиду того что предметом теории вероятностей являются случайные события и случайные величины, многие математики не воспринимали ее как математическую дисциплину; так было даже в XIX и XX вв. Лишь постепенно «искусство предположений» приобретало равноправие с остальными математическими науками. В целом теория вероятностей занимала в XVIII в. довольно скромное место и в системе этих наук и в умах математиков, несмотря на такие выдающиеся достижения, как закон

[1] Эту теорию в основном создали Лаплас и К. Ф. Гаусс, соответствующие сочинения которого были опубликованы в 1809 и 1821 гг.

больших чисел Я. Бернулли, предельные теоремы Муавра, различные результаты Д. Бернулли, Лапласа и еще нескольких ученых. Ограниченным было и поле приложений вероятностных методов. Успешное применение они получили только в страховом деле и отдельных вопросах демографии; в математическом естествознании почти безраздельно господствовали дифференциальные уравнения, и в то время трудно было думать, что вероятностные методы когда-либо получат распространение в физике и тем более в механике. Попытки теоретико-вероятностного анализа ошибок наблюдений были, пожалуй, единственным примером его употребления в науках о природе. Более того, недостаточно ясными оставались представления об условиях применимости методов изучения случайных явлений, ибо самые исходные понятия теории не получили еще точного и недвусмысленного определения. С этим связаны были неосмотрительные приложения к различным «моральным» вопросам: оценке достоверности свидетельских показаний, надежности преданий и легенд, к судоустройству и т. п. В вопросах такого рода допускал ошибки даже Лаплас, труды которого явились основой дальнейшего развития теории вероятностей в XIX в.

ПЯТАЯ ГЛАВА

ГЕОМЕТРИЯ

Аналитическая геометрия на плоскости в начале XVIII в.

Г. Ф. Лопиталь в 1696 г., издавший первый учебник дифференциального исчисления (см. т. II, стр 284), явился автором и одного из первых систематических руководств по аналитической геометрии — «Аналитического трактата о конических сечениях и об их применении для решения уравнений как в определенных, так и в неопределенных задачах» (Traité analytique des sections coniques et de leur usage pour la résolution des équations dans les problèmes tant déterminez qu'indéterminez. Paris, 1707). Лопиталь вывел уравнения конических сечений в форме:

$$y^2 = px,\ \ y^2 = c^2 - \frac{c^2x^2}{t^2} = \frac{1}{2}\,pt - \frac{px^2}{2t},$$

$$y^2 = \frac{c^2x^2}{t^2} \mp C^2 =, \frac{px^2}{2t} \mp \frac{1}{2}\,pt,$$

где t — большая, а c — малая полуоси. Основные свойства конических сечений он вывел частью с помощью этих уравнений и алгебры, частью элементарно-геометрическими методами. Он в принципе правильно трактовал вопрос о знаках координат, подробно разобрав его на примере прямой $y = bx/a$ и окружности $y^2 = a^2 - x^2$; однако в дальнейшем он, следуя своим предшественникам, ограничивался положительными значениями x и y. Поэтому и у него отсутствовало уравнение прямой вида $y = -\frac{b}{a}x - c$.

Лопиталь рассмотрел ряд интересных задач и, в частности, показал, что геометрическое место точек, отношение расстояний которых до двух данных точек постоянно, является окружностью (это — «окружности Аполлония»; см. т. I, стр. 130) и что геометрические места точек, отношение расстояний которых до данной точки и до данной прямой постоянно, являются коническими сечениями. Он доказал тот же частный случай теоремы Штейнера, что и Ньютон (см. т. II, стр. 128).

Существенный вклад в аналитическую геометрию внес Яков Герман (1678—1733), ученик Я. Бернулли по Базельскому университету. Один из первых петербургских академиков,— он работал в Петербурге с 1725 по 1731 г.,— Герман сыграл большую роль в создании здесь крупнейшего европейского научного центра. Наиболее значительным произведением Я. Германа была «Форономия, или о силах и движениях твердых тел и жидкостей» (Phoronomia, seu de viribus et motibus corporum solidorum et



Я. Герман
(с портрета кисти Николая I Бернулли (?). Собственность г-жи Ла Рош, Рейнфельден, Швейцария)

fluidorum. Amstelodami, 1716). В том же 1716 г. Я. Герман высказал простое, но весьма важное предположение о том, что уравнение кривой n-го порядка с коэффициентом 1 при y^n имеет $n\ (n+3)/2$ коэффициентов.

В первых шести томах «Записок» Петербургской академии напечатано 15 работ Германа, из них 12 математических. В частности, в первом томе «Записок», (1726) 1728, он поместил статьи о задаче Кеплера разделить полукруг в данном отношении (которую решил двумя способами — с помощью специальной кривой и аналитически, с помощью быстро сходящегося ряда) и о сферических эпициклоидах, т. е. кривых, описываемых фиксированной точкой окружности радиуса b, катящейся по неподвижной окружности радиуса a на сфере; Герман нашел, что длина этой линии l выражается через радиусы обеих окружностей и косинус угла между их плоскостями по формуле $l = \frac{4b}{a}\sqrt{a^2 - 2ab\cos\varphi + b^2}$.

В четвертом томе «Записок», (1729) 1735, Герман дал более полное, по сравнению с прежними, аналитическое рассмотрение кривых второго порядка. Исходя из уравнения $\alpha y^2 + 2\beta xy + \gamma x^2 + 2\delta y + 2\varepsilon x + \varphi = 0$, разрешенного относительно y, он показал, что кривая будет эллипсом, параболой или гиперболой, в зависимости от того, будет ли величина $\beta^2 - \alpha\gamma$ меньше нуля, равна ему или больше его. Герман знал также, что в

случае, когда в выражении для y корень извлекается, уравнение может представить пару прямых.

В том же томе «Записок» Герман распространил метод полярных координат, впервые примененных Я. Бернулли к спиралям (1691), на любые плоские кривые, подчеркнув, что с его помощью можно исследовать свойства кривых столь же удобно, как и с помощью декартовых координат. Формулы перехода от полярных координат к декартовым он записал в виде $x = nz$, $y = mz$, где z — «радиус проекции», а n и m — косинус и синус «угла проекции». Среди кривых, уравнения которых Герман привел в полярных координатах, были парабола — это был первый случай применения полярных координат к коническим сечениям — и декартов лист.

В применении полярных координат за Германом последовали многие, в частности, другой петербургский академик Георг Вольфганг Крафт (1701—1754), впервые, по-видимому, введший термин «полярное уравнение», aequatio polaris (Commentarii, (1732—1733) 1738).

Герман одним из первых приступил к систематической разработке аналитической геометрии в пространстве, о чем мы будем говорить ниже.

Кривые высших порядков

В основе изучения алгебраических кривых высших порядков в XVIII в. лежало опубликованное в 1704 г. «Перечисление кривых третьего порядка» Ньютона, которое, как мы уже указывали (см. т. II, стр. 117), не содержало доказательств. Многие, хотя и не все, теоремы Ньютона были доказаны в книге Джемса Стирлинга «Ньютоновы кривые третьего порядка» (Lineae tertii ordinis Newtonianae. Oxford, 1717). Здесь Стирлинг, почти одновременно с Я. Германом, высказал предположение о числе коэффициентов уравнения алгебраической кривой n-го порядка, из чего он сделал вывод, что кривая n-го порядка определяется $n(n + 3)/2$ точками. Далее Стирлинг определил возможное число бесконечных ветвей кривых четного и нечетного порядков, а также асимптоты кривых и точки пересечения с кривыми и отметил, что порядок уравнения относительно y понижается в случае, когда ось ординат параллельна асимптоте кривой; он изучал также криволинейные асимптоты и диаметры кривых высших порядков, т. е. такие прямые, что если принять их за ось абцисс некоторой, вообще говоря, косоугольной системы координат, то сумма всех кординат точек кривой с одной и той же абсциссой равна нулю; Стирлинг показал, что уравнение кривой в такой системе координат не содержит $(n - 1)$-й степени ординаты. К 72 видам кривых третьего порядка, найденным Ньютоном, Стирлинг добавил четыре новых вида.

Стирлинг всячески подчеркивал аналогии между теорией кривых второго и третьего порядков и, например, приводя аналитическое доказательство теоремы Ньютона о том, что если через точку O проведены две прямые, пересекающие кривую третьего порядка соответственно в точках A_1, A_2, A_3 и B_1, B_2, B_3, то отношение $OA_1 \cdot OA_2 \cdot OA_3 / OB_1 \cdot OB_2 \cdot OB_3$ произведений отрезков обеих секущих не зависит от положения точки при неизменных направлениях обеих секущих, он предварительно доказал аналогичную теорему для кривых второго порядка. В качестве средства изучения кривых третьего порядка Стирлинг пользовался представлением ординаты y в виде ряда по x с помощью метода параллелограмма Ньютона

(см. т. II, стр. 49). Стирлинг дал чрезвычайно ценный комментарий к труду Ньютона, но не смог доказать одной из важнейших его теорем — о получении всех кривых третьего порядка центральным проектированием из пяти расходящихся парабол — это сделал Клеро (см. стр. 162).

Применявшийся Ньютоном органический способ образования кривых получил значительное развитие в книге Колина Маклорена «Органическая геометрия или универсальное описание кривых линий» (Geometria organica sive descriptio linearum curvarum universalis. Londini, 1720). Маклорен также доказал многие построения Ньютона и предложил много новых построений. Например, вращая один из двух углов вокруг некоторого

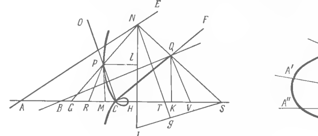


Рис. 4

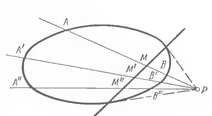


Рис. 5

полюса C и сдвигая вершину другого угла N вдоль прямой AE таким образом, что одна из его сторон проходит через фиксированную точку S (рис. 4), Маклорен находит, что в случае, когда одна из точек пересечения сторон углов Q описывает прямую, другая из таких точек P описывает кривую третьего порядка с двойной точкой в C. Аналогичным образом Маклорен строит общие кривые третьего порядка и кривые четвертого порядка с двумя двойными точками. Далее рассматривалось образование кривых с помощью углов данной величины, вершины которых движутся по прямым и кривым различных порядков. В этой связи Маклорен сформулировал теорему о том, что кривые m-го и n-го порядков пересекаются самое большее в mn точках (современный вид этой теореме придал в 1748 г. Эйлер, привлекая мнимые и бесконечно удаленные точки пересечения кривых; см. стр. 168)[1]. Определяя кривые, проходящие через данные точки, Маклорен столкнулся с так называемым парадоксом Крамера, о котором мы будем говорить ниже (см. стр. 172). Отметим еще теорему о том, что наибольшее число двойных точек кривой m-го порядка равно $(n-1)(n-2)/2$, так как если бы существовала еще одна двойная точка, то через двойные точки и $n-3$ других точек кривой можно было бы провести кривую $(n-2)$-го порядка, которая имела бы с данной кривой на одну точку пересечения больше, чем возможно для кривых n-го и $(n-2)$-го порядков.

В другом сочинении Маклорена «Об общих свойствах геометрических линий» (De linearum geometricarum proprietatibus generalibus, 1748), изданном посмертно вместе с «Трактатом по алгебре» (см. стр. 39), имелось большое число новых теорем о пересечении кривых третьего порядка с

---

[1] Эта теорема имеется в черновых записях Ньютона, относящихся, вероятно, к 1667 г. См. The mathematical papers of Isaac Newton, v. II, Cambridge, 1968, p. 177.

прямыми и о касательных к кривым в их точках пересечения с прямыми. Здесь же доказано, что если провести из некоторой точки P плоскости несколько прямых, пересекающих алгебраическую кривую,— такие прямые называются трансверсалями,— то сумма обратных величин расстояний от точки P до точек пересечения одной из трансверсалей с кривой равна сумме обратных величин расстояний от той же точки до точек пересечения той же трансверсали с касательными к кривой, проведенными в точках ее пересечения с другой трансверсалью. Маклорен доказал также высказанную Р. Коутсом теорему о том, что гармонический центр M точек A, B, C,..., пересечения трансверсали PA с кривой, т. е. такая точка M, для которой $\frac{1}{PM} = \frac{1}{PA} + \frac{1}{PB} + \frac{1}{PC} + \dots$, при вращении трансверсали вокруг точки P движется по прямой; эта прямая в настоящее время называется полярой точки P (см. т. I, стр. 135). На рис. 5 изображена поляра точки P относительно кривой второго порядка.

Член Лондонского королевского общества, священник по профессии Вильям Брейкенридж (ум. 1769) в «Геометрическом этюде об описании кривых линий» (Exercitatio geometrica de descriptione linearum curvarum. Londini, 1733) также применял органический способ образования кривых, в котором он, в отличие от Маклорена, пользовался не углами, а прямыми, вращающимися вокруг неподвижных точек A, B, C,..., причем одни точки пересечения N, S,... этих прямых движутся вдоль данных кривых, а другие их точки пересечения O,... описывают определяемые кривые. Когда даны три основные точки и точки N, S движутся вдоль прямых, точка O описывает кривую второго порядка; когда точка N движется вдоль прямой, а точка S — вдоль кривой n-го порядка, точка O описывает кривую порядка $2n$; в общем случае, когда точка N движется вдоль кривой m-го порядка, а точка S — вдоль кривой n-го порядка, точка O описывает кривую порядка $2mn$. Если число основных точек равно n и из $^1/_2 n\ (n-1)$ точек пересечения всех n прямых $n-1$ точек движутся вдоль прямых, остальные $^1/_2\ (n-1)\ (n-2)$ точек описывают кривые второго порядка. Эти исследования были обобщены Маклореном: если вокруг n основных точек вращаются стороны n-угольника, $n-1$ вершин которого движутся вдоль кривых k-го, l-го, m-го,... порядков, то n-я вершина n-угольника описывает кривую порядка $2klm$ (Philos. Trans., 1735/36).

Особые точки плоских кривых

Изучение кривых высших порядков естественно привлекло внимание к особым точкам, простейшие случаи которых были известны и ранее. Интересная работа по этому вопросу принадлежит Пьеру Луи де Мопертюи (1698—1759). Член Парижской академии с 1723 г., Мопертюи в 1736—1737 гг. возглавил экспедицию этой академии в Лапландию с целью выяснения, является ли Земля вытянутым или сплющенным сфероидом, т. е. эллипсоидом вращения. Ньютон, исходя из своей теории всемирного тяготения и допущения, что Земля произошла в результате охлаждения жидкой однородной массы, вращающейся с небольшой постоянной угловой скоростью, вывел, что она — сфероид сплющенный. По его расчету полярная ось Земли относится к диаметру экватора, как 229 к 230, т. е. коэффициент сжатия сфероида равен $^1/_{230}$. Другое значение коэффициента сжатия $^1/_{577}$ следовало из представлений о тяготении Гюйгенса,

отличных от теории Ньютона. К принципиально иному выводу, исходя из некоторых градусных измерений, пришли астрономы Парижской обсерватории Жан Доминик Кассини (1625—1712) и затем его сын Жак Кассини (1677—1756): они считали, что Земля — сфероид, вытянутый к полюсам. В этом же были твердо уверены большинство последователей Декарта. Такие разногласия ставили под вопрос состоятельность системы Ньютона, и Парижская академия предприняла новые градусные измерения, сначала в 1735 г. в Перу, близ экватора, а затем упомянутую экспедицию Мопертюи под 66° северной широты. Результаты наблюдений этих экспедиций дали результаты, близкие к вычисленным Ньютоном, и триумф

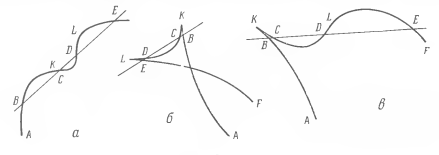


Рис. 6

этих экспедиций стал триумфом как теории Ньютона, так и самого Мопертюи, прозванного «Великим сплющивателем».

В истории механики имя Мопертюи известно благодаря выдвинутому им принципу наименьшего действия (1744), который он пытался толковать расширительно, как универсальный закон природы, и которому придал более совершенную форму Л. Эйлер (см. стр. 460). С Эйлером Мопертюи был тесно связан по работе в Берлинской академии, президентом которой Мопертюи был назначен королем Фридрихом II в 1745 г.

Мопертюи принадлежит также несколько работ по анализу и геометрии и, в частности, статья «О некоторых особенностях кривых» (Sur quelques affections des courbes. Mém. Ac. Paris, (1729) 1731). Исходя из общих геометрических представлений и без всяких вычислений Мопертюи пришел к заключению, что точки перегиба и точки заострения алгебраических кривых высшего порядка могут следовать друг за другом в различных комбинациях. На рис. 6, *а* изображен случай, когда друг за другом следуют две точки K, L перегиба, на рис. 6, *б* — случай, когда друг за другом следуют две точки K, L заострения, а на рис. 6, *в* — случай, когда точка перегиба L следует за точкой заострения K. Во всех этих случаях имеется прямая, пересекающая кривую в четырех точках B, C, D, E, т. е. порядок кривой не ниже четвертого. При слиянии этих четырех точек секущая переходит в касательную соответственно в точке извива (point de serpentement), точке двойного острия (point de double pointe) и точке возврата второго рода (point de rebroussement de la seconde sorte); последняя из этих точек была открыта еще И. Бернулли и описана в «Анализе бесконечно малых» Лопиталя.

Парижский академик аббат Кристоф Бернар де Бражелонь (1688—1744) опубликовал в «Mém. Ac. Paris» ((1730) 1732, (1731) 1734) обширную работу, которая должна была предшествовать классификации кривых

четвертого порядка по образцу Ньютона. Бражелонь специально исследовал особенности, которые могут встретиться у кривых четвертого порядка; его перечисление таких особенностей было неполным, но им впервые была рассмотрена изолированная точка самоприкосновения, которую он называл «бесконечно малой лемнискатой»; Бражелонь рассмотрел k-кратные точки и точки извива и перегиба высших порядков.

Другой французский ученый, с 1741 г. член Парижской академии, Жан Поль де Гюа де Мальв (1712—1785) в «Применениях анализа Декарта для нахождения, без помощи дифференциального исчисления, главных свойств или особенностей геометрических линий всех порядков» (Usages de l'analyse de Descartes pour découvrir, sans le secours du calcul différentiel, les propriétés, ou affections principales des lignes géométriques de tous les ordres. Paris, 1740) также изучал особые точки алгебраических кривых. Как видно из названия книги Гюа, он стремился показать преимущества методов аналитической геометрии над методами дифференциального исчисления при решении задач теории алгебраических кривых и считал, что дифференциальным исчислением следует пользоваться только при изучении трансцендентных («механических») кривых. Впрочем, иногда для сокращения вычислений Гюа пользовался дифференцированием и при изучении алгебраических кривых. Например, уравнение для определения координат центра конического сечения

$$nyy + rxy + mxx + ay + bx + cc = 0,$$

где m, n, r — числа, а a, b, c — отрезки, он привел в виде

$$\overline{2ny + rx + a}\cdot dy + \overline{2mx + ry + b}\cdot dx = 0.$$

Главным в работе Гюа было изучение особых точек алгебраических кривых, здесь же был введен и термин «особая точка» (point singulier). Для изучения этих точек Гюа переносил начало координат в особую точку (p, q) с помощью преобразования

$$x = p + z + nu, \qquad y = q + mu,$$

затем, сохраняя ось абсцисс, вращал, изменяя m и n, ось ординат и находил, что особая точка в начале координат принадлежит одной или нескольким кривым с уравнениями вида $y^m = Ax^{\pm n}$. Полагая, что уже первый член разложения во всех случаях полностью характеризует ветви кривой, Гюа делал ошибку, считая, что точки возврата второго рода, о которых писал Мопертюи, у алгебраических кривых не могут существовать; эта ошибка была раскрыта Эйлером (см. стр. 165).

Гюа трактовал бесконечно удаленные точки как особые точки, которые можно перевести в обычные особые точки проектированием. Для перевода этих точек в начало координат Гюа пользовался преобразованием:

$$x = \pm\frac{pq}{z}, \qquad y = \pm\frac{pu}{z},$$

где p, q — постоянные, представляющим по существу преобразование проективных координат проективной плоскости. В связи с этим Гюа преобразовал «параллелограмм Ньютона» (см. т. II, стр. 49), в клетках которого записываются коэффициенты при различных произведениях степеней x и y и две стороны которого соответствуют степеням x и y, в «алгебраический

треугольник», все три вершины и все три стороны которого равноправны. Проективная точка зрения Гюа привела его к открытию теоремы о том, что если кривая третьего порядка имеет три точки перегиба, они обязательно лежат на одной прямой (эта теорема имелась, впрочем, и в упоминавшемся посмертно изданном сочинении Маклорена «Об общих свойствах геометрических линий», см. стр. 156).

Гюа детально исследовал кривые четвертого порядка, открытые упоминавшимся выше астрономом Д. Кассини и называемые в настоящее время «овалами Кассини». Эти кривые представляют собой места точек, произведения расстояний которых от двух фиксированных точек, называемых фокусами, постоянны; Кассини считал, что Солнце движется по такому овалу, в одном из фокусов которого находится Земля. Предельным случаем овала Кассини, как показал в 1782 г. итальянец Пьетро Феррони (1744—1825), является открытая Я. Бернулли лемниската, имеющая вид восьмерки, узловая точка которой представляет собой точку перегиба. Заметим, что Гюа рассматривал уравнения вида $y^2 + x^2 + 2bx + b^2 = 0$ как уравнения пары мнимых прямых $y = \pm i(x + b)$.

Клеро

Существенный вклад в геометрию и, в частности, в аналитическую геометрию сделал Алексис Клод Клеро (1713—1768). Клеро, сын парижского преподавателя математики, проявил свои дарования необычайно рано. Когда ему было всего двенадцать с половиной лет, он поразил парижских академиков своей работой о некоторых кривых четвертого порядка, и они поверили в его авторство только после того, как он успешно ответил на все поставленные ими вопросы. В 1729 г. он представил Парижской академии «Исследования о кривых двоякой кривизны». Эта книга, посвященная аналитической и дифференциальной геометрии в пространстве, сыграла исключительную роль в развитии обеих этих дисциплин (см. стр. 175). Два года спустя, восемнадцатилетним юношей, Клеро был избран членом академии — случай, беспрецедентный в ее истории.

Об учебниках алгебры и геометрии Клеро уже шла речь ранее и нам не раз придется говорить о его выдающихся открытиях в области анализа. Здесь мы отметим еще заслуги его в механике и специально в утверждении системы Ньютона, которая, как мы знаем, находила на континенте Европы немало противников. Это прежде всего относится к вопросу о том, является ли фигура Земли сплющенным или вытянутым сфероидом, который, как мы видели (см. стр. 158), был решен французскими экспедициями 1735—1737 гг. в Перу и Лапландию. Клеро был членом лапландской экспедиции Мопертюи. Но молодой ученый не ограничился участием в практических измерениях формы Земли и занялся глубоким теоретическим исследованием проблемы. В классической «Теории фигуры Земли, извлеченной из принципов гидростатики» (Théorie de la figure de la Terre, tirée des principes de l'hydrostatique. Paris, 1743), Клеро далеко развил вслед за Ньютоном и Маклореном (1742) теорию фигур равновесия жидкой массы. В частности, Клеро впервые рассмотрел случай неоднородной массы, вначале представляющей собой сферу, плотность которой меняется с расстоянием от центра, и выразил условие равновесия эллипсоида некоторым интегро-дифференциальным уравнением. Исследования Маклорена и Клеро были продолжены Даламбером, поставившим проблему устой-



А. Клеро
(с портрета Катлена)

чивости фигур равновесия, а затем Лапласом, Якоби и многими другими первоклассными учеными вплоть до А. Пуанкаре и А. М. Ляпунова, которому и принадлежит наиболее полное и глубокое исследование проблемы в громадной серии работ, продолжавшихся с 1882 по 1918 г.

Другая трудность небесной механики Ньютона лежала в теории движения Луны. Расхождение между видимым движением лунного апогея и вычисленным по закону всемирного тяготения оказывалось столь значительным, что многие ученые, как Эйлер, Даламбер и Клеро, высказали сомнения в точности этого закона. По предложению Эйлера Петербургская академия наук, объявляя в 1749 г. свой первый научный конкурс, выдвинула тему: «Согласуются или же нет все неравенства, наблюдаемые в движении Луны, с теорией Ньютона? И какова истинная теория всех этих неравенств, которая позволила бы точно определить местоположение Луны для любого времени?». В это время Клеро уже пересмотрел свои прежние вычисления, обнаружив источник их расхождений с наблюдениями и с помощью усовершенствованного метода приближения привел гравитационную теорию к согласию с последними. В 1751 г. на основании отзыва Эйлера книга Клеро «Теория Луны, выведенная из единственного начала притяжения, обратно пропорционального квадратам расстояний» (Théorie de la Lune, déduite du seul principe de l'attraction réciproquement propor-

tionelle aux carrés des distances. СПб., 1752), получила премию и вскоре была напечатана нашей академией. И еще один раз Клеро содействовал триумфу механики Ньютона, предсказав с достаточной по тому времени точностью время возвращения в 1759 г. кометы Галлея, наблюдавшейся перед тем в 1682 и 1607 гг. Появления этой кометы ожидали только в 1761 г., но Клеро, учтя возмущающее действие Юпитера и Сатурна, показал, что оборот ее замедлится на 618 дней; расхождение в 31 день вычисленного им дня перигелия с действительным было по тем временам весьма незначительным. За еще более точное исследование ее орбиты (при котором расхождение было снижено до 19 дней) Клеро в 1762 г. получил еще одну премию Петербургской академии, иностранным членом которой был избран еще в 1754 г.

Остановимся более подробно на геометрической работе Клеро «О кривых, которые получают, пересекая какую-либо кривую поверхность плоскостью, известной по положению» (Sur les courbes que l'on forme en coupant une surface courbe quelconque par un plan donné de position. Mém. Ac. Paris, (1731) 1733), написанной им в возрасте 18 лет. В этой работе Клеро доказал теорему о том, что все кривые третьего порядка можно получить центральным проектированием из пяти расходящихся парабол, которая была сформулирована Ньютоном в «Перечислении линий третьего порядка» и которую, как мы указали, не смог доказать Стирлинг. Клеро основывался на рассмотрении кубического конуса

$$xy^2 = ax^3 + bx^2z + cxz^2 + dz^3,$$

сечения которого плоскостями $x = \text{const}$ являются расходящимися параболами, а другие плоские сечения которого дают все прочие виды кривых третьего порядка. В этой же работе, наряду с изучением плоских сечений поверхностей, рассматривается важный класс преобразований плоскости, называемых в настоящее время аффинными. Аффинные преобразования общего вида рассматривались в работах Ибрахима ибн Синана (см. т. I, стр. 240), а важнейшие случаи этих преобразований — сжатие и гомотетия — в трактате «О коноидах и сфероидах» еще Архимедом и Аполлонием (см. т. I, стр. 130). В Европе систематически пользовались сжатием Симон Стевин и Григорий Сен-Венсан. Клеро в указанной работе называет две кривые, полученные одна из другой аффинным преобразованием общего вида, «кривыми такого же вида» (courbes du même espèce): «Здесь в качестве кривых такого же вида рассматриваются две кривые, отличающиеся только тем, что их координаты не образуют одного и того же угла, или тем, что абсциссы и ординаты одной из них всегда являются одинаковыми частями соответственно абсцисс и ординат другой из них, подобно тому, как один эллипс по отношению к другому эллипсу, если их оси не находятся между собой в одном и том же отношении» [1]. Клеро записывает рассматриваемое им преобразование кривых в виде:

$$x = \frac{c}{d}u, \qquad y = \frac{b}{e}s.$$

Название Клеро, несомненно, связано с названием Ньютона, «фигуры такого же рода» для фигур, полученных друг из друга проективными преобразованиями (см. т. II, стр. 127). Так как группа аффинных преоб-

[1] «Mém. Ac. Paris», (1731) 1733, p. 486.

разований является подгруппой группы проективных преобразований, всякие кривые «такого же вида» являются кривыми «такого же рода», но кривые одного «рода» могут принадлежать к разным «видам», например, конические сечения могут быть эллипсами, гиперболами и параболами.

Второй том «Введения в анализ бесконечных» Эйлера

Оригинальное изложение аналитической геометрии дал во втором томе «Введения в анализ бесконечных» (1748) Эйлер. Это изложение послужило отправным пунктом авторов последующих курсов аналитической геометрии. В отличие от Ньютона, предпочитавшего в геометрии синтетические методы древних, Эйлер стремился решать все геометрические вопросы средствами алгебры и анализа.

Основная часть второго тома «Введения в анализ бесконечных» посвящена аналитической геометрии на плоскости, о содержавшемся в нем «Приложении о поверхностях» мы расскажем далее (см. стр. 176 и след.). В первой главе Эйлер определяет прямоугольные и косоугольные координаты и кривые линии и, в частности, непрерывные кривые; под непрерывной кривой Эйлер понимает кривую, заданную единым аналитическим выражением: «Непрерывная линия строится так, что ее природа выражается с помощью одной определенной функции от x» [1]. Кривые, рассматриваемые Эйлером, определяются алгебраическими функциями и поэтому непрерывны в нашем смысле слова или претерпевают разрывы только в случае обращения в бесконечность (как, например, гипербола $y = 1/x$). Мы еще вернемся к трактовке Эйлером понятия функции (см. стр. 250 и след.).

Во II главе Эйлер рассматривает преобразование прямоугольных и косоугольных координат. В первом случае Эйлер записывает преобразование координат в виде:

$$x = u \sin q + t \cos q - f,$$
$$y = u \cos q - t \sin q - g,$$

где q — угол поворота координат осей.

В III главе изложено подразделение алгебраических кривых на порядки, в IV рассмотрены общие свойства этих кривых — число точек пересечения кривой n-го порядка с прямой, число точек, определяющих такую кривую, и т. д.

В V и VI главах впервые Эйлер дает в весьма широком объеме общее аналитическое исследование кривых второго порядка, отправляясь от уравнения $y^2 + \frac{\varepsilon x + \gamma}{\zeta} y + \frac{\delta x^2 + \beta x + \alpha}{\zeta} = 0$, впрочем, геометрические построения используются здесь в большей мере, чем в руководствах XIX и XX вв. В V главе изучаются общие свойства этих кривых, а в VI главе общее уравнение второй степени приводится к каноническим формам с помощью преобразований координат и рассмотрены специальные свойства эллипса, параболы и гиперболы. Любопытно, что от эллипса Эйлер переходит сперва к параболе, трактуя последнюю как бесконечно растянутый

---

[1] *Л. Эйлер*. Введение в анализ бесконечных, т. II. Перевод В. С. Гохмана под ред. И. Б. Погребысского. М., 1961. стр. 21.

эллипс. К теории кривых второго порядка относится и один из параграфов IV главы, в котором дается чисто аналитическое решение задачи о проведении такой кривой через пять заданных точек, и три параграфа VII главы, где излагается новый метод расчленения кривых второго порядка на три вида, основанный на рассмотрении бесконечных ветвей, причем используется дискриминант уравнения (ср. стр.154—155).

Главы VII и VIII посвящены исследованию ветвей алгебраических кривых, уходящих в бесконечность, здесь определяются прямолинейные и криволинейные асимптоты кривых n-го порядка, уравнения которых записаны в форме $P + Q + R + \ldots = 0$, где P — совокупность членов измерения n относительно координат, Q — совокупность членов измерения $n-1$ и т. д. Бесконечные ветви и асимптоты кривой определяются линейными действительными множителями многочлена P: кривая не имеет бесконечных ветвей, если P не имеет таких множителей, что возможно только при четном n (как в случае эллипса). У кривой имеются две бесконечные ветви, приближающиеся в двух противоположных направлениях к одной прямолинейной асимптоте, если P обладает одним простым линейным множителем, что возможно только при нечетном n. Если же P обладает двумя простыми линейными множителями, то прямолинейных асимптот две и бесконечных ветвей четыре (как в случае гиперболы), а если линейный множитель двукратный и выполнены некоторые дополнительные условия, относящиеся к членам меньшей степени, то имеется параболическая асимптота и т. д. В отличие от английских математиков при исследовании бесконечных ветвей алгебраических кривых Эйлер не пользуется параллелограммом Ньютона, а оперирует порядками малости или бесконечности.

Главы IX и X посвящены специальному изучению кривых третьего порядка. В IX главе проводится классификация этих кривых, в основу которой положено изучение бесконечных ветвей и асимптот этих линий. Эйлер распределил кривые третьего порядка на 16 родов и указал каноническое уравнение каждого рода и виды классификации Ньютона, относящиеся к каждому роду. На основе этой классификации в X главе изучены геометрические свойства различных видов кривых третьего порядка. В XI главе проведена аналогичная классификация кривых четвертого порядка, подразделенных на 146 родов (на самом деле их 125). Эйлер нашел также уравнения касательных к кривым в их простых и кратных точках.

От поведения кривых в бесконечности Эйлер в XII главе переходит к изучению их формы в конечной части плоскости. Не располагая общими методами, он рассматривает только некоторые кривые третьего порядка, но указывает, что его выводы обобщаются на кривые с уравнениями $Qy^2 + 2Py + R = 0$, где Q, P, R — многочлены от x. Дается сжатая характеристика n-кратных точек. В заключение главы строится кривая

$$2y = \pm\sqrt{6x - x^2} \pm \sqrt{6x + x^2} \pm \sqrt{36 - x^2},$$

состоящая из двух восьмерок, каждая из которых обладает острием, лежащим на другой, и, кроме того, эти восьмерки касаются друг друга в двух точках (рис. 7).

В XIII и XIV главах изучается локальное поведение алгебраической кривой в окрестности одной точки, обыкновенной или особой: в XIII главе изучение связано с определением касательной, а в XIV главе — с опре-

делением соприкасающегося круга, радиус которого называется радиусом кривизны кривой в данной точке. Здесь же производится классификация особых точек. Все исследование ведется с помощью алгебры и оценок порядка малости тех или иных членов уравнения кривой. В основном тексте этой главы Эйлер повторяет ошибку Гюа де Мальва, считавшего, что алгебраические кривые не могут обладать точками возврата второго рода — остриями, имеющими вид птичьего клюва. Однако уже вскоре после отсылки рукописи издателю Эйлер нашел, что такой особенностью обладает кривая четвертого порядка $y^4 - 2y^2x - 4yx^2 - x^3 + x^2 = 0$, уравнение которой можно переписать в виде $y = \sqrt{x} \pm \sqrt[4]{x^3}$ (рис. 8). Посланная Эйлером в 1744 г. поправка, которую он хотел поместить в виде подстрочного

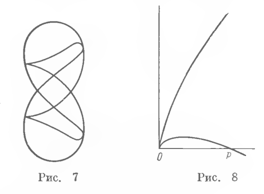


Рис. 7 Рис. 8

примечания, была напечатана издателем в конце соответственного параграфа. Этому же вопросу посвящена статья Эйлера «О точке возврата второго рода г-на маркиза де Лопиталя» (Sur le point de rebroussement de la seconde espèce de M. le Marquis de l'Hospital. Mém. Ac. Berlin, (1749) 1751).

Чрезвычайно интересна XV глава «О кривых, имеющих один или несколько диаметров». Здесь под «диаметром кривой», точнее, под «ортогональным диаметром кривой» Эйлер понимает прямую, секущую пополам все ортогональные ей хорды, т. е. ось симметрии кривой. Целью главы является выяснение условий, при которых кривая обладает одной или несколькими осями симметрии. Фактически Эйлер ставит здесь более общую задачу — выяснение условий, при которых кривая может быть «подобна и равна», т. е. конгруэнтна самой себе. Тот факт, что Эйлер рассматривает только алгебраические кривые, позволяет ему ставить вопрос не о конгруэнтности кривых в целом, а о наличии у кривой двух «подобных и равных частей». Говоря о различных случаях взаимного расположения двух «подобных и равных частей» кривой, Эйлер по существу классифицирует движения плоскости. Он указывает все виды этих движений — перенос (рис. 9, *а*), поворот вокруг точки (рис. 9, *б*), отражение от прямой (рис. 9, *в*) и скользящее отражение (рис. 9, *г*), т. е. отражение от прямой, сопровождаемое переносом вдоль этой прямой. Согласно Эйлеру, алгебраическую кривую нельзя перевести в себя переносом, так как в этом случае кривая переводилась бы в себя и всеми переносами в том же направлении на кратные расстояния, но кривая, обладающая таким свойством, пересекалась бы с прямыми, имеющими то же направление, в бесконечном множестве точек, что невозможно для алгебраи-

ческих кривых. Так как двукратное повторение скользящего отражения является переносом, отсюда же следует, что алгебраическую кривую нельзя перевести в себя и скользящим отражением. Далее показано, что, за исключением окружности, переводящейся в себя поворотом вокруг ее центра на любой угол, алгебраическую кривую можно перевести в себя только поворотом на угол, соизмеримый с прямым. В самом деле, если кривая переводится в себя поворотом на некоторый угол, она переводится в себя и всеми поворотами вокруг той же точки на кратные углы, но если данный угол несоизмерим с прямым, линия переводится в себя

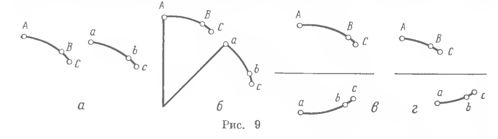


Рис. 9

поворотом на бесконечное множество углов, что невозможно для алгебраических кривых, отличных от окружности. Поэтому, если алгебраическая кривая, отличная от окружности, переводится в себя поворотом на некоторый угол, она переводится в себя поворотом на угол $2\pi/n$, где n — целое число. Далее, если алгебраическая кривая переходит в себя при отражении от двух прямых («имеет два диаметра»), она переходит в себя и при движении, состоящем из двух отражений, т. е. если эти прямые параллельны, при переносе на удвоенное расстояние между этими прямыми, а если эти прямые пересекаются, при повороте вокруг точки пересечения этих прямых на угол, равный удвоенному углу между этими прямыми. Поэтому если алгебраическая кривая имеет две оси симметрии, они обязательно пересекаются и притом под углом, соизмеримым с прямым углом. Если этот угол отличен от прямого угла и кратен углу π/n, где n — целое число, линия обладает n осями симметрии, пересекающимися в одной точке и составляющими между собой углы π/n. Отсюда следует, что если алгебраическая кривая обладает n осями симметрии, все они пересекаются в одной точке и составляют между собой углы π/n. На рис. 10 изображены кривые с тремя и четырьмя осями симметрии.

Приведенное Эйлером условие, при котором алгебраическая линия $F(x, y) = 0$ обладает n осями симметрии, состоит в том, что $F(x, y)$ является рациональной функцией выражений

$$x^2 + y^2 \text{ и } x^n - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} x^{n-2}y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} x^{n-4}y^4 + \ldots$$

Это можно легко доказать, заметив, что $x^2 + y^2$ переходит в себя при повороте на любой угол, а выражение $(x + iy)^n$, действительной частью которого является многочлен

$$x^n - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} x^{n-2}y^2 + \ldots,$$

переходит в себя только при повороте на угол $2\pi/n$ и кратные ему углы,

так как при повороте на угол $2\pi/n$ выражение $x + iy$ умножается на величину $\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$ и, следовательно, $(x + iy)^n$ умножается на $\left(\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}\right)^n = 1$. Однако у Эйлера здесь комплексные числа явно не участвуют и из других его сочинений, как мы указывали выше, также не видно, что ему был ясен геометрический смысл умножения на комплексное число вида $\cos\varphi + i \sin\varphi$.

В XVI главе находятся уравнения кривых по данным геометрическим свойствам, по большей части обобщающим свойства конических сечений;

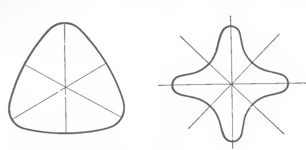


Рис. 10

например, ищутся кривые, сумма трех, четырех и пятых степеней расстояний точек которых от двух данных точек постоянна. Сходные задачи в полярных координатах решаются в XVII главе (ср. стр. 155).

В XVIII главе Эйлер изучает преобразования подобия и аффинные преобразования, которые ранее рассматривал Клеро (см. стр. 162). Прежде всего речь идет об уравнениях линий, зависящих от одного или нескольких параметров, и специально об алгебраических уравнениях, зависящих от одного параметра a, так что сумма степеней координат x, y и параметра a одна и та же во всех членах. В этом случае при изменении параметра a линия переходит в подобную линию. Поэтому, в частности, все окружности вида $y^2 = 2ax - x^2$ или параболы вида $y^2 = ax$ подобны между собой. Эйлер показывает, что переход от линии, соответствующей одному значению параметра, к линии, соответствующей другому значению этого параметра, выражается формулами $x = X/n$, $y = Y/n$. Далее говорится: «В соответствии с тем, что у подобных кривых гомологичные абсциссы и ординаты либо увеличиваются, либо уменьшаются в одном и том же отношении, в том случае, когда абсциссы следуют одному отношению, а ординаты другому, кривые уже не будут подобными. Но так как возникающие при этом кривые находятся между собой в некоторой связи, то мы назовем эти кривые *аффинными*. Таким образом, аффинность содержит в себе подобие в качестве особого вида» [1].

Определенное им аффинное преобразование Эйлер выражает формулами:

$$x = \frac{X}{m}, \quad y = \frac{Y}{n}.$$

---

[1] *Л. Эйлер.* Введение в анализ бесконечных, т. II, стр. 230.

Окружность переводится аффинным преобразованием в эллипс, эллипсы — в эллипсы, гиперболы — в гиперболы, а параболы — в параболы.

Термин affinitas буквально означает родство по жене, «свойство». Ясно, что он навеян терминами Ньютона и Клеро «фигуры такого же рода» и «кривые такого же вида». Вводя термин affinitas, Эйлер подчеркивал, что между «аффинными кривыми» родство значительно меньше, чем между подобными и тем более между «подобными и равными» (конгруэнтными) линиями. Эйлер выводит также формулы для подобия и аффинного преобразования общего вида, состоящего из подобия и аффинного преобразования, определенного выше, и поворота вокруг произвольной точки. Заметим, что в работе «О некоторых свойствах конических сечений, которыми обладает бесконечно много других кривых линий» (Sur quelques propriétés des sections coniques qui conviennent à une infinité d'autres lignes courbes. Mém. Ac. Berlin, (1745) 1746), Эйлер исследовал алгебраические кривые, обладающие произвольными «диаметрами», под которыми здесь понимались прямые, секущие пополам все хорды, параллельные между собой и составляющие с этими прямыми произвольный угол. Указанные прямые являются осями косой симметрии, т. е. исследуемые кривые переходят в себя при косом отражении от диаметра, являющемся аффинным преобразованием. В отличие от случая, рассмотренного в XV главе, алгебраические кривые могут обладать параллельными неортогональными диаметрами, что видно на примере диаметров параболы. Эйлер показывает, что если алгебраическая кривая переходит в себя при косых отражениях от двух прямых, она переходит в себя и при аффинном преобразовании, состоящем из этих косых отражений. Подробно разобран случай, когда при двух диаметрах линии косое отражение от одного из этих диаметров не переводит второго диаметра в себя — в этом случае это отражение переводит второй диаметр в третий диаметр. В этой работе используются такие свойства аффинных преобразований, как то, что эти преобразования переводят прямые линии в прямые, параллельные прямые — в параллельные, а середины отрезков — в середины соответственных отрезков.

К вопросам, рассматриваемым в XVIII главе, Эйлер возвращался и позже. В частности, в работе «О центре подобия», представленной в 1777 г. (De centro similitudinis. Nova Acta, (1791) 1795), он доказал, что для любых двух подобных фигур на плоскости существует такая точка Г плоскости, что если a, b и A, B — соответственные точки меньшей и большей фигур, фигуры ΓAB и Γab подобны. Точка Г, построение которой указывается Эйлером, называется центром подобия. По существу в этой теореме доказано, что преобразование подобия всегда обладает единственной неподвижной точкой.

В XIX главе говорится о пересечении алгебраических кривых (ср. стр. 67), а в XX главе — о его применении к решению — «построению» алгебраических уравнений, которое у Эйлера занимает уже гораздо более скромное место, чем у Декарта и даже чем у Ньютона (см. т. II, стр. 43 и 45).

Предметом XXI главы являются некоторые трансцендентные линии: тригонометрические и логарифмические кривые, циклоида, эпициклоида и гипоциклоиды, кривая $x^y = y^x$ и спирали (последние рассматриваются в полярных координатах). Наконец, XXII глава второго тома «Введения в анализ бесконечных» посвящена решению трансцендентных уравнений, содержащих тригонометрические функции, по правилу двух ложных положений.

Конформные преобразования

Помимо движений, преобразований подобия и аффинных, Эйлер исследовал еще один весьма важный класс преобразований — конформные преобразования плоскости. Простейшие виды конформных преобразований плоскости на себя или сферы на плоскость, т. е. непрерывных преобразований, при которых сохраняются углы между кривыми и, следовательно, бесконечно малые треугольники переходят в подобные им бесконечно малые треугольники, появились еще в древности у Аполлония (инверсия плоскости относительно окружности; см. т. I, стр. 130) и Птолемея (стереографическая проекция; см. т. I, стр. 143). Последнее преобразование широко применялось в средние века при конструировании астролябий, на неподвижных и подвижных дисках которых изображались в стереографической проекции горизонт и его параллели на небесной сфере, соответствующие широте данной местности, а также небесный экватор, тропики, эклиптика и наиболее яркие звезды. Более общие конформные преобразования плоскости на себя и сферы на плоскость стали возможны после появления аналитических функций комплексного переменного, так как всякая аналитическая функция $w = f(z)$ и сопряженная с ней функция $w = \overline{f(z)}$ определяют конформное отображение плоскости комплексного переменного z на плоскость комплексного переменного w, а комбинация этого отображения со стереографической проекцией позволяет определить аналогичные отображения сферы на плоскость.

В «Опыте новой теории сопротивления жидкостей» (Essai d'une nouvelle théorie sur la résistance des fluides. Paris, 1752) Даламбер показал, что координаты P, Q скорости движущейся жидкости в точке с координатами x, y пропорциональны выражениям, которые Даламбер записывал в виде:

$$\Delta\left(x+\frac{y}{\sqrt{-1}}\right)+\Delta\left(x-\frac{y}{\sqrt{-1}}\right) \quad \text{и} \quad \frac{1}{\sqrt{-1}}\left[\Delta\left(x+\frac{y}{\sqrt{-1}}\right)-\Delta\left(x-\frac{y}{\sqrt{-1}}\right)\right].$$

Эти выражения представляют собой действительную и мнимую части функции $\Delta(z)$ комплексного переменного $z = x + \frac{y}{\sqrt{-1}}$, причем функция $\Delta(z)$ предполагается аналитической в том смысле, что разлагается в ряд по z с действительными коэффициентами. Функция $\Delta(z)$ осуществляет конформное отображение плоскости комплексного переменного $x + \frac{y}{\sqrt{-1}}$ на плоскость комплексного переменного $P + Q\sqrt{-1}$. В этом труде Даламбера впервые появились так называемые условия Коши — Римана (см. стр. 365) аналитичности функции комплексного переменного. Вскоре затем Эйлер в «Продолжении исследований по теории движения жидкостей» (Continuation des recherches sur la théorie du mouvement des fluides. Mém. Ac. Berlin, (1755) 1757) применил те же конформные отображения, что и Даламбер.

В «Рассуждениях об ортогональных траекториях» (Considerationes de trajectoriis orthogonalibus. Novi Commentarii, (1769) 1770) Эйлер нашел, что семейства линий, пересекающих друг друга под прямым углом, можно получить с помощью функций, записываемых им в виде:

$$x + y\sqrt{-1} = \text{funct}\,(T + V\sqrt{-1}), \qquad x - y\sqrt{-1} = \text{funct}\,(T - V\sqrt{-1}),$$

а именно аналитических функций в указанном только что смысле. Эти преобразования плоскости комплексного переменного являются конформными отображениями и ортогональные семейства линий могут быть получены этими преобразованиями из ортогональных семейств прямых $T = \text{const}$ и $V = \text{const}$.

Эйлер особо останавливается на случае, когда функция funct является многочленом, а линии, в которые переводятся прямые ортогональных семейств,— алгебраические. В частности, рассмотрен случай квадратичного многочлена, определяющего семейство конфокальных эллипсов и гипербол.

Эйлер останавливается также на функции

$$x + y\sqrt{-1} = \frac{f + g(t + u\sqrt{-1})}{h + k(t + u\sqrt{-1})},$$

т. е. на дробно-линейном преобразовании. Он показывает, что это преобразование переводит окружности (или прямые) в окружности (или прямые), т. е. эти преобразования являются круговыми преобразованиями плоскости, при которых ось абсцисс переводится в себя.

Конформные преобразования Эйлер применил также в картографии. В работах «Об изображении поверхности шара па плоскости» (De repraesentatione superficiei sphaericae super plano. Acta, (1777) 1778) и «О географической проекции поверхности шара» (De projectione geographica superficiei sphaericae. Acta, (1777) 1778) он рассмотрел вопрос о наиболее общем конформном отображении сферы на плоскость, или, как он выражался, о таком отображении, при котором малые области Земли представляются подобными фигурами на плоскости. Для решения этой задачи Эйлер сначала производит стереографическую проекцию сферы на плоскость, при которой точке сферы с широтой v и долготой t ставится в соответствие точка плоскости, определяемая комплексным числом

$$z = \operatorname{tg}\frac{v}{2}(\cos t + i\sin t),$$

а затем в плоскости комплексного переменного z производится конформное преобразование. Для того чтобы меридианы и параллели при этом изображались кругами, конформное преобразование должно быть дробно-линейным.

Преобразования, выражаемые функциями:

$$x + iy = f(u + it), \qquad x - iy = \varphi(u - it),$$

также предполагаемые аналитическими в смысле разложимости в ряд, но уже не с действительными, а, вообще говоря, с комплексными коэффициентами, применил Лагранж в работе «О построении географических карт» (Sur la construction des cartes géographiques. Nouv. Mém. Ac. Berlin, (1779) 1881). Лагранж выбирал функции f и φ, требуя, чтобы меридианы и параллели сферы перешли в заданную ортогональную систему кривых на плоскости. Здесь же Лагранж показал, что если квадрат дифференциала длины дуги на сфере равен $ds^2 = du^2 + q^2dt^2$, то масштаб m карты определяется по формуле

$$\frac{1}{m^2} = q^2 f'(u + it)\,\varphi'(u - it).$$

Отметим также работу Ф. И. Шуберта «О географической проекции эллиптического сфероида» (De projectione sphaeroidis ellipticae geographica. Nova Acta, (1787)1789), где для отображения поверхности на плоскость с сохранением углов впервые был применен термин «конформная проекция» (projectio conformis), а также доказано, что при стереографическом проектировании эллипсоида вращения из точки экватора на плоскость, перпендикулярную к радиус-вектору этой точки, как меридианы, так и параллели переходят в эллипсы, подобные меридиану эллипсоида.

Общая теория круговых преобразований была построена А. Ф. Мёбиусом (1855) после того, как Ж. Лиувилль (1850) рассмотрел конформные преобразования в пространстве и доказал, что они являются аналогами не общих конформных, а круговых преобразований плоскости, т. е. переводят сферы в сферы.

Аналитическая геометрия на плоскости во второй половине XVIII в.

Мы лишь упомянем вышедшие одновременно с «Введением в анализ бесконечных» Эйлера двухтомные «Основания анализа для употребления итальянского юношества» (Istituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana. Milano, 1748) Марии Гаэтаны Аньези (1718—1799) как первый большой труд по математике, написанный женщиной в Новое время. Первый том «Оснований» содержал, среди прочего, обстоятельное и ясное изложение доэйлеровской аналитической геометрии; в нем была вновь рассмотрена и кривая третьего порядка, нередко называемая версьерой Аньези, но встретившаяся еще Ферма (см. т. II, стр. 186) [1]. Гораздо больший интерес представляет объемистое (почти 700 страниц) «Введение в анализ алгебраических кривых» (Introduction à l'analyse des lignes courbes. Genève, 1750) швейцарца Г. Крамера, в основном подготовленное, судя по его письму к Эйлеру от 30 сентября 1744 г., еще около 1740 г. В этом труде, нам уже встречавшемся (см. стр. 66), получили дальнейшее развитие и методы Ньютона, Стирлинга, Гюа де Мальва и Эйлера, с которым Крамер регулярно переписывался в 1743—1752 гг. Алгебраические кривые Крамер исследовал алгебраическими же средствами. Используя метод параллелограмма Ньютона, при изучении особых точек он избег ошибки Гюа де Мальва в вопросе о точках возврата второго рода, учитывая более чем один первый член разложения в бесконечный ряд; упомянем, что об этой ошибке Эйлер писал Крамеру еще 15 декабря 1744 г. (ср. стр. 165). Обратив особое внимание на разветвление рядов в особых точках алгебраических кривых, встретившееся еще Ньютону, Крамер не мог все же при тогдашнем уровне математики далеко продвинуться в изучении этого явления. Только В. Пюизё (1840), применяя теорию функций комплексного переменного Коши, положил начало современной теории циклов разложений в окрестности критических алгебраических функций и, в частности, впервые исследовал сходимость разложений, получаемых с помощью параллелограмма Ньютона.

[1] Версьерой назвал эту кривую другой итальянский математик Гвидо Гранди, термин этот, вероятно, происходит от латинского versare — обращать, поворачивать. Эту кривую называют также локоном Аньези. После выхода «Оснований» Аньези почти всецело отдалась благотворительной деятельности.

В книге Крамера содержится также классификация кривых до пятого порядка включительно, в основу которой положено их различение по виду бесконечных ветвей, и подробный разбор кратных точек кривых до восьмого порядка включительно. Отметим, что его имя получил парадокс, встретившийся еще Маклорену (см. стр. 156) и сообщенный Крамером Эйлеру в письме от 30 сентября 1744 г., после чего они оба долго обсуждали его в своей переписке. Парадокс состоит в том, что, с одной стороны, число точек, однозначно определяющих кривую порядка n, как показал еще Стирлинг, равно $n(n+3)/2$, а, с другой стороны, две кривые порядка n пересекаются в n^2 точках, т. е. n^2 общих точек могут принадлежать к различным кривым порядка n, между тем $n^2 > \frac{n(n+3)}{2}$ при $n > 3$.

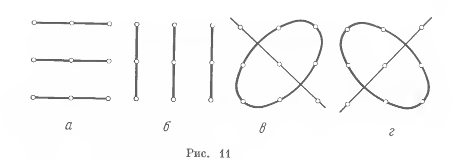


Рис. 11

Для $n = 3$ Эйлер (Mém. Ac. Berlin, (1748) 1750) показал, что девять точек однозначно определяют кривую третьего порядка (т. е. линейная система уравнений, служащая для определения девяти коэффициентов, не может оказаться неопределенной). Например, если взять точки с координатами $(-a, a)$, $(0, a)$, (a, a), $(-a, 0)$, $(0, 0)$, $(a, 0)$, $(-a, -a)$, $(0, -a)$, $(a, -a)$, то при любом отношении $m : n$ уравнение

$$m \cdot y(y^2 - a^2) = n \cdot x(x^2 - a^2)$$

выражает линию третьего порядка, проходящую через эти точки; при $m = 0$ или $n = 0$ эта кривая распадается на три параллельные прямые (рис. 11, *а*, *б*), а при $m = \pm n$ — на прямую и эллипс (рис. 11, *в*, *г*).

Общая теория всех вопросов, связанных с парадоксом Крамера, была разработана Ю. Плюккером (1828).

Во второй половине XVIII в. исследования по общей теории плоских алгебраических кривых в значительной степени исчерпали себя. Из результатов этого времени следует упомянуть теоремы А. П. Диониса дю Сежура (1734—1794) и М. Б. Гудена (1734—1817) о том, что кривая порядка n имеет не более $n^2 - n$ точек, в которых касательные параллельны данному направлению, и не более n асимптот; соответствующий «Трактат об алгебраических кривых» (Traité de courbes algébriques. Paris, 1756) вышел без указания авторов. Число $n^2 - n$ было открыто вновь В. Понселе (1818) и получило у него применение как характеристика класса кривой.

Отметим также «Аналитические этюды об алгебраических уравнениях и свойствах кривых» (1762) и «Свойства алгебраических кривых» (1772) Э. Варинга (ср. стр. 81). В первой из этих книг дано аналитическое выра-

жение проективных преобразований (коллинеаций; см. стр. 197) на плоскости в виде:

$$x = \frac{pz + qv + r}{Az + Bv + C}, \qquad y = \frac{Pz + Qv + R}{Az + Bv + C}.$$

Среди различных метрических теорем второй книги любопытна следующая: если кривая $y = ax^n + bx^{n-1} + \ldots$ пересекается с осью абсцисс в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и имеет экстремумы $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$, то

$$\frac{y_1 y_2 \ldots y_{n-1}}{(x_1 - x_2)^2 \ldots (x_1 - x_n)^2 (x_2 - x_3)^2 \ldots (x_2 - x_n)^2 \ldots (x_{n-1} - x_n)^2} = \frac{a^n}{b^n}.$$

Аналитическая геометрия в пространстве

Первые подходы к распространению метода координат на трехмерную геометрию сделаны были еще в XVII в. Декарт мимоходом коснулся вопроса об изучении пространственных кривых с помощью ее ортогональных проекций на две взаимно перпендикулярные плоскости и отнесения этих проекций к прямой, по которой эти плоскости пересекаются; Ферма показал примеры исследования формы тел,— мы бы сказали поверхностей второго порядка,— с помощью их плоских сечений и, также мимоходом, заметил, что уравнение с тремя переменными выражает поверхность; Дезарг высказал мысль об определении положения точек в пространстве с помощью трех ортогональных координатных отрезков. Все эти идеи долгое время оставались неразвитыми, хотя у Лагира уже появилось первое уравнение поверхности (см. т. II, стр. 113).

Аналитическая геометрия в пространстве явилась по существу созданием XVIII в. Летом 1700 г. Антуан Паран (1666—1716) представил Парижской академии наук, членом которой являлся, работу о свойствах поверхностей, вошедшую в состав его «Опытов и исследований по математике и физике» (Essais et recherches de mathématique et de physique. Paris, 1705). Здесь была решена задача об определении касательной плоскости к поверхности сферы с «поверхностным уравнением» — équation superficielle[1]

$$c^2 + y^2 - 2cy + b^2 + x^2 - 2bx + a^2 + z^2 - 2az = r^2,$$

а кроме того, частично исследованы с помощью сечений, параллельных координатным плоскостям, поверхности:

$$y = (b + x)\sqrt{\frac{z - x}{z}} \quad \text{и} \quad y = \frac{z^3}{x^2 + az}.$$

В начале XVIII, а может быть, и в конце XVII в. методом координат в пространстве овладел Иоганн Бернулли, применивший его к поставленной им в 1697 г. проблеме геодезических линий. 24 декабря 1697 г. И. Бернулли письменно сообщил Лопиталю, что нашел дифференциальное уравнение геодезических, которое, правда, не умеет пока решить, а 6 февраля 1715 г. в письме к Лейбницу охарактеризовал понятие о координатах и

---

[1] Уравнения касательной плоскости Паран не дал; он ограничился отысканием с помощью дифференциального исчисления некоторых двух прямых, лежащих в этой плоскости.

уравнении поверхности в следующих словах: «Под данной кривой поверхностью я разумею такую, отдельные точки которой (подобно точкам данной кривой линии) определяются тремя ординатами x, y, z, отношение между которыми выражается данным уравнением; эти же три координаты суть не что иное, как три перпендикулярных отрезка, проведенных из какой-либо точки поверхности к трем плоскостям, данным по положению и взаимно пересекающимся под прямыми углами»[1]. Лейбниц на это ответил 9 апреля, что и он некогда пришел к таким же идеям, но не имел времени развить их подробнее. Позднее в 1728 г. И. Бернулли поставил задачу о геодезических перед Эйлером и, получив от него зимой 1729 г. дифференциальное уравнение геодезических, в ответном письме привел найденное им самим уравнение, по форме отличное от уравнения Эйлера (ср. стр. 188).

Однако подготовленное им в то время изложение своего метода и результатов И. Бернулли опубликовал лишь в 1742 г., десятью годами позднее, чем появилась в печати соответствующая статья Эйлера, равно важная в истории как аналитической, так и особенно дифференциальной геометрии.

В работе «О кратчайшей линии на произвольной поверхности, соединяющей две произвольные точки» (De linea brevissima in superficie quacunque duo quaelibet puncta jungente. Commentarii, (1728) 1732), Эйлер, введя систему взаимно перпендикулярных координат t, x, y, указал общим образом, что поверхность выражается уравнением с тремя координатами, а линия — двумя такими уравнениями, и привел уравнения трех классов поверхностей — цилиндрических, конических и поверхностей вращения, которые в современных обозначениях можно соответственно записать:

$$z = f(y), \qquad \frac{z}{x} = f\left(\frac{y}{x}\right), \qquad z = f(x^2 + y^2).$$

О найденном им дифференциальном уравнении геодезических будет сказано далее (см. стр. 188). Следует добавить, что Эйлер здесь еще не применяет все три координатные плоскости, как во втором томе «Введения в анализ бесконечных» (1748), но пользуется лишь одной исходной плоскостью t, x и в ней осью t, после чего из точки данной поверхности опускался перпендикуляр y на плоскость t, x и из основания этого перпендикуляра — перпендикуляр x на ось t. Самые уравнения упомянутых классов поверхностей он записывал частью словесно, частью аналитически. Так, в случае конической поверхности с вершиной в начале y/x есть однородная функция x и y нулевого измерения, а уравнение поверхности вращения вокруг оси t имеет вид $x^2 + y^2 = T$, где T — какая-либо функция t.

Разработкой аналитической геометрии в пространстве занимался в Петербурге и Я. Герман. В «Записках» Петербургской академии за 1732—1733 гг. (1738) он исследовал, отправляясь от их уравнений, плоскость

$$az + by + cx - e^2 = 0$$

и некоторые поверхности второго порядка: параболический цилиндр («параболически-цилиндрический клин»)

$$z^2 - ax - by = 0,$$

конусы

$$z^2 = xy \text{ и } az^2 - bxz - cyz + cy^2 = 0,$$

[1] *G. W. Leibniz.* Mathematische Schriften. Bd. III. Halle, 1858, S. 938.

«коноидальные поверхности»

$$z^2 - ax^2 - bxy - cy^2 - ex - fy = 0$$

и

$$az^2 + byz + cy^2 - exz + fx^2 + gz - bx = 0$$

и, наконец, «круглые тела»

$$u^2 - x^2 - y^2 = 0,$$

где u — функция z, в частности, $u^2 = a^2 - \frac{a^2z}{b}$ и $u^2 = a^2 - \frac{a^2r^2}{b^2}$ (т. е. параболоид вращения и сфероид). Из высших поверхностей Герман рассмотрел поверхность

$$(b - r)\sqrt{a^2 - y^2} = bx,$$

изучавшуюся Валлисом без записи уравнения под названием «конусоклин». Исследование не было систематическим, но на различных примерах Герман показывал, как можно определить касательную плоскость и экстремальные точки поверхности, а также различные плоские сечения, позволяющие выявить ее форму. Общая трактовка пространственных координат и поверхностей у Германа была такой же, как в только что разобранной работе Эйлера, и он удовлетворялся рассмотрением «тел» в четырех верхних октантах ($z \geqslant 0$) или даже только в первом октанте ($x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$).

Еще до публикации статьи Эйлера в Париже в 1731 г. вышла упоминавшаяся нами книга А. К. Клеро «Исследования о кривых двоякой кривизны» (Recherches sur les courbes à double courbure), представленная Парижской академии в 1729 г. Термин «кривые двоякой кривизны», применяемый и в настоящее время, объясняется тем, что пространственная кривая определялась, как это предложил Декарт, своими ортогональными проекциями на две взаимно перпендикулярные плоскости; этот термин был предложен парижским академиком Анри Пито (1695—1771) (Mém. Ac. Paris, (1724) 1726), с тем чтобы подчеркнуть существенное отличие винтовой линии на цилиндре от спирали на плоскости, с которой винтовая линия имеет некоторое сходство.

Книга Клеро по существу положила начало трем геометрическим дисциплинам: аналитической геометрии в пространстве, дифференциальной геометрии и начертательной геометрии, основанной на изображении пространственных фигур с помощью их ортогональных проекций на две перпендикулярные плоскости. Свободно и в полном объеме оперируя пространственными координатами, Клеро, помимо уравнений (сферы, круглого конуса и параболоида вращения), вывел уравнения нескольких более сложных поверхностей вращения — эллипсоида и однополостного гиперболоида вращения, а также поверхности

$$x^4 - a^2y^2 + a^2z^2$$

вращения параболы $x^2 = ay$ вокруг ее касательной в вершине. Клеро нашел также уравнение конуса с заданной вершиной и плоской направляющей (в качестве примеров взяты параболы, эллипсы и гиперболы высших порядков) и отметил, что в случае, когда вершина — начало координат, уравнение конуса — однородное. Далее он изучал пространственные

кривые по данным уравнениям. На примере поверхности $z = a^3$ Клеро показал, как следует изучать форму поверхности с помощью ее плоских сечений. Упомянем, что в «Исследованиях» Клеро впервые, по-видимому, была явно выписана — в связи с выводом уравнения сферической поверхности — общая формула расстояния между двумя точками на плоскости и в пространстве, последняя в форме

$$f = \sqrt{\overline{x \mp a}^2 + \overline{y \mp b}^2 + \overline{z \mp c}^2},$$

буквы a, b, c обозначают у него неотрицательные числа, хотя Гудде еще в 1659 г. предложил отказаться от такого ограничения. Разумеется, аналитическим выражением теоремы Пифагора фактически пользовались и ранее, например Лагир и Паран. Все изложенное, кроме последней формулы, вошло в первый отдел книги Клеро; о задачах дифференциальной геометрии, решенных в «Исследованиях», мы расскажем ниже.

В том же 1731 г. в одной статье, появившейся в «Записках» Парижской академии наук, Клеро впервые записал уравнение плоскости в отрезках

$$\frac{ax}{c} + \frac{ay}{b} + z = a.$$

«Приложение о поверхностях» Эйлера

Первым систематическим изложением аналитической геометрии в пространстве явилось «Приложение о поверхностях» во втором томе «Введения в анализ бесконечных» (1748) Эйлера. Подобно тому как основной текст этого тома был непосредственно связан с изучением функций одного переменного, это приложение находилось в тесной связи с анализом функций двух переменных.

В I главе «Приложения» Эйлер вводит прямоугольные декартовы координаты в пространстве и высказывает некоторые общие соображения об уравнениях поверхностей, в частности об условиях симметрии относительно плоскостей координат. Во II и III главах разъясняется метод изучения поверхностей и, в частности, цилиндра, конуса и сферы с помощью их плоских сечений. В IV главе рассматривается преобразование прямоугольных координат, которое записывается в виде:

$$x = p(\cos\xi\cos\theta - \sin\xi\cos\eta\sin\theta) + q(\cos\xi\sin\theta + \sin\xi\cos\eta\cos\theta) - r\sin\xi\sin\eta + f,$$

$$y = -p(\sin\xi\cos\theta + \cos\xi\cos\eta\sin\theta) - q(\sin\xi\cos\theta - \cos\xi\cos\eta\cos\theta) - r\cos\xi\sin\eta + g,$$

$$z = -p\sin\eta\sin\theta + q\sin\eta\cos\theta + r\cos\eta + h.$$

Углы ξ, η, θ, определяющие поворот осей, в настоящее время называются углами Эйлера: угол θ — «угол прецессии» — является углом вращения вокруг координатной оси Or (рис. 12), при котором ось Op переходит в прямую On — «линию узлов» — линию пересечения координатных плоскостей pOq и xOy; угол η — «угол нутации» — является углом вращения вокруг прямой On, при котором координатная ось Or переходит в ось Oz; угол ξ — «угол собственного вращения» вокруг прямой Oz, при котором прямая On переходит в ось Ox.

В V главе изучается общее уравнение поверхностей второго порядка, которое записывается в следующем виде:

$$\alpha z^2 - \beta yz + \gamma xz + \delta y^2 + \varepsilon xy + \xi x^2 + \eta z + \theta y + ix + \tau = 0,$$

и прежде всего по членам второго измерения изучается поведение поверхности в бесконечности, причем впервые применяется асимптотический конус. Заложив тем самым основы классификации, Эйлер с помощью преобразования координат приводит уравнения поверхностей второго порядка к простейшим формам. Канонические уравнения невырожденных

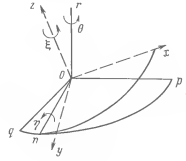


Рис. 12

поверхностей второго порядка у Эйлера имеют вид:

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = a^2; \quad Ap^2 + Bq^2 - Cr^2 = a^2, \quad Ap^2 - Bq^2 - Cr^2 = a^2,$$
$$Ap^2 + Bq^2 = ar, \; Ap^2 - Bq^2 = ar, \; Ap^2 = aq.$$

Первую из этих поверхностей Эйлер называет «эллиптоидом», вторую (однополостной гиперболоид) —«эллиптико-гиперболической поверхностью», третью (двухполостной гиперболоид) —«гиперболико-гиперболической поверхностью», четвертую (эллиптический параболоид) —«эллиптико-параболической поверхностью», пятую (гиперболический параболоид) —«гиперболико-параболической поверхностью» и шестую — «параболическим цилиндром». Эйлер формулирует и основные критерии для определения класса поверхности: «Если мы получаем здесь, что $4\,\alpha\zeta$ больше, чем γ^2, $4\alpha\delta$ больше, чем β^2, $4\delta\zeta$ больше, чем ε^2, и $\alpha\varepsilon^2 + \delta\gamma^2 + \zeta\beta^2$ меньше, чем $\beta\gamma\varepsilon + 4\alpha\delta\zeta$, то поверхность будет замкнутой и будет принадлежать к первому роду, который мы назвали эллиптоидальным... Если нет одного или нескольких из этих условий и если, вместе с тем, нет [равенства] $\alpha\varepsilon^2 + \delta\gamma^2 + \zeta\beta^2 \pm \beta\gamma\varepsilon + 4\alpha\delta\zeta$, то поверхность будет относиться либо ко второму, либо к третьему роду, и она будет гиперболическим телом, обладающим асимптотическим конусом, причем в случае второго рода этот конус описан вокруг нее, в случае третьего рода — вписан в нее. Если же будем иметь $\alpha\varepsilon^2 + \delta\gamma^2 + \zeta\beta^2 = \beta\gamma\varepsilon + 4\alpha\delta\zeta$, а в этом случае выражение $\alpha z^2 + \beta yz + \gamma xz + \delta y^2 + \varepsilon xy + \zeta x^2$ может быть разложено на два простых множителя, либо мнимых, либо действительных, то в первом случае поверхность будет принадлежать четвертому роду, во втором случае — пятому. Если же, наконец, это выражение имеет два равных множителя, т. е. является квадратом, то получается шестой род. Так что легко сразу определить, к какому роду относится

любое предложенное уравнение; трудно только различить второй и третий роды, так как они оба могут слиться в один»[1].

Условие невырожденности поверхности, состоящее в неравенстве нулю некоторого определителя четвертого порядка, Эйлер не формулирует.

Пересекая гиперболический параболоид $Ap^2 - Bq^2 = ar$ координатной плоскостью $r = 0$, Эйлер находит, что это сечение является парой прямых, но о других прямолинейных образующих этой поверхности не упоминает. Приведем чертеж Эйлера сечений этой поверхности тремя координатными плоскостями (рис. 13, *а*) и перспективное изображение той же поверхности (рис. 13, *б*).

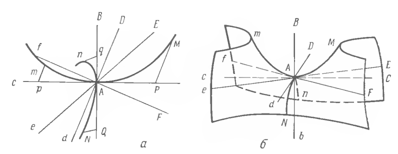


Рис. 13

В V главе Эйлер впервые изучил все виды невырожденных поверхностей второго порядка. Античные математики рассматривали только эллипсоид вращения —«сфероид», двуполостной гиперболоид вращения — «тупоугольный коноид» и параболоид вращения —«прямоугольный коноид» (ср. т. I, стр. 118). Однополостной гиперболоид вращения рассмотрел Кавальери; Валлис в своей «Механике» (1670) называл эту поверхность «гиперболическим цилиндроидом». Двуполостной гиперболоид и эллиптический параболоид общего вида впервые рассмотрел Ферма, называвший их «косыми коноидами». Гиперболический параболоид общего вида рассмотрен впервые Эйлером. Современные названия этих поверхностей, носящие явные следы названий Эйлера, были установлены Монжем (см. стр. 181).

В конце главы Эйлер кратко формулирует принципы классификации поверхностей третьего и высших порядков.

В последней VI главе приложения Эйлер коротко остановился на отдельных вопросах теории пространственных кривых, рассматриваемых как пересечения двух поверхностей.

Отметим здесь же, что в общей теории поверхностей высших порядков XVIII в. не принес существенных результатов. Упоминания заслуживает отдел, посвященный поверхностям в «Аналитических этюдах» Варинга (1762), содержащий некоторые теоремы о диаметральных плоскостях и указание, что число независимых коэффициентов в общем уравнении поверхности порядка n равно $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3} - 1$ (ср. стр. 172).

---

[1] *Л. Эйлер*. Введение в анализ бесконечных, т. II, стр. 359. В русском переводе В. С. Гохмана термины Эйлера «эллиптоид» и «эллиптоидальный» переведены словами «эллипсоид» и «эллипсоидный» (см. там же, стр. 389).

Движения в пространстве

Наряду с изучением движений на плоскости в XVIII в. начали изучаться и движения в пространстве, что было необходимо для создавшейся в это время механики твердого тела. Эта теория снова приводит нас к Эйлеру, который в «Общих формулах для произвольного перемещения жестких тел» (Formulae generales pro translatione quacunque corporum rigidorum. Novi Commentarii, (1775) 1776), впоследствии включенных в посмертное издание его «Теории движения твердых или жестких тел» (Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum. Rostochii et Gryphiswaldiae, 1790). приводит аналитическую запись движения в пространстве в виде:

$$x = Fp + F'q + F''r + f,$$
$$y = Gp + G'q + G''r + g,$$
$$z = Hp + H'q + H''r + h,$$

и находит, что коэффициенты F, G, H и т. д. связаны соотношениями:

$$F^2 + G^2 + H^2 = 1, \quad FF' + GG' + HH' = 0,$$
$$F'^2 + G'^2 + H'^2 = 1, \quad F'F'' + G'G'' + H'H'' = 0,$$
$$F''^2 + G''^2 + H''^2 = 1, \quad FF'' + GG'' + HH'' = 0.$$

Далее Эйлер выражает коэффициенты F, G, H, ... через шесть углов широты и долготы ξ, η, ξ', η', ξ'', η'':

$$F = \sin\xi, \quad G = \cos\xi \sin\eta, \quad H = \cos\xi \cos\eta,$$
$$F' = \sin\xi', \quad G' = \cos\xi' \sin\eta', \quad H' = \cos\xi' \cos\eta',$$
$$F'' = \sin\xi'', \quad G'' = \cos\xi'' \sin\eta'', \quad H'' = \cos\xi'' \cos\eta''.$$

При этом с помощью условий $FF' + GG' + HH' = 0$ и т. д. углы ξ, ξ', ξ'' выражаются через углы η, η', η'' по формулам:

$$\operatorname{tg}\xi = \frac{-\Delta}{\cos(\eta' - \eta'')}, \quad \operatorname{tg}\xi' = \frac{-\Delta}{\cos(\eta'' - \eta)}, \quad \operatorname{tg}\xi'' = \frac{-\Delta}{\cos(\eta - \eta')},$$

где

$$-\Delta = \cos(\eta - \eta')\cos(\eta' - \eta'')\cos(\eta'' - \eta).$$

В добавлении к той же работе Эйлер доказал теорему: «Каким бы образом сфера ни вращалась вокруг своего центра, всегда можно указать диаметр, направление которого в конечном положении совпадает с его начальным положением» [1]. Эйлер доказывает эту теорему синтетически с помощью изящного построения на сфере. Аналогичный результат был получен Даламбером в «Трактате о динамике» (Traité de dynamique. Paris, 1743). Последняя теорема Эйлера равносильна теореме Даламбера о том, что всякое вращение в пространстве является поворотом вокруг прямой. С помощью этой теоремы французский геометр Мишель Шаль (1793—1880) доказал, что всякое движение в пространстве, не являющееся переносом и поворотом, есть винтовое движение, т. е. комбинация поворота вокруг прямой с переносом вдоль нее. Здесь под вра-

---

[1] *L. Euler.* Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum. Ed. 2. Greifswald, 1790, p. 457.

щением и движением в пространстве понимаются вращения и движения, не изменяющие ориентацию пространства (к движениям, изменяющим ориентацию, относится отражение от плоскости и его комбинации с поворотом или переносом).

Другое выражение движения в пространстве через три коэффициента переноса и три «эйлеровых» угла, примененных Эйлером во втором томе «Введения в анализ бесконечных» для преобразования координат, также часто употреблялось впоследствии в механике.

Дальнейшее развитие аналитической геометрии в пространстве

Эйлер в 1748 г. указал лишь две прямые, лежащие на гиперболическом параболоиде. Вскоре были получены и более общие результаты. В. Брейкенридж в «Письме графу Мэрчмонту о сечении тела, до сих пор не рассматривавшемся геометрами» (Letter to Earl of Marchmont concerning the section of a solid, hitherto not considered by Geometers. Philos. Trans., 1759), рассмотрел линейчатую поверхность, прямолинейные образующие которой соединяют точки пересечения данной прямой и данной кривой, «директрисы» с плоскостью, передвигаемой параллельно себе; в настоящее время такие поверхности называются коноидами. Более подробно он изучил случай, когда директриса также является прямой, т. е. когда поверхность представляет собой гиперболический параболоид. Парижский профессор математики Антуан Реми Модюи (1731—1815) произвел кубатуру тела, ограниченного плоскостями, проектирующими стороны косого четырехугольника $ABCD$ на какую-либо плоскость, проходящую через вершину A, этой плоскостью, а также частью поверхности, описанной прямой, скользящей вдоль двух противолежащих сторон AB и CD и пробегающей их в одно время. Для случая, когда проекции BC и AD параллельны, т. е. для гиперболического параболоида, Модюи обнаружил еще второе семейство прямолинейных образующих поверхности (Mém. div. savants, 1763). Более общие поверхности, образуемые прямой, скользящей по двум кривым, оставаясь параллельной данной плоскости, изучал военный инженер, ученик Монжа Шарль Тенсо (1749—1822) в работе «Решение некоторых задач, относящихся к теории кривых поверхностей и кривых двоякой кривизны» (Solution de quelques problèmes relatifs à la théorie des surfaces courbes et des courbes à double courbure. Mém. div. savants, 1780). Тенсо называл эти поверхности «параллелоидами», а рассматривавшийся Брейкенриджем частный случай параллелоида, когда одна из кривых является прямой, перпендикулярной направляющей плоскости, он назвал «коноидом», так как античное значение этого термина, первоначально обозначавшего параболоид и одну из полостей двухполостного гиперболоида вращения, к этому времени вышло из употребления. Тенсо доказал для коноидов и параллелоидов общего вида ряд теорем об объемах и площадях плоских сечений, в частности, Тенсо рассматривал и гиперболический параболоид с уравнением $Ky = xz$ Из результатов работы Тенсо отметим теорему о том, что углы наклона α, β, γ плоскости к координатным плоскостям системы прямоугольных координат связаны соотношением

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1,$$

а также пространственное обобщение теоремы Пифагора: квадрат площади плоской фигуры равен сумме квадратов площадей ее прямоугольных проекций на три взаимно перпендикулярные плоскости.

Случай, когда площадью является треугольник, дополняющий прямой трехгранный угол до тетраэдра, встречается в записках Декарта 1619—1621 гг., который, вероятно, несколько обобщил результат, найденный в случае трех равных ребер четырехгранника И. Фаульгабером (опубл. 1622).

Возвращаясь к вопросу о прямолинейных образующих гиперболического параболоида и однополостного гиперболоида, добавим, что они получили применение в «Начертательной геометрии» (1795) Монжа (см. стр. 197) и что основные предложения об обеих системах этих образующих установили тот же Монж и его сотрудник, профессор Политехнической школы и Сорбонны Жан Никола Пьер Ашетт (1769—1834) в их совместном труде «Приложения алгебры к геометрии» (Applications de l'algèbre à la géométrie. Paris, 1805); первоначально издано в форме статьи в «Journal de l'École Polytechnique», год X, т. е. 1801—1802).

Монжу, а также Лагранжу принадлежит решение нескольких элементарных, но весьма важных для последующего систематического изложения аналитической геометрии в пространстве задач. Монж занялся этими задачами, как вводными, в своей замечательной работе по дифференциальной геометрии, представленной Парижской академии в 1771 г., но опубликованной лишь в 1785 г. (см. стр. 191). В первой задаче он вывел уравнение плоскости, проходящей через данную точку x', y', z' и перпендикулярной к прямой, заданной уравнениями двух плоскостей; этот результат Монж тут же применил к выводу уравнения нормальной плоскости пространственной кривой $y = \varphi(x)$, $z = \psi(x)$. Другая задача состояла в определении длины перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную прямую. По форме изложение Монжа носило вполне современный характер.

Впоследствии краткое и весьма изящное решение основных задач на прямую и плоскость Монж дал в первых трех выпусках «Листов анализа, приложенного к геометрии» (1795; см. стр. 193), а более полное и во многом оригинальное изложение начал аналитической геометрии в пространстве, включая теорию поверхностей второго порядка, предложил в уже упомянутом «Приложении алгебры к геометрии» (1802, 1805), написанном вместе с Ашеттом. Этот небольшой курс должен был служить введением к «Листам анализа» и вошел также в их издание 1805 г.

Аналитической геометрии в пространстве было посвящено также «Аналитическое решение некоторых задач о треугольных пирамидах» (Solution analytique de quelques problèmes sur les pyramides triangulaires. Nouv. Mém. Ac. Berlin, (1773) 1775). Название работы подчеркивает, что в ней методы аналитической геометрии применяются к задачам, до того времени решавшихся только синтетическим путем, и любопытно, что в этой чисто геометрической работе, как и в «Аналитической механике» Лагранжа, нет ни одного чертежа. Рассматривается тетраэдр, одна из вершин L которого является началом системы прямоугольных координат, а три другие M, M' и M'' имеют соответственно координаты x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z''. Лагранж вычислил длины всех ребер и площади всех граней тетраэдра, высоту тетраэдра (опущенную из начала) и его объем. Задавшись произвольной точкой, Лагранж нашел ее расстояние от вершин тетраэдра, а, требуя, чтобы эти расстояния были равны, нашел радиус

сферы, описанной около тетраэдра. Далее он вычислил расстояния этой точки от граней тетраэдра и, требуя, чтобы эти расстояния были равны, нашел радиус сферы, вписанной в тетраэдр, и радиусы вневписанных сфер тетраэдра. Он нашел также уравнения плоскостей, проходящих через каждое из ребер и середину противолежащего ребра, и, определив точку пересечения этих плоскостей — центр тяжести тетраэдра.

При вычислении площади грани $LM'M''$ Лагранж воспользовался формулой

$$[(x')^2 + (y')^2 + (z')^2][(x'')^2 + (y'')^2 + (z'')^2] - (x'x'' + y'y'' + z'z'')^2 = \\ = (y'z'' - z'y'')^2 + (z'x'' - x'z'')^2 + (x'y'' - y'x''),$$

которую мы в настоящее время называем формулой Лагранжа и записываем с помощью векторов $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{r}''$ с координатами x', y', z' и x'', y'', z'' в виде

$$(\mathbf{r}')^2(\mathbf{r}'')^2 - (\mathbf{r}'\mathbf{r}'')^2 = [\mathbf{r}'\mathbf{r}'']^2,$$

где $(\mathbf{r}')^2$, $(\mathbf{r}'')^2$ — скалярные квадраты, $\mathbf{r}'\mathbf{r}''$ — скалярное произведение, а $[\mathbf{r}'\ \mathbf{r}'']$ — векторное произведение, причем в правой части формулы стоит скалярный квадрат векторного произведения.

Исследования Эйлера, Монжа, Лагранжа и других математиков позволили в конце XVIII в. приступить к выработке нового по духу и по распределению материала учебного курса аналитической геометрии, который в главных чертах сохраняется до сих пор в высших технических учебных заведениях, он и создан был первоначально для учащихся Парижской Политехнической школы. О труде Монжа 1795 г. уже говорилось (см. стр. 181); вскоре затем систематическое изложение аналитической геометрии на плоскости и в пространстве дал в IV и соответственно V главах первого тома своего «Трактата о дифференциальном и интегральном исчислении» (Париж, 1797) Лакруа. В предисловии к «Трактату» Лакруа назвал систему геометрии, в которой свойства протяженных образов чисто аналитически выводятся из возможно меньшего числа принципов, аналитической геометрией, употребив эти слова по аналогии с аналитической механикой Лагранжа. После этого термин «аналитическая геометрия», иногда применявшийся и ранее для обозначения алгебраических приемов решения геометрических задач [1], получает как более специальный смысл, так и широкое распространение. Начальный курс аналитической геометрии на плоскости (метод координат, задачи на прямую, элементарная теория кривых второго порядка) Лакруа вскоре дал в другом руководстве — «Элементарный трактат о прямолинейной и сферической тригонометрии и приложений алгебры к геометрии» (Traité élémentaire de trigonométrie rectiligne et sphérique et d'application de l'algèbre à la géométrie. Paris, год VII, т. е. 1798—1799), и этот материал уже не повторяется во втором издании его большого «Трактата» (1810). О достоинствах «Элементарного трактата» говорит хотя бы многократное его переиздание — в несколько переработанном виде — на протяжении всего XIX в.: в 1897 г. вышло его 25-е издание. В начале прошлого века термин «аналитическая геометрия» появляется и в названиях учебных руководств, впервые, по-видимому, во втором издании «Очерка аналитической геометрии, приложенного к

[1] Например, у М. Ролля (Mém. Ac. Paris, 1709), который — в духе Декарта — понимал под аналитической геометрией еще и графическое решение алгебраических задач.

кривым и поверхностям второго порядка» (Essai de géométrie analytique appliqué aux courbes et aux surfaces du second degré. Paris, 1805 и многие другие издания)[1] парижского профессора и академика Жана Батиста Био (1774—1862), имя которого носит один из важных законов электродинамики, закон Био — Савара.

Идея многомерного пространства

Мы уже отмечали зародыши идеи многомерного пространства у ал-Фараби, Абу-л-Вафы, Орема и Штифеля (см. т. I, стр. 230, 278, 299), но только систематическое применение трех координат для описания геометрии пространства могло привести к истолкованию n чисел как координат точки n-мерного пространства, а уравнений между этими координатами как уравнений поверхностей и линий этого пространства.

В весьма общей форме предположение о возможности многомерных пространств высказал в одной из своих ранних работ знаменитый впоследствии философ Иммануил Кант (1724—1804). В сочинении «Мысли об истинной оценке живых сил и разбор доказательств, которыми пользовались г-н Лейбниц и другие механики в этом спорном вопросе, а также некоторые предварительные соображения, касающиеся силы тел вообще» (Gedanken von der wahren Schätzung der lebendigen Kräfte und Beurteilung der Beweise, deren sich Herr von Leibniz und andere Mechaniker in dieser Streitsache bedienet haben, nebst einigen vorhergehenden Betrachtungen welche Kraft der Körper überhaupt betreffen. Königsberg, 1746), он, пытаясь объяснить причину того, что наше реальное пространство трехмерно, писал: «Трехмерность происходит, по-видимому, оттого, что субстанции в существующем мире действуют друг на друга таким образом, что сила действия обратно пропорциональна квадрату расстояния... из другого закона проистекало бы и протяжение с другими свойствами и измерениями. Наука обо всех этих возможных видах пространства, несомненно, представляла бы собой высшую геометрию, какую способен построить конечный ум... Если возможно, чтобы существовали протяжения с другими измерениями, то весьма вероятно, что бог где-то их действительно разместил»[2]. Говоря о силе, обратно пропорциональной квадрату расстояния, Кант имел в виду силу тяготения, пропорциональность которой величине $1/r^2$, где r — расстояние между притягивающимися массами, он связывал с тем, что убывание этой силы пропорционально площади сферы радиуса r. При этом предположении в случае двумерного мира убывание силы тяготения было бы пропорционально длине окружности радиуса r и эта сила была бы пропорциональна $1/r$.

С другой стороны к этому вопросу подошел Даламбер. В статье «Размерность» (Dimension), помещенной в четвертом томе «Энциклопедии» (1764), он писал: «Один известный мне умный человек считает, что можно было бы рассматривать время как четвертое измерение, так что произведение времени на объем было бы некоторым образом произведением четырех измерений; эта идея, быть может, является спорной, но мне кажется, что она имеет некоторые достоинства, во всяком случае достоинство

---

[1] Первое издание вышло еще под названием «Аналитический трактат о кривых и поверхностях второго порядка» (Traité analytique des courbes et des surfaces du second ordre. Paris, 1802).

[2] *И. Кант.* Сочинения, т. I. 1963, стр. 71.

новизны»[1]. Многомерная аналитическая геометрия, в которой точки определяются n координатами, была основана А. Кели (1843). Другой, векторный подход к геометрии n-мерного пространства, приведший впоследствии к аксиоматическому определению линейного пространства, был предложен Г. Грассманом (1844). Десять лет спустя Б. Риман выдвинул идею многомерного пространства переменной кривизны — так называемого риманова пространства (1854).

Гаспар Монж

Мы уже несколько раз упоминали имя Монжа. Этот выдающийся французский ученый сыграл очень большую роль в развитии не только аналитической, но и особенно дифференциальной геометрии, как и связанных с нею отделов теории уравнений с частными производными, а также начертательной геометрии.

Гаспар Монж родился в 1746 г. в г. Боне (Бургундия) в семье мелкого торговца. Будучи 18-летним юношей, он обратил на себя внимание тем, что начертил великолепный план своего родного города, опубликованный в 1772 г. Воспитанник военно-инженерной школы в Мезьере, он преподавал в ней в 1765—1783 гг., став в 1768 г. профессором математики, а в 1771 г. и физики. С 1780 г. Монж начинает преподавать и в Париже, проводя полгода в Париже, а полгода в Мезьере, и в том же году он избирается в Парижскую академию наук, в 1783 г. он окончательно переезжает в Париж. В Мезьере Монж разработал принципы своей начертательной геометрии и, в частности, «метод Монжа», о котором мы будем говорить ниже (см. стр. 197). В 70-е годы Монж начал свои исследования по приложению анализа к теории поверхностей, к которым мы вскоре обратимся и которые начали появляться в печати с 1776 г. Он успешно занимался также вопросами физики, химии и техники, частью в связи с тем, что в 1777 г. он женился и жена принесла ему в качестве приданого металлургический завод, руководство которым он взял на себя. Революцию 1789 г. Монж встретил восторженно и стал одним из активнейших деятелей республики. В 1792—1793 гг. он был морским министром республики, затем руководил пороховыми и пушечными заводами и вместе с тем разрабатывал теорию фортификации и участвовал в комиссии по введению десятичной системы мер. После падения якобинцев Монж занялся организацией новой системы высшего образования и подготовки научных и инженерных кадров. Он явился одним из основателей Политехнической школы (1794), руководителем которой, если не считать поездок в свите Наполеона в Италию и Египет, состоял 20 лет. Из лекций Монжа в Политехнической и Нормальной школах возникли его классические курсы дифференциальной и соответственно начертательной геометрии. Горячий приверженец и друг Наполеона, он примирился с провозглашением империи и ему были присвоены титул графа и звание сенатора. Во время 100 дней Монж без колебаний вновь примкнул к императору; этого не простили ему Бурбоны и весной 1816 г. он был исключен из Института, т. е. Академии наук, и отстранен от работы в Политехнической школе, ученикам которой было даже

[1] «Encyclopédie ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers», t. 4. Paris, 1764, p. 1010.



Г. Монж
(с портрета Дютертра)

запрещено присутствовать на его похоронах,— он умер летом 1818 г. в состоянии глубокой депрессии.

Для взглядов и деятельности Монжа чрезвычайно характерно его предисловие к «Начертательной геометрии» (1795). Здесь Монж писал: «Чтобы освободить французский народ от иностранной зависимости, в которой он до сих пор находился, надо прежде всего направить народное образование к познанию объектов, требующих точности, что было в полном пренебрежении до нашего времени, и приучить специалистов к пользованию всевозможными инструментами, предназначенными для того, чтобы вносить точность в работу и измерять ее степень... Во-вторых, надо расширить знание многих явлений природы, необходимое для прогресса промышленности... Наконец, надо распространить среди наших специалистов знание способов, применяемых в искусствах, и знание машин, предназначенных для того, чтобы либо сократить ручную работу, либо внести в результаты работы больше однородности и точности; надо сознаться, что в этом отношении мы должны еще много заимствовать у чужих народов. Всем этим требованиям можно удовлетворить, только дав новое направление народному образованию. В частности, народному образованию будет дано полезное направление, если наши молодые специалисты привыкнут применять начертательную геометрию к графическим построениям,

необходимым во многих областях, и пользоваться ею для построения и определения элементов машин, при помощи которых человек, используя силы природы, оставляет за собой только работу разума»[1].

Благодаря Монжу математика заняла центральное место в учебном плане Политехнической школы и многие ее выпускники стали профессиональными математиками. Значительная часть их была слушателями Монжа, увлечение которого преподаваемыми им математическими дисциплинами передавалось его слушателям.

Непосредственными учениками Монжа, продолжившими, иногда в совершенно новых направлениях, его исследования, были такие крупные математики, как Л. Карно, Тенсо, Менье, Лакруа, Ашетт, Ланкре, Фурье, Дюпен, Брианшон, Ампер, Понселе, Шаль и многие другие.

Дифференциальная геометрия на плоскости

После того как первые начала дифференциальной геометрии были заложены Лейбницем, Ньютоном и старшими братьями Бернулли (см. т. II, стр. 274—275), в XVIII в. эта новая отрасль геометрии получила новое широкое развитие.

Ряд работ по дифференциальной геометрии на плоскости был связан с задачей о траекториях семейств кривых, т. е. об определении кривых, пересекающих кривые данного семейства под постоянным углом или под углом, изменяющимся по определенному закону; в первом случае траектории называются изогональными, а в случае, когда угол прямой, мы получаем упоминавшиеся нами ортогональные траектории (см. стр. 169). Задача о разыскании траекторий была поставлена И. Бернулли (1697), который ввел и этот термин (1698) (ср. т. II, стр. 280). Задачу о взаимных траекториях, т. е. о траекториях, относящихся к тому же виду кривых, что и кривые данного семейства, сформулировал Николай II Бернулли (Acta Eruditorum, 1720), указавший, что ею уже занимался его отец, Иоганн; несколько позже И. Бернулли в качестве простейшего примера алгебраических взаимных траекторий привел полукубические параболы $y^3 = ax^2$ (Acta Eruditorum, 1727). Неудивительно, что проблеме взаимных траекторий посвящены были и одни из первых работ Эйлера — одна в «Acta Eruditorum» за 1727 г. и другая в «Записках» Петербургской академии за тот же год (1729). К этой проблеме Эйлер возвращался и позднее (см., например, Acta, (1782 : II) 1786).

Большое число статей посвящено было изучению кривых, заданных теми или иными соотношениями между их радиусом кривизны и другими, связанными с кривой величинами — радиус-вектором, отрезком нормали или касательной, длиной дуги и т. д. Такого рода задачи приводились к интегрированию дифференциальных уравнений и потому их иногда относили к задачам на обратный метод касательных (ср. т. II, стр. 256). Много подобных проблем решили Эйлер и другие петербургские ученые, к работам которых восходит, между прочим, так называемая естественная геометрия плоских кривых, в которой свойства кривых изучаются с помощью уравнений между величинами, непосредственно принадлежащими самим кривым, большей частью, между длиной дуги s, отсчитанной от фиксиро-

[1] *Г. Монж.* Начертательная геометрия. Перевод В. Ф. Газе, под редакцией Д. И. Каргина. М., 1947, стр. 9—12.

ванной точки, и кривизной k. Эйлер применил «естественные координаты» плоской кривой s, k еще в «Разыскании пар кривых, дуги которых, соответствующие одной и той же абсциссе, образуют алгебраическую сумму» (Investigatio binarum curvarum, quarum arcus eidem abscissae respondentes summam algebraicam constituant. Commentarii, (1736) 1741). В одной статье 1781 г., опубликованной посмертно в «Mém. Ac. St.-Pétersb.», 1824, Эйлер рассмотрел кривые, радиусы кривизны которых пропорциональны квадратам радиус-векторов соответствующих точек. Эта задача была обобщена учеником Эйлера Н. И. Фуссом на произвольные степени радиус-векторов в «Nova Acta», (1786) 1789. В другой работе, представленной в 1799 г. и напечатанной в «Mém. Ac. St.-Petersb.», 1809, Фусс решил десять задач, в которых кривая задана уравнениями между радиусом кривизны r, длиной дуги s, радиус-вектором z и т. д., вроде

$$r = z + a, \quad m^2r^2 + n^2s^2 = z^2, \quad m^2r^2 + n^2s^2 = a^2,$$

где a, m, n — данные числа. Аналогичными вопросами занимались в Петербурге Ф. И. Шуберт (Nova Acta, (1791) 1795) и М. Плацман (Acta, (1781 : II) 1785), молодой математик, скончавшийся в возрасте 26 лет (1760—1786). Впрочем, естественная геометрия плоских кривых не была тогда выделена в особую отрасль геометрии. К мысли определять кривые без отнесения к произвольным системам координат, но лишь связанными с ними самими величинами, не раз обращались различные ученые XIX в. Так, У. Юэл (1794—1866), автор известной «Истории индуктивных наук» (History of the Inductive Sciences, 1837—1838), называл «внутренним», intrinsic, уравнением кривой уравнение, связывающее длину дуги s и угол φ касательной в конце дуги с некоторой фиксированной касательной. Другие предлагали исходить из зависимостей между r и s или r и φ. Последовательное построение системы «внутренней геометрии» с координатами s, r дал впервые профессор Неаполитанского университета Э. Чезаро (1896); в немецкой и русской литературе этот термин был заменен на «естественную геометрию».

Отметим в заключение статью еще одного петербургского ученого С. Е. Гурьева, содержавшую сводку всех остальных формул дифференциальной геометрии плоских кривых в полярной системе координат. Эти формулы С. Е. Гурьев единообразно вывел чисто аналитическим путем из соответствующих формул для декартовой прямоугольной системы (Nova Acta, (1794) 1801).

Дифференциальная геометрия пространственных кривых

Мы уже видели (см. стр. 175), что Клеро, реализуя мысль Декарта, сводил изучение кривых двоякой кривизны к изучению их проекций на две взаимно перпендикулярные плоскости. В его «Исследованиях» (1731) впервые появилась в печати формула элемента длины пространственной кривой в виде $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ и рассмотрены некоторые задачи на определение касательных и нормалей. Но, положив одним из первых начало применению дифференциальных, а также интегральных методов к изучению кривых двоякой кривизны, Клеро ограничился задачами, которые представляют простой перенос на пространство отдельных задач дифференциальной геометрии на плоскости и требуют лишь замены двух переменных тремя.

Еще до выхода «Исследований» Клеро ряд важных понятий дифференциальной геометрии пространственных кривых был введен в связи с изучением геодезических линий, т. е. кратчайших кривых данной поверхности между какими-либо двумя ее точками (на плоскости геодезическими линиями являются прямые, на сфере — большие круги) [1]. Именно при изучении поставленной им в 1697 г. проблемы геодезических линий И. Бернулли в письме к Лейбницу от 26 августа 1698 г. ввел понятие соприкасающейся плоскости пространственной кривой по аналогии с соприкасающимся кругом плоской кривой: соприкасающаяся плоскость определялась как плоскость, проходящая через три соседние точки кривой; эта плоскость перпендикулярна к касательной плоскости к поверхности, проходящей через какую-либо из этих трех точек. Неизвестно, как вывел И. Бернулли это свойство соприкасающейся плоскости; неизвестно, как он вывел и в каком виде он записал упомянутое им в переписке с Лопиталем и Лейбницем общее уравнение геодезических. Как уже говорилось (см. стр. 174), вскоре после того, как И. Бернулли поставил перед Эйлером задачу о геодезических, молодой петербургский математик вывел их дифференциальное уравнение, которое сообщил своему бывшему учителю 18 февраля (1 марта) 1729 г. и опубликовал в «Записках» Петербургской Академии наук за (1728) 1732 г. Уравнение Эйлера имело вид

$$\frac{Qd\,dx + Pd\,dy}{Qdx + Pdy} = \frac{dx\,ddx + dy\,ddy}{dt^2 + dx^2 + dy^2},$$

где P и Q определяются из дифференциального уравнения поверхности $Pdx = Qdy + Rdt$; напомним, что буква t означала у Эйлера одну из пространственных координат. Отвечая Эйлеру 18 апреля 1729 г., И. Бернулли привел свое уравнение

$$\frac{Td\,dy}{Tdz\,ds - zds^2} = \frac{ddz}{ds^2 + dz^2},$$

где T — подкасательная некоторой кривой на поверхности и $ds^2 = dx^2 + dy^2$ (опубл. 1742). Ясно, что оба они владели формулой дифференциала дуги пространственной кривой, легко найденной и Клеро (см. стр. 187). К выводу общего уравнения Эйлер добавил подробное рассмотрение геодезических на цилиндрических и конических поверхностях и на поверхностях вращения (этот случай ранее в 1698 г. исследовал другими средствами Я. Бернулли, упомянув, что при развертывании первых двух на плоскость их геодезические переходят в прямые). Впоследствии Эйлер неоднократно возвращался к проблеме геодезических. Во втором томе «Механики» (1736) он доказал, что точка, движущаяся по поверхности «при отсутствии сил», описывает геодезическую,— предложение, которым пользовался ранее Бернулли; при этом Эйлер показал, что главная нормаль геодезической кривой в каждой ее точке совпадает с нормалью к поверхности. Занятия Эйлера проблемой геодезических тесно переплетались с разработкой им вариационного исчисления (см. десятую главу).

Геодезические линии исследовал и Клеро. Он доказал, что для точек геодезической линии на поверхности вращения произведение радиуса

[1] Термин «геодезическая линия» появился впервые в «Небесной механике» (Mécanique céleste, t. II, 1799) П. С. Лапласа применительно к земному сфероиду, чем и объясняется этот термин. Впоследствии это название было распространено на кратчайшие линии всех поверхностей второго порядка, а Ж. Лиувилль (1844) распространил его на любые поверхности.

параллели на синус угла, составляемого геодезической с меридианом, постоянно (Mém. Ac. Paris, (1733) 1735). С помощью разложений в ряды он нашел геодезические линии сфероида, по форме близкого к сфере (Mém. Ac. Paris, (1739) 1740).

Важнейшей из работ Эйлера по геометрии пространственных кривых является «Легкий способ исследовать все свойства кривых линий, не расположенных в одной плоскости» (Methodus facilis omnia symptomata linearum curvarum non in eodem plano sitarum investigandi. Acta, (1782 : I) 1786). В качестве независимой переменной Эйлер выбирает длину дуги s, полагая

$$dx = pds, \ dy = qds, \ dz = rds;$$

параметрическим представлением кривой он пользуется систематически. Далее он описывает вокруг точки кривой единичную сферу, ставит в соответствие прямым, проходящим через точку кривой, точки их пересечения со сферой и применяет формулы сферической тригонометрии. Таким образом, Эйлер ввел в употребление сферическое отображение, как это вновь сделал почти полвека спустя Гаусс (1827). Для тех, кого не удовлетворяет этот подход, следующий астрономической традиции, Эйлер приводит «другое рассуждение», основанное на свойствах соприкасающейся плоскости. Эйлер показывает, что диагональ параллелепипеда со сторонами p, q, r направлена по касательной к кривой и имеет единичную длину, диагональ параллелепипеда со сторонами dp/ds, dq/ds, dr/ds имеет направление радиуса кривизны, ее длина равна обратному значению радиуса кривизны, а диагональ параллелепипеда со сторонами $(rdq - qdr)/ds$ и т. д. имеет ту же длину, но направлена перпендикулярно соприкасающейся плоскости. С современной точки зрения, первая диагональ — единичный вектор касательной $\mathbf{t}$, вторая — вектор кривизны, равный произведению единичного вектора главной нормали $\mathbf{n}$ на кривизну кривой, а третья диагональ — произведение единичного вектора бинормали $\mathbf{b}$ на ту же кривизну. Тем самым по существу Эйлер ввел соприкасающийся трехгранник кривой и доказал первую формулу Ж. Френе (1847).

Дифференциальная геометрия поверхностей

Основополагающее значение имели работы Эйлера и в теории поверхностей, из которых прежде всего отметим «Исследования о кривизне поверхностей» (Recherches sur la courbure des surfaces, Mém. Ac. Berlin, (1760) 1767). Называя «главным сечением» поверхности $z = f(x, y)$ нормальное сечение, перпендикулярное к плоскости xOy, и изменяя угол между плоскостью произвольного нормального сечения и плоскостью главного сечения, Эйлер нашел, что в каждой точке поверхности имеются нормальные сечения с максимальным радиусом кривизны f и с минимальным g, плоскости которых взаимно перпендикулярны. Далее, обозначая через φ угол между плоскостью произвольного нормального сечения и плоскостью нормального сечения с максимальным радиусом кривизны, Эйлер показал, что радиус кривизны r произвольного нормального сечения выражается через f и g по формуле

$$r = \frac{2fg}{f + g - (f - g)\cos 2\varphi},$$

которую Ш. Дюпен (1813) преобразовал к более удобному виду

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{f} \cos^2 \varphi + \frac{1}{g} \sin^2 \varphi.$$

Следующий существенный шаг вперед Эйлер сделал в мемуаре «О телах, поверхность которых можно развернуть на плоскость» (De solidis quorum superficiem in planum explicare licet. Novi Commentarii, (1771) 1772). Здесь введено понятие развертывающейся поверхности, т. е. поверхности, которая может быть наложена на плоскость без складок и разрывов. К таким поверхностям относятся цилиндры и конусы. Развертыванием поверхностей на плоскость занимались с чисто практической точки зрения в работах по теории архитектуры и скульптуры, например, в книге военного инженера Амедея Франсуа Фрезье (1682—1773) «Теория и практика резки камней и дерева или трактат по стереотомии» (La théorie et la pratique de la coupe des pierres et des bois ou traité de stéréotomie, t. 1. Strassbourg, 1737), однако общее понятие развертывающейся поверхности было дано Эйлером. Эйлер исходил из того, что бесконечно малый треугольник на такой поверхности должен быть конгруэнтен соответствующему треугольнику в плоскости, на которую она развертывается, он вводит на поверхности криволинейные координаты t, u, равные прямоугольным координатам соответствующих точек плоскости, и, обозначая частные производные координат x, y, z по t через l, m, n, а частные производные тех же координат по u через λ, μ, ν, записывает условия развертываемости поверхности в виде:

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1, \quad \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1, \quad l\lambda + m\mu + n\nu = 0$$

(с современной точки зрения, это — условия единичности и ортогональности векторов, координаты которых равны частным производным радиус вектора точки поверхности по координатам t, u). Начало систематическо му применению криволинейных координат на поверхности положил много позднее Гаусс (1827). Наряду с приемом параметрического представления поверхностей основное место в мемуаре Эйлера занимает введение линейного элемента поверхности как средства исследования тех свойств поверхности, которые впоследствии были названы внутренними и которые могут быть исследованы с помощью измерений на ней самой, без обращения к пространству, ее содержащему. И эта идея получила дальнейшее глубокое развитие лишь начиная с Гаусса (1827). Линейный элемент ds развертывающейся поверхности, т. е. дифференциал дуги линии на ней, таков, что $ds^2 = dt^2 + du^2$, и условие Эйлера может быть сформулировано как условие совпадения линейного элемента развертывающейся поверхности с линейным элементом плоскости. Окончательный результат состоит в том, что касательные к любой пространственной кривой образуют развертывающуюся поверхность и всякая развертывающаяся поверхность является либо цилиндром, либо конусом, либо поверхностью касательных.

В то время как печатался данный мемуар, Эйлер продвинулся в области внутренней геометрии поверхностей еще далее и в одной заметке, увидевший свет лишь в первом томе его «Opera postuma», изданных в Петербурге в 1862 г., установил общее условие наложимости (изгибания) одной поверхности на другие. В более современной форме те же и более глубокие результаты были — совершенно независимо — получены опять

таки Гауссом (1827). Впоследствии проблеме изгибания и изометрии были посвящены многочисленные исследования крупнейших геометров [1].

В уже упоминавшейся статье «Об изображении поверхности шара на плоскости» ((1777) 1778) Эйлер, сравнивая линейный элемент сферы с линейным элементом плоскости, доказал невозможность изометрического отображения сферы на плоскость и поставил вопрос о трех видах отображения сферы на плоскость, наиболее важных для картографии: отображении, при котором меридианы и параллели изображаются ортогональной системой прямых, конформном отображении, сохраняющем углы между линиями, и эквиареальном отображении, сохраняющем площадь сферических областей.

Эйлер исследовал также некоторые новые специальные классы поверхностей, например, поверхности, получающиеся, когда центр данной окружности движется по данной плоской кривой, причем плоскость круга остается нормальной к кривой. Эйлер назвал такие поверхности, дифференциальное уравнение которых есть

$$z\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=a,$$

«изогнутыми цилиндрами», в настоящее время их именуют трубчатыми поверхностями. Заменив окружность какой-либо другой плоской кривой, причем в дифференциальном уравнении вместо постоянной a появляется некоторая функция $Z(z)$, Эйлер пришел к так называемым теперь резным поверхностям.

К понятию развертывающейся поверхности независимо от Эйлера пришел Г. Монж в «Мемуаре о развертках, радиусах кривизны и различных родах перегибов кривых двоякой кривизны» (Mémoire sur les developpées, les rayons de courbure et les différents genres d'inflexion des courbes à double courbure, Mém. div. sav., 1785, представлено в 1771). Нам уже пришлось говорить о значении этой превосходной работы в развитии аналитической геометрии в пространстве (см. стр. 181). Изложение главной, дифференциально-геометрической части этого труда основано на характерных для Монжа наглядных инфинитезимально-геометрических рассуждениях. Здесь появляется важное понятие линии полюсов (теперь говорят: оси кривизны) элемента дуги, определяемом тремя бесконечно близкими точками кривой — оси соприкасающегося круга кривой, являющейся линией пересечения нормальных плоскостей в двух бесконечно близких точках кривой. Монж показал, что линии полюсов данной кривой образуют развертывающуюся поверхность, называемую поверхностью полюсов. Центры кривизны кривой, т. е. центры соприкасающихся кругов, лежат на поверхности полюсов и образуют на ней линию, которая при развертывании этой поверхности на плоскость переходит в прямую, т. е. является геодезической линией поверхности полюсов. Монж вывел и дифференциальное уравнение геодезических линий, тождественное, как он сам указал, с уравнением И. Бернулли. Монж нашел также уравнения ребра

[1] При изометрическом отображении одной поверхности на другую сохраняются длины всех соответствующих линий. Изгибающиеся друг на друга поверхности обязательно изометричны, но изометричные поверхности могут быть и не наложимы друг на друга (например, левая перчатка не надевается на правую руку). Важность изометрии — в том, что все изометричные друг другу поверхности имеют одну и ту же внутреннюю геометрию.

возврата поверхности полюсов, т. е. той кривой, касательные к которой образуют эту поверхность (ср. стр. 190). Он рассмотрел и другую развертывающуюся поверхность, связанную с кривой,— поверхность, огибающую плоскости, проходящие через касательные к кривой и перпендикулярные к ее соприкасающимся плоскостям. Такая поверхность обладает тем свойством, что данная кривая является геодезической линией на ней и, следовательно, переходит в прямую при ее развертывании на плоскость. Так как длина дуги кривой равна длине соответствующего отрезка этой прямой, с помощью этого развертывания можно производить спрямление кривой, вследствие чего эти поверхности получили впоследствии название «спрямляющих».

Что касается точек перегиба, фигурирующих в заглавии статьи, то Монж разделил их на два рода: точки простого перегиба, возникающие, когда три последовательных элемента кривой лежат в одной плоскости (мы бы сказали: кручение равно нулю), и точки двойного перегиба, для которых два последовательных элемента лежат на одной прямой (кривизна равна нулю). Несколько ранее, в 1780 г., такая же по существу классификация была опубликована в уже встретившейся нам статье Тенсо (см. стр. 180).

В другой работе, сданной в печать позже первой (1775), но опубликованной раньше, «О свойствах многих родов кривых поверхностей, в особенности развертывающихся поверхностей, с приложением к теории теней и полутеней» (Sur les propriétés de plusieurs genres de surfaces courbes, particulièrement sur celles des surfaces développables, avec une application à la théorie des ombres et des pénombres. Mém. div. savants, 1780) Монж продолжал исследования развертывающихся поверхностей. Здесь Монж провел разграничение между развертывающимися и неразвертывающимися линейчатыми поверхностями, т. е. произвольными поверхностями, образованными движением прямой; последние поверхности Монж назвал «косыми» (gauches). Дифференциальное уравнение развертывающихся поверхностей, выведенное Монжем,

$$\delta\delta z \cdot ddz = (\delta dz)^2,$$

где δ и d — символы дифференцирования по x и y, в современных обозначениях можно записать

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2 = 0.$$

Дифференциальное уравнение произвольных линейчатых поверхностей он получил в виде

$$2\delta\left(\frac{-\delta\,dz + \sqrt{\omega}}{ddz}\right) + d\left(\frac{-\delta\,dz + \sqrt{\omega}}{d\,dz}\right)^2 = 0,$$

где $\omega = (\delta dz)^2 - \delta\delta z \cdot ddz$. Монж нашел также уравнение линейчатой поверхности, проходящей через три данные пространственные кривые; в случае, когда эти кривые являются попарно скрещивающимися прямыми, поверхность является однополостным гиперболоидом или гиперболическим параболоидом. Теорию развертывающихся поверхностей Монж применил к нахождению теней и полутеней тел, освещенных другим телом. Для этого определяется развертывающаяся поверхность, охватывающая две данные поверхности; тогда кривая, по которой эта развертывающаяся

поверхность пересекается с третьей поверхностью, ограничивает на ней тень темного тела при его освещении светящимся телом: две данные поверхности служат границами этих двух тел. В этой же работе Монж вывел уравнение касательной поверхности к поверхности $z = f(x, y)$ в виде

$$z = p'(x - x') + q'(y - y') + K',$$

где p', q' — частные производные функции z в точке касания. Одновременно это уравнение в несколько иной записи было приведено в статье Тенсо, напечатанной в том же томе «Mém. div. savants», 1780, что и данная работа Монжа (см. стр. 180). В «Мемуаре о теории выемок и насыпей» (Mémoire sur la théorie des déblais et remblais. Mém. Ac. Paris, (1781) 1784), отправляясь от задачи, в которой требуется определить наиболее экономически выгодные траектории частиц земли при их перемещении из выемки в насыпь,— задачи, возникшей в работах Монжа по фортификации,— Монж показал, что эти траектории являются нормалями к некоторой поверхности. Здесь впервые появилось понятие конгруэнции прямых — семейства прямых, зависящих от двух параметров. Монж показал, что через каждую прямую конгруэнции проходят две развертывающиеся поверхности, состоящие из прямых конгруэнции, которые в данном случае пересекаются под прямым углом. Линии на поверхности, нормали вдоль которых образуют развертывающиеся поверхности,— одни из важнейших линий на поверхности, называемые линиями кривизны поверхности.

Систематическое изложение теории поверхностей мы находим в прочитанном Монжем в Политехнической школе курсе, первоначально напечатанном в форме отдельных выпусков под названием «Листы анализа, приложенного к геометрии» (Feuilles d'analyse appliquée à la géométrie. Paris, год III, 1795; Изд. 2, год IX, 1801), и в являющемся их обработкой «Приложении анализа к геометрии» (Application d'analyse à la géométrie. Paris, 1807). Здесь излагалось и много новых открытий Монжа. В основу изложения было положено понятие семейства поверхностей, определяемого дифференциальным уравнением в частных производных

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \qquad (1)$$

или

$$\Phi(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0, \qquad (2)$$

где

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Мы уже встречались с уравнениями Монжа линейчатых и развертывающихся поверхностей.

Большое значение имело введение понятия характеристики как линии пересечения двух бесконечно близких поверхностей семейства; ребро возврата (см. стр. 192) является огибающей характеристик, находящихся на одной поверхности. Монж нашел дифференциальное уравнение характеристик в случае уравнения (1) в виде

$$P dy - Q dx = 0,$$

где $P = \partial F/\partial p$, $Q = \partial F/\partial q$, а в случае уравнения (2) — в виде

$$R\, dx^2 - S dx\, dy + T dy^2 = 0,$$

где $R = \partial\Phi/\partial r$, $S = \partial\Phi/\partial s$, $T = \partial\Phi/\partial t$. Найдя характеристики в некоторых случаях, Монж интегрирует эти уравнения и получает конечные уравнения семейств, содержащих произвольные функции,— например, уравнения цилиндрических и конических поверхностей и поверхностей вращения, имеющие соответственно вид:

$$\alpha x + \beta y = \varphi(ax - by), \qquad z - c = (x - a)\,\varphi\left(\frac{y-b}{x-a}\right), \; z = \varphi(x^2 + y^2),$$

и уравнение произвольных линейчатых поверхностей в параметрическом виде:

$$y - \alpha x = \psi(\alpha), \quad z - x\varphi(\alpha) = \pi(\alpha).$$

Весьма детально исследуются также введенные Монжем линии кривизны поверхностей; в каждой точке поверхности находятся радиусы кривизны линий кривизны, проходящих через эту точку, правда, без упоминания, что эти так называемые главные радиусы кривизны совпадают с радиусами кривизны f и g, о которых писал Эйлер (см. стр. 189). Монж нашел геометрическое место центров кривизны линий кривизны в виде двух поверхностей, исследовал эти поверхности и выделил те их точки, в которых главные радиусы кривизны совпадают,— эти точки в настоящее время называются омбилическими. Найдя уравнение кривой на поверхности, состоящей из таких точек, Монж, однако, не заметил, что эта кривая всегда мнима, за исключением отдельных точек. В случае эллипсоида, впрочем, он нашел, что таких точек всего восемь, и, советуя придать сводам залов Законодательного собрания форму эллипсоида, предложил, чтобы балки свода следовали линиям кривизны, а люстры были подвешены в омбилических точках.

Из учеников Монжа следует назвать прежде всего военного инженера и члена Академии наук Жана Батиста Менье (1754—1793), погибшего в расцвете сил при защите Майнца от осадивших город войск пруссаков. В представленном им в 1776 г. «Мемуаре о кривизне поверхностей» (Mémoire sur la courbure de surfaces. Mém. div. savants, 1785) Менье предложил исследования, изложенные в посвященной тому же вопросу работе Эйлера (см. стр. 189). Исходя из того, что кривизна поверхности определяется частными дифференциалами до второго порядка включительно, он заменил поверхность в окрестности исследуемой точки эллиптическим параболоидом с вершиной в этой точке и осью, лежащей на нормали к поверхности в ней и с тою же кривизной, что рассматриваемый элемент поверхности. Установив, что любой элемент поверхности — это выражение появилось у Менье впервые — можно рассматривать как образованный вращением некоторой дуги окружности вокруг оси, параллельной касательной плоскости элемента, он получил еще одно геометрическое истолкование найденных Эйлером экстремальных радиусов кривизны нормальных сечений. Вместе с тем он доказал важную теорему, носящую его имя: если R — радиус кривизны произвольного плоского сечения поверхности, R' — радиус кривизны нормального сечения с той же касательной и ω — угол между плоскостями обоих сечений. то $R = R' \sin \omega$.

Здесь же Менье рассмотрел задачу об определении поверхности минимальной площади, ограниченной данным контуром. Он нашел, что для таких поверхностей, называемых в настоящее время минимальными поверхностями, сумма главных радиусов кривизны равна нулю, и таким

образом получил дифференциальное уравнение этих поверхностей

$$r(1+q^2)+t(1+p^2)-2pqs=0,$$

найденное раньше методами вариационного исчисления Лагранжем (Misc. Taur., (1760—1761) 1762). Интегрируя это уравнение в частных случаях, Менье нашел в качестве примеров таких поверхностей линейчатый геликоид — поверхность, образованную прямой, перпендикулярной к оси винтового движения, при этом движении,— и катеноид — поверхность, образованную вращением цепной линии вокруг ее оси симметрии. Минимальные поверхности изучал и Монж, который в «Приложениях анализа к геометрии» вывел общее их уравнение в конечной форме, содержащей мнимость, не приводя каких-либо примеров (он упоминает в начале соответствующей главы работу Лагранжа, но не Менье).

Работы по дифференциальной геометрии других учеников Монжа — упоминавшегося ранее (см. стр. 190) Ш. Дюпена (1784—1873), М. А. Ланкре (1774—1807), Софи Жермен (1776—1831) и других — приходятся уже на XIX в., и мы их рассматривать не можем. Следует добавить, что, несмотря на появление целого ряда превосходных работ о кривизне поверхности, в этом вопросе сохранялись неясности и многое предстояло развить в новых направлениях. Даже Эйлер (Dioptrica, I, Petropoli 1769) и Даламбер (статья «Кривая» (Courbe) в «Энциклопедии») допустили ошибку, полагая, что любой элемент поверхности можно приближенно считать сферическим,— ранее такую же ошибку совершил Лейбниц в письме к И. Бернулли от 29 июля 1698 г. Глубокие и прочные основы современной теории кривизны заложил Гаусс в своем классическом труде о кривых поверхностях (1827), где он ввел понятие полной (так называемой гауссовой) кривизны, равной произведению главных кривизн, играющее фундаментальную роль в теории изометрии, и изгибания поверхностей.

Дифференциальной геометрии линий и поверхностей в трехмерном пространстве были затем посвящены многие работы математиков XIX в. Исследования Гаусса по внутренней геометрии поверхности были гениально обобщены в 1854 г. Б. Риманом на многомерные пространства, линейный элемент которых имеет вид

$$ds^2=\sum_i\sum_j a_{ij}(x)\,dx^i dy^j,$$

где dx^i — дифференциалы координат x^i точки x. Частными случаями римановых пространств, характеризующимися постоянной кривизной и максимальной подвижностью, являются гиперболическое неевклидово пространство Лобачевского и эллиптическое неевклидово пространство Римана. К работам, подготовлявшим в XVIII в. открытие неевклидовых пространств, мы обратимся в конце этой главы.

Начертательная геометрия

Основы начертательной геометрии, т. е. учения об изображении пространственных фигур на плоскости, были заложены в XV—XVI вв. работами по теории перспективы Л. Б. Альберти, П. деи Франчески, Леонардо да Винчи и Альбрехта Дюрера (см. т. I, стр. 321—325). Мы уже упоминали об относящихся к теории перспективы работах ученых XVII в.

С. Стевина, Ж. Дезарга и Ф. Лагира (см. т. II, стр. 121 и 126), а также, что центральное проектирование применял Ньютон (см. т. II. стр. 116).

Традиции Стевина и Лагира были продолжены в начале XVIII в. голландцем Виллемом Якобом с'Гравесанде [1] (1688—1742) в «Опыте о перспективе» (Essai de perspective. La Haye, 1711). С'Гравесанде пользовался проекцией бесконечно удаленной прямой предметной плоскости — так называемой линией схода, являющейся геометрическим местом точек пересечения проекций параллельных прямых, лежащих в предметной плоскости, а также сокращенным масштабом на этих прямых. Немного спустя Брук Тейлор выпустил «Линейную перспективу» (Linear perspective. London, 1715) и ее переработанный вариант «Новые принципы линейной перспективы» (New principles of linear perspective. London, 1719). Сочинения голландского и английского авторов удачно дополняли друг друга. Французский астроном Никола Луи де Лакайль (1713—1762) в «Начальных уроках по оптике» (Leçons élémentaire d'optique. Paris, 1750) пользовался аналитическими формулами де Гюа для центрально-перспективного соответствия двух плоскостей (1740; см. стр. 159) и, в частности, нашел уравнение гиперболы, являющейся перспективой окружности. Согласно Лакайлю, координаты x, y, z точки пространства связаны с координатами x', y' ее проекции на картинную плоскость соотношениями:

$$x' = \frac{xd}{d+y}, \qquad y' = \frac{zd}{d+y},$$

где d — расстояние от центра проекции до картинной плоскости. На линии горизонта Лакайль отмечал точки, через которые проходят изображения горизонтальных прямых, образующих с основанием картины углы 10°, 20° и т. д.

Важную роль сыграла книга И. Г. Ламберта «Свободная перспектива или наставление, как составлять всякую перспективную вертикальную проекцию свободных отрезков, не пользуясь при этом горизонтальной проекцией» (Die freye Perspective oder Anweisung, jeden perspectivischen Aufriss von freyen Stücken und ohne Grundriss zu verfertigen. Zürich, 1759). Ламберт распространил теорию Лакайля и, в частности, отметки углов на случай, когда картинная плоскость не перпендикулярна к предметной, и на случай прямых, расположенных к предметной плоскости под некоторым углом. В разделе «О перспективном проектировании из бесконечно удаленной точки зрения» Ламберт перенес теорию перспективы на случай параллельного проектирования. Второе издание «Свободной перспективы» (1774) было дополнено разделом о геометрических построениях с помощью одной линейки и, в случае необходимости, неподвижного круга. Такие построения представляют собой частный случай построений линейкой и циркулем постоянного раствора, иногда применявшихся ал-Фараби, Абу-л-Вафой и Леонардо да Винчи (см. I, стр. 230 и 323).

Напротив, датский математик Георг Мор (Морендаль, 1640—1697) в «Датском Евклиде» (Euclides Danicus. Amsterdam, 1672) пользовался построениями одним циркулем. Общая теория таких построений была разработана профессором в Павии Лоренцо Маскерони (1750—1800). В «Геометрии циркуля» (Le geometria del compasso. Pavia, 1797) Маскерони доказал, что всякая задача на построение конечного числа точек, разрешаемая с помощью циркуля и линейки, разрешима и с помощью только цир-

[1] Правильное произношение этой фамилии: Схавесанде.

куля. Свою книгу Маскерони предназначал для механиков-практиков, так как считал построения одним циркулем более точными, чем построения циркулем и линейкой. Свой труд Маскерони посвятил Наполеону, который, высоко ценя его оригинальные и изящные конструкции, распорядился немедленно перевести книгу на французский язык (Париж, 1798), а самого автора пригласил для работы в комиссии новых мер и весов в Париж, где Маскерони и умер. В другом сочинении «Задачи для землемеров» (Problemi per gli agrimensori, Pavia, 1793) Маскерони, подобно Ламберту, решил многие задачи на построение с помощью только линейки. Понселе в 1822 г. доказал, что все построения, осуществимые посредством циркуля, можно произвести с помощью линейки и заданного круга с центром.

Современный вид начертательная геометрия приобрела благодаря Г. Монжу, лекции которого по этому предмету, читанные в Нормальной школе в 1795 г., изданы были сперва в отдельных выпусках «Séances des Écoles Normales», тт. I—III, год III, т. е. 1795, и четыре года спустя без существенных изменений в виде отдельной книги «Начертательная геометрия» (Géométrie descriptive. Paris, год VII, т. е. 1799).

Основная часть «Начертательной геометрии» Монжа посвящена изложению «метода Монжа», представляющего собой развитие метода изучения пространственных линий путем изучения их ортогональных проекций на две перпендикулярные плоскости; особенность «метода Монжа» состоит в том, что, спроектировав пространственную фигуру на вертикальную и горизонтальную плоскости, он совмещал их в одной плоскости. В результате каждая точка пространства изображается на чертеже Монжа парой точек, расположенных на одной вертикали, каждая прямая изображается парой прямых, на которых отмечены «следы» — точки пересечения изображаемых прямых с плоскостями проекции; плоскости задаются парами лежащих в них прямых, чаще всего «следами» — их пересечениями с плоскостями проекций. Аналогичное проектирование на несколько перпендикулярных плоскостей применял, как мы видели, Дюрер (см. т. I, стр. 325). В своей книге Монж решил все основные задачи на построение точек, прямых и плоскостей, а также на построение пространственных кривых и поверхностей, изучавшихся им методами дифференциальной геометрии. Метод Монжа, вследствие своего удобства, является основным в техническом черчении до настоящего времени. В книге Монжа излагалась также теория перспективы и был доказан ряд теорем проективной геометрии (см. стр. 198).

Проективная геометрия

В отличие от XVII в., когда проективная геометрия развивалась только в синтетическом плане, в XVIII в. в ней появляются и аналитические методы. Мы уже упоминали аналитические формулы для центрально-перспективного соответствия двух плоскостей, применявшиеся Гюа де Мальвом и Лакайлем. Если цепь центральных проектирований одной плоскости на другую приведет к первоначальной плоскости, на этой плоскости произойдет проективное преобразование общего вида — наиболее общее взаимно однозначное преобразование проективной плоскости (т. е. плоскости, дополненной бесконечно удаленной прямой), переводящее прямые в прямые, вследствие чего такое преобразование называют также коллинеацией. Общее аналитическое выражение коллинеации встречается впервые в «Аналитических этюдах» Варинга (1762; см. стр. 173). Аффинные преобра-



Л. Карно
(с портрета Буайи, 1813)

зования, рассматривавшиеся Клеро и Эйлером (см. стр. 162 и 167), представляют собой частные случаи этих преобразований, когда бесконечно удаленная прямая переходит в себя. Аналитическое выражение наиболее общего аффинного преобразования получается из формул Варинга, если положить в них $A = B = 0$.

В конце XVIII в. в связи с появлением «Начертательной геометрии» Монжа возродился интерес и к синтетическим исследованиям. Из предложений проективной геометрии, доказанных в этой книге, упомянем теорему о том, что касательные, проведенные из точки к поверхности второго порядка, касаются этой поверхности в точках плоской кривой; плоскость этой кривой есть полярная плоскость данной точки — полюса этой плоскости.

В самом конце XVIII в. проблемами синтетической геометрии заинтересовался другой выдающийся ученый и деятель Французской революции Лазарь Карно (1753—1823). Воспитанник школы в Мезьере и ученик Монжа, Карно впервые выступил в печати с «Опытом о машинах вообще» (Essai sur les machines en général. Dijon, 1783). Вслед затем он представил на конкурс Берлинской академии наук 1786 г. сочинение по вопросу о математической бесконечности — первый вариант его знаменитых «Размышлений о метафизике исчисления бесконечно малых» (1797), о которых

мы будем говорить ниже (см. стр. 278). В годы военно-инженерной службы в г. Аррасе Карно сблизился с М. Робеспьером и бок о бок с ним участвовал в бурных событиях Французской революции сперва в качестве члена Национального собрания, а затем Конвента и Комитета общественного спасения. За исключительные заслуги в борьбе с интервентами в 1793 г. Карно был прозван «Организатором победы». Термидорианская реакция пощадила Карно, который некоторое время продолжал играть видную политическую роль в качестве члена Директории, а затем, после двух лет изгнания, в качестве министра при Бонапарте. Открытое выступление против провозглашения империи повлекло за собой полное устранение Карно с политической сцены; только в течение Ста дней он примкнул к вернувшемуся императору для защиты Франции от новой интервенции и Бурбонов. Людовик XVIII отправил в изгнание старого республиканца, в 1791 г. голосовавшего за казнь Людовика XVI, а в 1815 г. приложившего все усилия, чтобы воспрепятствовать вторичной реставрации, и Карно умер на чужбине, в Магдебурге. Политические события отражались и на официальном положении Карно в ученом мире. Избранный в 1796 г. членом Института Франции, в организации которого на месте прежней Академии наук он деятельно участвовал, Карно был исключен из него в 1797 г., когда в результате переворота 18 фрюктидора ему пришлось бежать в Швейцарию. Любопытно, что место Карно было отдано Наполеону Бонапарту. В 1800 г. Карно был вновь избран членом Института и вторично — на этот раз окончательно — исключен по распоряжению короля. Упомянем, что сын Л. Карно Сади Карно прославился в области термодинамики.

В начале XIX в. Карно опубликовал несколько работ, сыгравших важную роль в истории проективной геометрии: «О корреляции фигур в геометрии» (De la corrélation des figures en géométrie. Paris, 1801), «Геометрия положения» (Géométrie de position. Paris, 1803) и «Опыт о трансверсалях» (Essai sur les transversales. Paris, 1806).

Под «корреляцией» (corrélation, буквально «соотношение») Карно понимает соответствие между двумя положениями фигуры, одно из которых получено из другого с помощью непрерывного преобразования; сам Карно говорил о преобразовании «нечувствительными ступенями», par degrés insensibles,— это выражение было общеупотребительным в ту эпоху. Карно находит числовые величины, характеризующие «коррелятивную систему», предельным переходом из величин, характеризующих исходную систему. Тот факт, что при «корреляции» рассматриваемые соотношения не изменяются и числовые величины переходят в их предельные значения, Карно называет «принципом корреляции», который играет у него роль принципа непрерывности. Карно различает «прямую корреляцию», когда величины, характеризующие систему, не меняют знака, «косвенную корреляцию», когда некоторые из этих величин обращаются в нуль или меняют знак, и «комплексную корреляцию», при которой некоторые из этих величин становятся чисто мнимыми. Примером последнего типа является «корреляция» между окружностью $x^2 + y^2 = a^2$ и равносторонней гиперболой $x^2 - y^2 = a^2$ и между эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ и гиперболой $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. «Комплексная корреляция» позволяет находить свойства гипербол по свойствам окружности или «эллипса». «Принцип корреляции» применялся Карно и в двух последних работах.

Название «Геометрия положения» является переводом лейбницевского термина geometria situs (см. т. II, стр. 127), который Карно понимал как учение о проективных свойствах фигур. Этот же термин в немецком переводе — Geometrie der Lage — позднее применялся для обозначения проективной геометрии Христианом фон Штаудтом и др.

Выше мы упоминали, что Карно был в некотором смысле противником «изолированных отрицательных чисел» (см. стр. 55), однако он широко пользовался относительными числами для характеристики «косвенных корреляций» и противоположных направлений. Карно вводит ориентированную длину отрезков, с помощью которой впервые исчерпывающим образом излагается определение знака синуса и косинуса во всех четырех

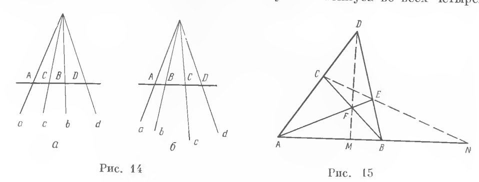


Рис. 14

Рис. 15

квадрантах. Понятие ориентированной длины $\overline{AB}$ отрезка AB позволило Карно определить в «Геометрии положения» важный проективный инвариант четырех точек, лежащих на одной прямой,— двойное отношение $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}$ этих точек со знаком, зависящим от того, разделяют ли (рис. 14, *а*) или не разделяют друг друга (рис. 14, *б*) две пары точек, составляющие четверку. Карно доказывает равенство двойных отношений четверок точек, в которых различные секущие — «трансверсали» пересекают четыре прямые, что и определяет проективную инвариантность этого выражения. В том случае, когда двойное отношение четырех точек равно — 1, говорят, что одна пара точек гармонически разделяет другую или что четверка точек — гармоническая, поэтому двойное отношение четырех точек, не составляющих гармоническую четверку, называют также ангармоническим отношением.

В «Опыте о трансверсалях» Карно доказывает целый ряд теорем о секущих, многие из которых принадлежат проективной геометрии. Важнейшей является теорема о полном четырехстороннике, т. е. о четырехстороннике с продолженными сторонами: две диагонали полного четырехсторонника пересекают его третью диагональ в двух точках, гармонически разделяющих вершины четырехсторонника, соединяемые этой диагональю. На рис. 15 изображен полный четырехсторонник $ABCDEF$ с диагоналями AB, CE и DF и определяемая им гармоническая четверка $ABMN$. Аналогичные теоремы для абсолютных величин двойных отношений были известны еще Паппу (см. т. I, стр. 151), однако для Паппа двойное отношение не имело знака. Сам Карно отправлялся от теоремы Менелая (см. т. I, стр. 142).

Работы Карно, возродившие классические результаты Паппа в условиях математики начала XIX в., привели к дальнейшей разработке проективной геометрии другим военным инженером и учеником Монжа Жаном Виктором Понселе (1788—1867). Понселе, участник похода Наполеона в Россию, сформулировал свои идеи о проективной геометрии в плену в Саратове. Вернувшись во Францию, он опубликовал их в «Трактате о проективных свойствах фигур» (Traité des propriétés projectives des figures. Paris, 1822). Как видно из заголовка книги, Понселе уже пользовался словом «проективный». Он впервые систематически пользовался мнимыми точками плоскости, которые называл «идеальными точками» — термин, получивший впоследствии широкое распространение в математике. Понселе, так же как и Карно, широко применял «принцип корреляции», называемый им «принципом непрерывности». С помощью этого принципа Понселе установил, что все окружности плоскости имеют две общие мнимые бесконечно удаленные «циклические точки», например теорему о том, что фокусы конического сечения можно рассматривать как точки пересечения касательных к этому сечению, проведенных из циклических точек.

Синтетические исследования по проективной геометрии были продолжены в XIX в. Мишелем Шалем, Христианом фон Штаудтом (1798—1867), Якобом Штейнером и их учениками. Значительное развитие получили в XIX в. и аналитические исследования по проективной геометрии, из которых прежде всего следует отметить работу А. Ф. Мёбиуса (1827), которому принадлежит упоминавшийся нами термин «коллинеация» для проективных преобразований, переводящих точки в точки. Мёбиус определил также другой вид проективных преобразований, при которых точки пространства переходят в плоскости, а плоскости в точки (на плоскости — точки в прямые, а прямые — в точки); частным случаем здесь является переход от точки к полярной плоскости относительно поверхности второго порядка (на плоскости—к поляре относительно кривой второго порядка). Мы упоминаем об этом потому, что эти преобразования в настоящее время называются заимствованным у Карно термином «корреляция». На основе этих исследований, в сочетании с теоретико-групповыми идеями, Ф. Клейн пришел к открытию проективной модели геометрии Лобачевского (1870) и к знаменитой «Эрлангенской программе» (1872), дающей классификацию геометрий по группам их преобразований.

Элементарная геометрия

Значительное развитие многих геометрических дисциплин в XVIII в. привело к появлению новых теорем и в элементарной геометрии. Целый ряд таких теорем был доказан Эйлером. Так, например, Эйлер доказал ((1765), 1767), что точка H пересечения высот треугольника, точка S пересечения его медиан (центр тяжести) и точка O пересечения перпендикуляров к сторонам треугольника, восставленных в их серединах (центр описанной окружности), лежат на одной прямой, причем точка S лежит между точками O и H и $OH : SH = 1 : 2$ (рис. 16). Прямая OSH в настоящее время известна под названием прямой Эйлера. Эйлер доказал свою теорему аналитически; пользуясь упомянутой выше теоремой Эйлера о центре подобия (см. стр. 168), можно дать ей и весьма простое синтетическое доказательство.

К области элементарной геометрии относятся и другие работы, о которых мы уже говорили, например по геометрии циркуля (см. стр. 196), а также работы, которые мы оставим в стороне ввиду их совершенно частного характера. Необходимо, однако, специально выделить одну важную теорему Эйлера о многогранниках, значение которой далеко выходит за пределы элементарной геометрии в обычном смысле слова. Эту теорему, наряду с другими предложениями о многогранниках, Эйлер сообщил в письме к Хр. Гольдбаху от 14 ноября 1750 г. и опубликовал, вместе с ними, в двух статьях в «Novi Commentarii» (1752—1753), 1758.

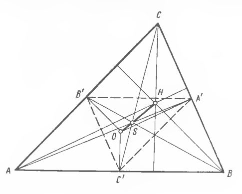


Рис. 16

Согласно теореме Эйлера, во всяком многограннике сумма числа вершин S и числа граней H превышает на два число ребер A, т. е. $S + H = A + 2$ [1]. Многогранники, рассматриваемые Эйлером, предполагаются выпуклыми. Для доказательства Эйлер удаляет грани многогранника, примыкающие к одной из его вершин, и заменяет их гранями, вершинами которых являются остальные вершины удаленных граней; полученный многогранник представляет собой выпуклую оболочку оставшихся вершин многогранника. При этом удаляются одна вершина и равное число граней и ребер, а добавляется граней на одну больше, чем ребер, так что число $S + H - A$ не изменяется. Повторяя этот процесс $S - 4$ раза, можно дойти до тетраэдра, для которого соотношение $S + H = A + 2$ легко проверяется. На рис. 17 изображен процесс преобразования куба в тетраэдр. Теорема Эйлера о многогранниках верна не только для выпуклых многогранников, но и для всех многогранников, поверхности которых находятся во взаимно однозначном и взаимно непрерывном соответствии со сферой, или, короче, гомеоморфны сфере; такие многогранники называются многогранниками нулевого рода. Теорема верна также для любых замкнутых поверхностей, гомеоморфных сфере, причем роль граней, ребер и вершин в этом случае играют соответственно области этой поверхности, гомеоморфные кругу, дуги общих границ пар этих областей и точки, одновременно принадлежащие к границам трех и более областей. В такой форме эта теорема является одной из важнейших в современной топологии поверхностей, изучающей поверхности с точностью до гомеоморфизма.

---

[1] Это соотношение знал около 1620 г. еще Декарт, а, по бумагам последнего, и Лейбниц. Затем оно, по-видимому, было надолго забыто.

Условия, при которых верна теорема Эйлера, были позднее выяснены женевским профессором математики Симоном Люилье (1750—1840). В «Ann. math. pures et appliquées» (1812—1813) Люилье доказал, что теорема справедлива только для многогранников нулевого рода и что для многогранников с p сквозными отверстиями («многогранников p-го рода») имеет место более общее соотношение

$$S + H - A = 2 - 2p.$$

Обобщение Люилье также верно не только для многогранников, но и для

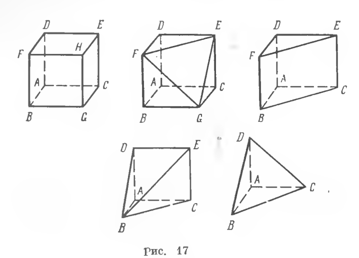


Рис. 17

любых поверхностей. гомеоморфных поверхностям многогранников p-го рода.

Число $S + H - A$, рассматривавшееся Эйлером для выпуклых многогранников, в настоящее время называют эйлеровой характеристикой многогранника или поверхности. Эйлерова характеристика и род поверхности являются основными топологическими характеристиками замкнутых двусторонних поверхностей.

В тех же работах о многогранниках Эйлер доказал, что для существования многогранника (предполагаемого выпуклым) с S вершинами, A ребрами и H гранями, помимо условия $S + H = A + 2$, необходимо выполнение неравенств $3S \leqslant 2A$ и $3H \leqslant 2A$. Как показал в начале XX в. Эрнст Штейниц, эти условия и достаточны для существования выпуклых многогранников. Здесь же Эйлер доказал, что не существует многогранника (также предполагаемого выпуклым), у которого каждая грань имела бы более пяти сторон или в каждой вершине сходилось бы более пяти граней.

Эйлер нашел также формулы для объема тетраэдра по его ребрам и по трем ребрам, примыкающим к одной вершине, и углам между ними, являющиеся пространственными аналогами теоремы Архимеда — Герона, выражающей площадь треугольника через его стороны, и известной формулы, выражающей площадь треугольника через две его стороны и угол между ними. Если в тетраэдре $ABCD$ ребра $AB = a$, $AC = b$, $BC =$

$= c$, $AD = d$, $BD = e$, $CD = f$, то первая формула Эйлера может быть записана в виде

$$V = \frac{1}{12} \sqrt{a^2f^2P + b^2c^2Q + c^2d^2R - a^2b^2c^2 - a^2d^2e^2 - b^2d^2f^2 - c^2e^2f^2},$$

где

$$P = b^2 + c^2 + d^2 + e^2 - a^2 - f^2, \qquad Q = a^2 + c^2 + d^2 + f^2 - b^2 - e^2,$$
$$R = a^2 + b^2 + e^2 + f^2 - c^2 - d^2,$$

а если примыкающие к вершине A углы $BAC = p$, $BAD = q$, $CAD = r$, то вторая формула Эйлера может быть переписана в виде

$$V = \frac{1}{6} abd \sqrt{1 - \cos^2 p - \cos^2 q - \cos^2 r - 12 \cos p \cos q \cos r}$$

или

$$V = \frac{1}{3} abd \sqrt{\sin \frac{p+q+r}{2} \sin \frac{p+q-r}{2} \sin \frac{p+r-q}{2} \sin \frac{q+r-p}{2}}.$$

Отметим еще работы Н. Фуса по «проблеме замыкания». Прежде всего он занялся задачей о четырехсторонниках, около которых можно описать и в которые можно вписать круги (Nova Acta, (1792) 1797); вскоре он обобщил задачу на некоторые виды многоугольников с числом сторон, большим четырех (Nova Acta, (1795—1796) 1802). Впоследствии задачей об условиях того, что многоугольник, образованный хордами круга, являющимися одновременно касательными к находящемуся внутри него другого круга, является замкнутым, занялся Я. Штейнер (1827), а полное решение проблемы замыкания для круга дал с помощью эллиптических функций К. Г. Якоби (1828). Понселе в своем трактате по проективной геометрии (1822) распространил эту проблему на конические сечения.

К элементарной геометрии относится еще теория параллельных, о развитии которой в XVIII в. мы расскажем отдельно в конце настоящей главы.

Элементы топологии у Эйлера

Значение теоремы Эйлера о многогранниках для топологии было выяснено только в XIX в., а для самого Эйлера и его современников эта теорема была элементарно-геометрической. В другом случае Эйлер сознательно поставил вопрос о топологических свойствах фигур. Мы имеем в виду его «Решение задачи, относящейся к геометрии положения» (Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. Commentarii. (1736) 1741). В этой задаче, известной под названием «задачи о семи кенигсбергских мостах», требуется выяснить возможность перехода по мостам a, b, c, d, e, f, g (рис. 18) над рукавами реки Прегель, разделяющими Кенигсберг на четыре области A, B, C, D, проходя по каждому мосту только один раз. Эйлер доказал невозможность такого перехода следующим образом. Он обозначил переход по мосту из одной области в другую, ставя рядом обозначения этих двух областей, переход по двум мостам из одной области во вторую, а затем в третью, ставя рядом обозначения этих трех областей, и т. д. Поэтому переход по n мостам обозначается $n + 1$ буквами и, следовательно, весь искомый переход по семи мостам — восемью буквами. Если в область ведет m мостов, то при переходе по всем ним обозначение этой области должно встретиться самое меньшее $2m - 1$ раз, поэтому,

так как в области A, B, C, D ведут соответственно 5, 3, 3, 3 моста, обозначение этих областей при переходе по всем мостам должно встретиться самое меньшее соответственно 3, 2, 2, 2 раза, т. е. всего должно быть самое меньшее девять букв, в то время как однократный переход по всем мостам должен быть обозначен восемью буквами, откуда и вытекает невозможность искомого перехода. Далее Эйлер рассмотрел различные обобщения этой задачи.

Восходящее к Лейбницу выражение «геометрия положения»[1] применяли в форме géométrie de position Л. Карно и форме Geometrie der Lage

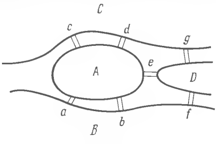


Рис. 18

фон Штаудт (см. стр. 200). Однако Карно и Штаудт имели в виду проективную геометрию, между тем как у Эйлера речь шла в сущности о топологии, так как поставленная им задача и ход ее решения не изменяются при любом взаимно непрерывном преобразовании фигуры, состоящей из берегов реки, островов и мостов через рукава реки. Г. Грассман (1844) развил идею Лейбница в другом направлении и со ссылки на нее начал свое «Учение о протяжении» (1844), в котором ввел многомерные пространства. На Лейбница ссылался и один из основоположников топологии И. Б. Листинг (1848), и сам общепринятый ныне термин топология, введенный Листингом, означает по-гречески «учение о положении» (τοπος — место, положение). Основатель топологии поверхностей Б. Риман, введший в 1857 г. понятие рода поверхности и выяснивший тем самым топологический смысл «характеристики Эйлера», пользовался другим лейбницевским термином analysis situs — «анализ положения», который воспринял и основатель многомерной комбинаторной топологии Анри Пуанкаре (1895).

Плоская тригонометрия и полигонометрия

Ряд новых приемов решения треугольников был дан еще во «Всеобщей арифметике» Ньютона (опубл. 1707). Так, например, в десяти задачах геометрического отдела стороны AC и BC треугольника определяются по данному основанию $AB = a$, полусумме сторон $AC + BC = 2b$ и углу C (рис. 19) следующим образом: обозначая косинус C через d/e, Ньютон находит, что полуразность x искомых сторон равна

$$x = \sqrt{\frac{da^2 + 2eb^2 - 2db^2}{2d + 2e}}.$$

[1] Сам Лейбниц писал об анализе положения (analysis situs) и характеристике положения (characteristica situs). Ср. т. II, стр. 127.

Ньютон предлагает и другой способ: он проводит биссектрису CE угла C, пересекающую основание в точке E, и находит, что

$$\frac{AB}{AC+BC}=\frac{AE}{AC}=\frac{\sin ACE}{\sin CEA},$$

а затем, вычтя из угла AEC и его дополнения половину угла C, получает углы ABC и CAB, которые позволяют определить стороны AB и AC по теореме синусов. Написанное только что равенство фактически представ-

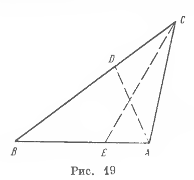


Рис. 19

ляет собою одну из так называемых формул Карла Молльвейде (1774—1825)

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\dfrac{A-B}{2}}{\sin\dfrac{c}{2}},$$

которую только что названный немецкий астроном опубликовал в 1808 г. вместе с другой формулой

$$\frac{a-b}{c}=\frac{\sin\dfrac{A-B}{2}}{\cos\dfrac{c}{2}}.$$

Основное значение имело, однако, не открытие некоторых новых формул, но радикальная перестройка всей системы тригонометрии на алгебраическо-аналитической основе и переход к современной трактовке тригонометрических функций. Ко все более широкому применению алгебры постепенно подходили многие и одним из первых чешский математик Яков Креза (1648—1715), книга которого «Видовой анализ тригонометрии» (Analysis speciosa Trigonometriae. Pragae, 1720) была напечатана посмертно. Впрочем, символика Крезы была мало удобной: он стремился применять почти только линии синусов, так что, например, записывал теорему о синусе суммы двух дуг в виде

$$s=\frac{y\sqrt{r^2-x^2}+x\sqrt{r^2-y^2}}{r},$$

где r — радиус тригонометрического круга.

Заслуживающий внимания вклад в аналитическую трактовку тригонометрии внес петербургский академик, питомец Тюбингенского университета Фридрих Христофор Майер (1697—1729). В I—V томах «Записок» Петербургской академии Майер опубликовал 14 статей по астрономии и математике, главным образом по тригонометрии ((1727) 1729, (1729) 1735, (1730—1731) 1738). Стремясь упростить символику этой науки, он обозначал тригонометрические линии первыми буквами их наименований; впрочем, он не указывал аргумента и, например, записывал синус суммы двух дуг в виде $\frac{Sc+Cs}{r}$, где прописная буква употреблялась для функций большего угла, а r — радиус круга. Эти обозначения, при большем числе углов пополнявшиеся новыми буквами, применяли и некоторые другие математики. Майер, далее, расширил аналитическое изложение тригонометрии, большинство формул которой выводилось тогда каждая по отдельности на основе специального геометрического построения. Он отчетливо понимал значение аналитического построения тригонометрии и утверждал, например, что из теоремы косинусов сферической тригонометрии можно вывести все формулы для прямоугольного и косоугольного сферических треугольников. Майеру принадлежит также несколько новых формул, удобных для приведения к логарифмическому виду. В вопросе о знаках тригонометрических линий углов, больших прямого, Майер, как и многие его предшественники и современники, допускал неясности и ошибки, считая синус и тангенс тупого угла положительными, а косинус и котангенс отрицательными. К счастью, это не отражалось на его выводах, в которых он ограничивался областью острых углов.

Последователем Майера был Фридрих Вильгельм фон Оппель (1720—1769), который в «Анализе треугольников» (Analysis triangulorum. Dresdae — Lipsiae, 1746) дал аналитическое изложение плоской сферической тригонометрии на основе небольшого числа предложений, доказанных геометрически. Здесь выведен целый ряд новых соотношений, например, обе формулы Молльвейде (на основе теоремы тангенсов, установленной геометрическим путем) или же формула

$$\frac{b+a}{p-q}=\frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{B-A}{2}},$$

где p, q — отрезки, на которые сторона c делится опущенной на нее высотой.

Оппель стремился также построить систему сферической тригонометрии, взяв в качестве отправных геометрически доказанные теоремы синусов и косинусов.

Обе формулы Молльвейде и только что приведенную формулу Оппеля независимо установил Томас Симпсон в «Плоской и сферической тригонометрии» (Trigonometry plane and spherical. Woolwich, 1748). Применяя более близкую к нашей символику (вроде sin., co.sin., tang.), Симпсон, однако, предпочитал геометрические доказательства.

Новый этап в развитии тригонометрии начинается с первого тома «Введения в анализ бесконечных» (1748) Эйлера, который впервые внес полную ясность в вопрос о знаках всех тригонометрических функций любого аргумента, ввел почти не отличавшуюся от современной тригонометрическую символику (sin. z или sin. $A.z$, где A. означает arcus, дугу; cos. z или cos. $A.z$,

tang. z, cot. z и т. д.) и построил аналитическую теорию тригонометрических и круговых функций. Об этом будет еще сказано в седьмой главе, и здесь мы ограничимся напоминанием об установлении связи между тригонометрическими по показательными функциями с помощью «формул Эйлера» (см. стр. 324). Поэтому если предшественники Эйлера понимали под синусом, косинусом, тангенсом и т. д. тригонометрические линии в круге некоторого радиуса, именовавшегося «полным синусом» (sinus totus), то теперь под $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, ... стали понимать аналитические функции действительного и комплексного переменного. Ниже мы познакомимся с важным вкладом Эйлера в сферическую тригонометрию.

Название «тригонометрические функции» впервые употребил в своей превосходной «Аналитической тригонометрии» (Analytische Trigonometrie. Braunschweig 1770) профессор в Гельмштадте и в Галле Георг Симон Клюгель (1739—1812); он же первый явно определил эти функции как отношения сторон треугольника, что, впрочем, имел в виду еще ранее Эйлер, к которому Клюгель примыкал в символике. Теорему о синусе суммы он выводил из формулы

$$\sin C = \sin A \cos B + \cos A \sin B,$$

получаемой непосредственно из треугольника ABC.

Оригинальное изложение тригонометрии было дано И. Г. Ламбертом в первом томе «Очерков об употреблении математики и ее приложений» (1765). Во втором томе того же сочинения (1770) была основана тетрагонометрия — обобщение тригонометрии па четырехугольники. Дальнейшее обобщение тригонометрии на произвольные многоугольники — так называемая полигонометрия (полигон — многоугольник) принадлежит А. И. Лекселю. В работе «О решении прямолинейных многоугольников» (De resolutione polygonorum rectilineorum. Novi Commentarii, (1774) 1775. (1775) 1776) Лексель нашел, что стороны $a_1, a_2, \ldots, a_n$ n-угольника и углы $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ между продолжениями сторон и предыдущими сторонами связаны соотношениями:

$$a_1 \sin \varphi_1 + a_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2) + \ldots + a_n \sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n) = 0,$$
$$a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \ldots + a_n \cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n) = 0,$$

равносильными равенству нулю суммы векторов, направленных по сторонам многоугольника. Эти формулы сохраняют силу и для невыпуклых и самопересекающихся многоугольников. Из этих формул Лексель вывел главные формулы тригонометрии и тетрагонометрии, демонстрируя при этом ряд весьма простых способов решения задач, а затем распространил теорию на 5, 6 и 7-угольники. Лексель изучил и вопрос о решении n-угольников по данным диагоналям и их углам со сторонами, указав общие правила решения, а также принципы классификации задач.

Результаты Лекселя были существенно дополнены С. Люилье в книге «Полигонометрия или об измерении прямолинейных фигур» (Polygonométrie ou de la mesure des figures rectilignes. Genève, 1789). Основную роль в исследовании Люилье играло выражение для площади многоугольника, которое он вычислял n способами: откинув одну из n сторон, он составлял все парные произведения остальных $n - 1$ сторон на синусы углов между этими сторонами и складывая полученные $(n - 1)(n - 2)/2$ произведения, он нашел удвоенную площадь многоугольника. Исходя из этой формулы, Люилье получил все формулы полигонометрии, в том числе и формулы Лекселя. Свои теоремы Люилье применил к решению n-уголь-

ника по $n - 1$ стороне и $n - 2$ углам, по всем углам и $n - 2$ сторонам и по всем сторонам и $n - 3$ углам. Люилье обобщил эти результаты на пространственные многоугольники и, развивая работы Эйлера о многогранниках, создал «полиэдрометрию» — учение об измерении многогранников (полиэдров) в работе «Теоремы полиэдрометрии» (Théorèmes de Polyédrométrie. Mém. Inst. Paris, 1805, поступило в 1799) и упомянутом выше мемуаре (см. стр. 208). В первой из этих работ Люилье установил основную теорему полиэдрометрии: площадь каждой грани многоугольника равна сумме произведений площадей остальных граней на косинусы углов, образуемых ими с первой гранью (впрочем, он не сформулировал условий, необходимых для справедливости этой теоремы). Приведенная теорема равносильна равенству нулю суммы векторов, направленных перпендикулярно граням многогранника и равных по модулю площади этих граней.

Сферическая тригонометрия и геометрия

Математики XVIII в. внесли существенный вклад и в сферическую тригонометрию. Уже встречавшийся нам югославский ученый Р. И. Бошкович в «Построении сферической тригонометрии» (Trigonometriae sphaericae constructio. Romae, 1737) дал значительно упрощенное, по сравнению с прежними, графическое решение всех шести задач сферической тригонометрии по определению элементов сферического треугольника по трем его элементам. Значительные усовершенствования в сферическую тригонометрию были внесены в упоминавшихся курсах Ф. Оппеля, Т. Симпсона и И. Г. Ламберта. Особенно успешно и много занимались сферической тригонометрией и геометрией Эйлер и его ученики.

В «Основаниях сферической тригонометрии, выведенных из метода максимумов и минимумов» (Principes de la trigonométrie sphérique tirés de la méthode des plus grands et plus petits. Mém. Ac. Berlin., (1753) 1755) Эйлер дал построение сферической тригонометрии исходя из того, что стороны сферических треугольников являются геодезическими на сфере. Здесь было впервые систематически введено обозначение углов треугольника A, B, C, а противолежащих им сторон a, b, c. Вслед за этой работой Эйлер опубликовал «Начала сфероидальной тригонометрии, выведенные по методу максимумов и минимумов» (Éléments de la trigonométrie sphéroidique tirés de la méthode des plus grands et plus petits. Mém. Ac. Berlin, (1753) 1755), посвященные тригонометрии сплющенного эллипсоида вращения, форму которого, как было обнаружено лапландской экспедицией Мопертюи и теоретическими исследованиями Клеро (см. стр. 160), имеет поверхность Земли.

Во «Всеобщей сферической тригонометрии, кратко и ясно выведенной из первых оснований» (Trigonometria sphaerica universa ex primis principiis breviter et dilucide derivata. Acta, (1779) 1782), Эйлер развил сферическую тригонометрию, исходя из трехгранного угла, который он пересекал различными плоскостями, применяя затем к полученным плоским треугольникам формулы плоскости тригонометрии. Эта работа была первым полным изложением всей системы сферической тригонометрии.

Новый вид, приданный Эйлером как плоской, так и сферической тригонометрии к концу XVIII в., вошел в учебники. Из этих учебников следует отметить прежде всего написанную племянником М. В. Ломоносова и учеником Эйлера академиком М. Е. Головиным (1756—1790) «Плос-

кую и сферическую тригонометрию с алгебраическими доказательствами» (Петербург, 1789). Очень хорошее изложение тригонометрии имелось также в «Началах геометрии» (Éléments de géométrie. Éd. 1. Paris, 1794) А. М. Лежандра.

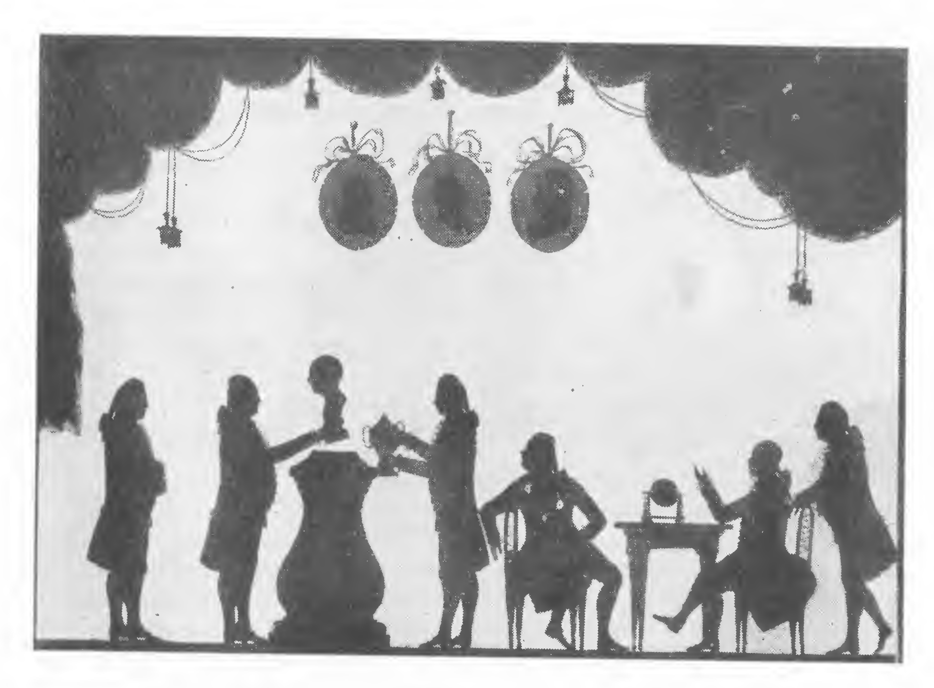
Вслед за Эйлером сферической тригонометрией занялись не только М. Е. Головин, но и другие петербургские математики — А. И. Лексель, а затем Н. И. Фусс и Ф. И. Шуберт. Эти исследования были самым тесным образом связаны с их же исследованиями по сферической геометрии, и мы рассмотрим их совместно.

Андрей Иванович (Андерс Иоганн) Лексель, уроженец Або (ныне Турку, Финляндия), с 1766 г. преподавал в университете родного города и затем в морском училище в Упсале (Швеция), а в 1769 г. был по совету Эйлера приглашен в Петербургскую академию. Исследования Лекселя по математике, вообще примыкавшие к тематике Эйлера, относятся к нескольким областям: интегрированию функций, в частности эллиптических интегралов и дифференциальных уравнений, тригонометрии и тетрагонометрии, сферической геометрии, и его имя нам еще встретится в дальнейшем. Лексель занимался также механикой и особенно астрономией, с 1771 г. он состоял в академии профессором астрономии. На основании наблюдений прохождения Венеры по диску Солнца в 1769 г. он произвел весьма точное для того времени определение одной из основных астрономических постоянных, служащих при измерении расстояний во Вселенной,— солнечного параллакса (1772), доказал периодичность носящей его имя кометы (1770), а через несколько месяцев, после того, как 13 марта 1781 г. Гершель обнаружил около созвездия Близнецов движущуюся звездочку, он установил, что это не комета, как думал сначала знаменитый наблюдатель, а новая планета, которую вскоре назвали Ураном. Лексель оказал Эйлеру большую помощь при подготовке труда по новой теории движения Луны (1772).

Начав публикацию своих работ по сферической геометрии со статьи о сферических эпициклоидах (Acta, (1779 : I) 1782), которые изучал еще Я. Герман (см. стр. 154), Лексель перешел к рассмотрению различных свойств сферических треугольников.

В «Решении одной задачи сферической геометрии» (Solutio problematis geometrici ex doctrina sphaericorum. Acta (1781 : I) 1784) Лексель доказал, что геометрическим местом вершин сферических треугольников с общим основанием и равной площадью являются дуги двух малых кругов, концами которых служат точки, диаметрально противоположные двум концам основания. Лексель дал и аналитическое (тригонометрическое) и синтетическое решение этой задачи. Другие доказательства теоремы Лекселя принадлежат Эйлеру (1778, опубл. Nova Acta, (1792) 1798), А. М. Лежандру (1794) и Я. Штейнеру (1837). Статья Эйлера была представлена зимой 1778 г., а том, в котором появилась теорема Лекселя, датирован 1781 г., но Эйлер сам указывал, что теорему нашел Лексель.

Исследованию свойств малых кругов на шаре и связанных с ним треугольников и четырехугольников Лексель посвятил еще две статьи. В «Acta», (1782 : I) 1786, среди многих других новых предложений особенно интересны следующие две теоремы: 1) в сферическом четырехугольнике, вписанном в малый круг, сумма двух противоположных углов равна сумме двух других углов и 2) в четырехугольнике, описанном около малого круга, сумма двух противоположных сторон равна сумме двух других сторон. Первое предложение является аналогом соответствующей пло-



А. И. Лексель, И. А. Эйлер (слева) и Н. И. Фусс (справа) устанавливают бюст Л. Эйлера работы Д. Рашетта (1784) в Петербургской академии наук; далее сидят И. И. Лепехин и П. С. Паллас и стоит В. Л. Крафт (силуэты работы Ф. Антинга, 1780-е годы. Архив АН СССР, Ленинград)

ской теоремы, а вторая — «двойственна» первой, т. е. получается из нее переходом к полярному треугольнику. Далее, в сферическом четырехугольнике, вписанном в малый круг, произведение синусов половин его диагоналей равно сумме произведений синусов половин противоположных углов этого четырехугольника; это — аналог известной теоремы Птолемея о диагоналях и сторонах вписанного в круг плоского четырехугольника.

Все доказательства в этой статье — тригонометрические, и сама сферическая тригонометрия получила в ней дальнейшее развитие. Лексель показал, что произведения синусов сторон сферического треугольника и соответствующих высот

$$\sin a \cdot \sin h_a = \sin b \cdot \sin h_b = \sin c \cdot \sin h_c$$

равны

$$d = 2\sqrt{\sin s \cdot \sin (s - a) \cdot \sin (s - b) \cdot \sin (s - c)},$$

где $s = (a + b + c)/2$ — полусумма сторон треугольника, а произведения синусов углов сферического треугольника и соответствующих высот

$$\sin A \sin h_a = \sin B \sin h_b = \sin C \sin h_c$$

равны

$$\delta = 2\sqrt{-\cos S \cos (S - A) \cos (S - B) \cos (S - C)},$$

где $S = (A + B + C)/2$ — полусумма углов треугольника. Это дало ему следующие выражения для радиусов R и r кругов, описанных около сферического треугольника и соответственно вписанного в него:

$$\operatorname{tg} R = \frac{4 \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2}}{d} = \frac{2 \cos S}{\delta},$$

$$\operatorname{ctg} r = \frac{4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}{\delta} = \frac{2 \sin s}{d}.$$

Величина d в настоящее время называется амплитудой сферического треугольника или синусом трехгранного угла с вершиной в центре сферы, высекающего из сферы данный сферический треугольник, а величина δ — коамплитудой сферического треугольника. В этом же мемуаре Лексель доказал соотношения:

$$\sin A = \frac{d}{\sin b \sin C}, \quad \sin B = \frac{d}{\sin c \sin a}, \quad \sin C = \frac{d}{\sin a \sin b},$$

$$\sin a = \frac{\delta}{\sin B \sin C}, \quad \sin b = \frac{\delta}{\sin C \sin A}, \quad \sin c = \frac{\delta}{\sin A \sin B},$$

называемые в настоящее время формулами Лекселя, а также формулы:

$$\sin^2 \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\sin \frac{s-a}{2} \sin \frac{s-b}{2} \sin \frac{s-c}{2}}{\cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}},$$

$$\cos^2 \varepsilon = \frac{\cos \frac{s}{2} \cos \frac{s-a}{2} \cos \frac{s-b}{2} \cos \frac{s-c}{2}}{\cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}},$$

где ε — сферический избыток треугольника. Из двух последних формул можно сразу получить формулу Люилье

$$\operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\operatorname{tg} \frac{s}{2} \operatorname{tg} \frac{s-a}{2} \operatorname{tg} \frac{s-b}{2} \operatorname{tg} \frac{s-c}{2}},$$

на принадлежность которой Люилье указал А. М. Лежандр в своих «Началах геометрии» (1794). Формула Люилье является частным случаем (при $d = 0$) доказанной в той же работе Лекселя формулы

$$\operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\operatorname{tg} \frac{s-a}{2} \operatorname{tg} \frac{s-b}{2} \operatorname{tg} \frac{s-c}{2} \operatorname{tg} \frac{s-d}{2}}$$

для сферического избытка ε сферического четырехугольника, вписанного в малый круг, где $s = {}^1/_2 (a + b + c + d)$ — полусумма сторон четырехугольника. Сферические избытки сферических треугольников и четырехугольников пропорциональны их площадям, так что формула Люилье для сферического треугольника и формула Лекселя для сферического четырехугольника являются аналогами теоремы Архимеда — Герона для плоского треугольника и теоремы Брахмагупты для плоского четырехугольника, вписанного в круг (см. т. I, стр. 197).

В «Доказательстве некоторых теорем сферической геометрии» (Demonstratio nonnullorum theorematum ex doctrina sphaerica. Acta, (1782) 1786) Лексель доказал, что если продолжить стороны вписанного в малый круг сферического треугольника ABC до их пересечения с дугами больших кругов, касательных к кругу в точках A, B, C, то точки пересечения P, Q, R обязательно лежат на одном большом круге; для этой теоремы также имеется аналогичная теорема в планиметрии.

Вслед за Лекселем сферикой занялись Н. И. Фусс и Ф. И. Шуберт.

Николай Иванович Фусс (1755—1825), уроженец Базеля, был рекомендован своим учителем Д. Бернулли Эйлеру в качестве секретаря и приехал в Петербург в 1772 г. Под диктовку почти полностью ослепшего к этому времени Эйлера Фусс готовил к печати многие его работы и проделывал необходимые выкладки. Как ученый Фусс стал как бы малым спутником Эйлера и почти все сто с лишним работ, опубликованных им по вопросам математики. механики и физики, так или иначе примыкают к эйлеровской тематике. Сразу после смерти Эйлера Фусс написал «Похвальное слово господину Эйлеру» (Eloge de Monsieur Euler. St.-Pétersbourg, 1783), представляющее собой весьма ценный очерк жизни и творчества великого ученого. Несколько десятков лет Фусс редактировал и издавал сочинения своего учителя, не опубликованные при его жизни. С семьей Эйлера Фусс породнился, женившись на одной из его внучек. Когда в 1800 г. скончался сын Эйлера И. А. Эйлер, бывший непременным секретарем Петербургской академии наук с 1769 г., Фусс занял его место. Фусс преподавал математику в сухопутном и морском кадетных корпусах и в качестве члена Главного управления училищ принял в начале XIX в. деятельное участие в реформе системы народного образования. Он был автором нескольких учебников для военных школ и гимназий. Н. И. Фусс писал по многим вопросам алгебры, интегрального исчисления, теории дифференциальных уравнений, страхового дела и т. д., но наибольший интерес имеют его работы по дифференциальной геометрии (см. стр. 187) и по сферике.

Федор Иванович (Фридрих Теодор) Шуберт (1758—1825), уроженец Гельмштедта, первоначально работал домашним учителем, а затем уездным ревизором в Хапсалу (в нынешней Эстонии) и занимался вопросами геометрии и астрономии. В 1785 г. он был приглашен в Петербургскую академию, где в 1786 г. стал академиком, а с 1803 г. руководил академической обсерваторией. Мы уже упоминали статью Шуберта о стереографической проекции сфероида. Добавим, что в одной более поздней статье о точках возврата плоской кривой (1818, опубл. 1822) Шуберт впервые указал, что точки возврата кривой должны удовлетворять системе уравнений:

$$f = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right)^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

и рассмотрел различные возможные случаи такой особой точки, кроме самоприкосновения.

В статье, представленной в 1786 г., «Решение некоторых сферических задач» (Problematum quorundam sphaericorum solutio. Nova Acta, (1784) 1787) Фусс решил задачи на построение сферических треугольников с данным основанием, у которых вершина лежит на данном большом круге, причем выполнено одно из следующих трех экстремальных условий: 1) угол при вершине максимален (дело сводится к решению некоторого ку-

бического уравнения с одним действительным корнем); 2) сумма сторон при вершине минимальная; 3) площадь максимальна. Вторая и третья из этих задач решалась Фуссом с помощью сдвига вершины по данному большому кругу. Экстремальными задачами на сфере занимался также А. М. Лежандр в «Началах геометрии» (1794).

Вторая из названных задач привела Фусса к рассмотрению геометрического места точек сферы, сумма сферических расстояний которых от двух данных точек сферы постоянна. Такое геометрическое место по аналогии с обычным эллипсом Фусс назвал «сферическим эллипсом» и рассмотрел в представленной им в 1787 г. работе «О некоторых свойствах эллипсов,

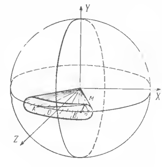


Рис. 20

описанных на поверхности сферы» (De proprietatibus quibusdam ellipseos in superficie sphaerica descriptae. Nova Acta, (1785) 1788). В том случае, когда сферическое расстояние между фокусами A, B сферического эллипса равно $2a$, а сумма расстояний произвольной точки эллипса от его фокусов равна $2c$, Фусс записал уравнение сферического эллипса в сферических координатах, т. е. долготе и широте, которые он для большей аналогии с плоскостью обозначал x и y, считая, что экватор проходит через фокусы эллипса, а первый меридиан — через середину дуги AB, в виде

$$\operatorname{tg} y = \frac{\sqrt{(\sin^2 c - \sin^2 a)(\sin^2 c - \sin^2 x)}}{\sin c \cos c}.$$

Эту формулу нетрудно вывести, если обозначить точку со сферическими координатами x, y через M и найти ее сферические фокальные радиус-векторы AM и BM. Эти радиус-векторы являются гипотенузами прямоугольных сферических треугольников APM и BPM, катеты которых равны $AP = a + x$, $BP = x - a$, $PM = y$ (рис. 20). Тогда в силу «сферической теоремы Пифагора»:

$$\cos AM = \cos (a + x) \cos y, \qquad \cos BM = \cos (x - a) \cos y.$$

Но, с другой стороны, по определению сферического эллипса $AM + BM = 2c$, т. е. $\cos AM \cos BM - \sin AM \sin BM = \cos 2c$. При подстановке в последнее равенство выражения $\cos AM$, $\cos BM$, $\sin AM$ и $\sin BM$ через косинусы дуг $a + x$, $x - a$ и y получается уравнение Фусса. Если положить радиус сферы равным единице и отнести ее точки к прямоугольным координатам X, Y, Z, связанным со сферическими координатами x, y

соотношениями:

$$X = \sin x \cos y, \quad Y = \sin y, \quad Z = \cos x \cos y$$

(см. тот же рисунок), то

$$\operatorname{tg} y = \frac{Y}{\sqrt{1-Y^2}} = \frac{Y}{\sqrt{X^2+Z^2}}, \qquad \sin x = \frac{X}{\sqrt{1-Y^2}} = \frac{X}{\sqrt{X^2+Z^2}}.$$

И если мы введем обозначения $\sin a = A$, $\sin c = C$, то уравнение Фусса можно переписать в виде

$$(C^2 - A^2) X^2 + C^2 Y^2 - \frac{C^2}{1-C^2} Z^2 = 0,$$

откуда вытекает, что сферический эллипс является линией пересечения сферы с конусом второго порядка с вершиной в центре сферы.

Вместе с упоминавшейся нами работой Шуберта о стереографической проекции сфероида (см. стр. 171) была напечатана его статья о свойствах локсодромы, т. е. кривой на сфере, пересекающей все ее меридианы под постоянным углом (Nova Acta, (1786) 1789). Отметим также его «Задачи сферической теории» (Problemata ex doctrina sphaerica. Nova Acta, (1794) 1801), где, в частности, доказано, что геометрическое место точек сферы, отношение синусов сферических расстояний которых от двух данных точек постоянно, является кривой, ортогональная проекция которой на диаметральную плоскость, проходящую через данные точки, является гиперболой. Шуберт показал, что эта кривая также высекается из сферы конусом второго порядка с вершиной в центре сферы. В том же томе «Nova Acta» Шуберт предложил довольно громоздкое изложение системы сферической тригонометрии на основе теорем Менелая о трансверсалях.

Развитие сферики не остановилось на работах Эйлера и его петербургских учеников, оно было продолжено в XIX в. Я. Штейнером, X. Гудерманом. М. Шалем и другими геометрами.

Теория параллельных линий

Мы уже говорили о многочисленных попытках доказать V постулат Евклида, существенно содействовавших развитию теории параллельных линий в средние века и в XVII в. Эти попытки продолжались и в XVIII в., причем были установлены многие новые замечательные результаты, подготовлявшие открытие неевклидовой геометрии. Одно из важнейших исследований произвел итальянский монах Джироламо Саккери (1667—1733), преподаватель математики и грамматики в иезуитских колледжах Милана, Турина и Павии и автор нескольких сочинений по теологии, логике и математике. Основной математический труд Саккери называется «Евклид, очищенный от всех пятен, или же геометрическая попытка установить самые первые начала всей геометрии» (Euclides ab omni naevo vindicatus sive conatus geometricus, quo stabiliuntur prima ipsa universae geometriae principia. Mediolani, 1733). Саккери подверг критике доказательства V постулата Валлиса и ат-Туси (см. т. I, стр. 234; т. II, стр. 129). В своей собственной попытке доказательства этого постулата, который он считал одним из самых темных «пятен» Евклида, Саккери рассматривал тот же четырехугольник, что и Хайям и ат-Туси, т. е. четырех-

угольник с двумя прямыми углами при основании и равными боковыми сторонами, и выдвинул те же три гипотезы о его верхних углах — гипотезу острого, прямого и тупого углов (рис. 21). Хотя у Валлиса было приведено не то доказательство ат-Туси из его «Изложения Евклида» в 15 книгах, где из указанных трех гипотез выводилось большое число интересных геометрических следствий, а доказательство из «Изложения Евклида» в 13 книгах, где опровержение первых двух гипотез было произведено значительно короче, несомненно, что идея об этом четырехугольнике и трех гипотезах была заимствована Саккери у ат-Туси. Однако гипотезу тупого угла Саккери опровергал иначе, чем его предшественники.

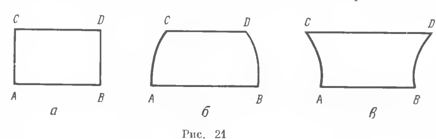


Рис. 21

Саккери показывает, что при этой гипотезе, как и при гипотезе прямого угла, имеет место V постулат Евклида: V постулат состоит в том, что две прямые на плоскости пересекаются при определенных условиях, а из гипотезы тупого угла вытекает, что две прямые на плоскости всегда пересекаются. Отсюда делается вывод, что при гипотезе тупого угла должна иметь место обычная геометрия, в которой справедлива гипотеза прямого угла, вследствие чего «гипотеза тупого угла всегда цело ложна, так как она сама себя разрушает» [1]. Смысл этого доказательства, столь же остроумного, сколь и краткого, состоит в том, что, так как из остальных аксиом геометрии Евклида при добавлении V постулата следует справедливость гипотезы прямого угла, гипотеза тупого угла, при которой выполняется V постулат, противоречит остальным аксиомам геометрии Евклида. После этого Саккери переходит к опровержению гипотезы острого угла. Он доказывает, что при этой гипотезе две прямые или пересекаются, или имеют общий перпендикуляр, по обе стороны от которого они удаляются друг от друга, или же удаляются друг от друга с одной стороны и асимптотически приближаются друг к другу с другой стороны. В последнем случае Саккери приходит к выводу, что эти прямые должны иметь общую точку и общий перпендикуляр в бесконечности. Смысл этого в том, что если опускать из точек одной из этих прямых перпендикуляры на другую, то при стремлении точки в бесконечность их длины стремятся к нулю, а углы, составляемые ими с первой прямой, стремятся к прямому углу. Однако Саккери представлял себе общую точку и общий перпендикуляр в бесконечности как обычную общую точку и общий перпендикуляр и делал отсюда неправомерный вывод, что в третьем случае две прямые касаются друг друга в бесконечности, откуда заключил, что «гипотеза

[1] *G. Saccheri.* Euklid von jedem Makel befreit. In: *F. Engel, P. Stäckel.* Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss, eine Urkundensammlung zur Vorgeschichte der Nicht-Euklidischen Geometrie. Leipzig, 1895, S. 100.

острого угла совершенно ложна, так как противоречит природе прямой линии» [1].

Не удовлетворившись этим доказательством, Саккери рассматривает геометрическое место точек плоскости, равноотстоящих от прямой; в отличие от своих предшественников Саккери знает, что эта линия, так называемая эквидистанта, в случае гипотезы острого угла не является прямой. Однако, вычисляя длину дуги эквидистанты при помощи бесконечно малых, Саккери ошибочно нашел, что длина этой дуги равна длине отрезка прямой между основаниями перпендикуляров, опущенных на нее из концов дуги, а с другой стороны, показал, что эти перпендикуляры удаляются друг от друга, так что не только длина дуги эквидистанты, но даже хорда, соединяющая концы этой дуги, должна быть длиннее указанного отрезка. Получив это противоречие, Саккери вновь объявил гипотезу острого угла опровергнутой. Саккери, получив значительно большее число следствий из гипотезы острого угла, чем его предшественники, сам того не сознавая, доказал целый ряд новых теорем геометрии Лобачевского, в которой выполняется гипотеза острого угла.

Гипотеза прямого угла, остававшаяся у Саккери после опровержения двух других гипотез, может быть также сформулирована как предположение о существовании прямоугольника. Такое предположение было положено в основу изложения теории параллельных линий в «Началах геометрии» (Éléments de géométrie. Paris, 1741) А. К. Клеро (ср. стр. 23).

Привлечению интереса математиков XVIII в. к теории параллельных линий содействовал Даламбер, который в «Очерках литературы, истории и философии» (Mélanges de Littérature, d'Histoire et de Philosophie. Paris, 1759; 2e éd., Amsterdam, 1770) указывал, что теория параллельных является одной из важнейших проблем элементарной геометрии, и посвятил специально параллельным линиям статью «Параллель» (Parallèle) в «Энциклопедии» (т. II, 1765). Всего с 1759 по 1800 г. в разных странах Европы появилось 55 работ по теории параллельных. Из этих работ особо следует отметить уже упоминавшуюся (стр. 31) диссертацию Г. С. Клюгеля, ученика А. Г. Кестнера, «Обзор важнейших попыток доказательства теории параллельных линий» (1763), содержащую интересный критический разбор около 30 попыток доказательств V постулата. Доказав несостоятельность всех этих попыток, Клюгель пришел к выводу, что Евклид был прав, включив это утверждение в число постулатов.

По-видимому, под влиянием Клюгеля заинтересовался проблемой параллельных линий И. Г. Ламберт, находившийся с ним в переписке. В изданной посмертно «Теории параллельных линий» (Theorie der Parallellinien, Leipz. Mag. reine u. angew. Math., 1786) Ламберт также пытался доказать V постулат от противного, рассматривая уже не четырехугольник Хайяма, а четырехугольник Ибн ал-Хайсама, т. е. четырехугольник с тремя прямыми углами, и выдвигал те же три гипотезы о четвертом угле этого четырехугольника (рис. 22)[2]. Гипотезу тупого угла Ламберт опровергает, показывая, что при ее допущении два перпендикуляра к одной прямой пересекаются, что противоречит остальным аксиомам геометрии Евклида. Ламберт, по-видимому, первый заметил, что гипотеза тупого

[1] *G. Saccheri.* Euklid von jedem Makel befreit. In: *F. Engel, P. Stäckel.* Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss, eine Urkundensammlung zur Vorgeschichte der Nicht-Euklidischen Geometrie. Leipzig, 1895, S. 105.

[2] Эта работа была написана Ламбертом еще в 1766 г., но он ее не опубликовал, так не был ею вполне доволен.

угла имеет место на сфере, если в качестве прямых рассматривать ее большие круги.

Переходя к гипотезе острого угла, Ламберт выводил из нее еще больше предложений геометрии Лобачевского, чем Саккери. В частности, он находит, что сумма углов треугольника при гипотезе острого угла меньше двух прямых и, если сумма углов A, B, C треугольника ABC равна $2d - \delta$, площадь треугольника ABC пропорциональна δ. Ламберт сравнил этот вывод с тем, что в сферической геометрии сумма углов сферического треугольника больше двух прямых и что площадь сферического треугольника равна εr^2, где r — радиус сферы, а ε — избыток указанной суммы над

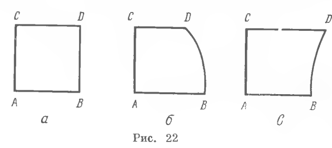


Рис. 22

двумя прямыми углами. «Мне кажется очень замечательным,— заметил Ламберт,— что вторая гипотеза оправдывается, если вместо плоских треугольников взять сферические. Я из этого почти должен был бы сделать вывод — заключение, что третья гипотеза имеет место на какой-то мнимой сфере. Во всяком случае, должна же существовать причина, почему она на плоскости далеко не так легко поддается опровержению, как это могло быть сделано в отношении второй гипотезы» [1].

Ламберт не нашел противоречия в гипотезе острого угла и пришел к заключению, что все попытки доказать V постулат не привели к успеху; тем не менее он остался уверен в невозможности геометрии, возникающей при гипотезе острого угла.

Остроумная попытка доказательства V постулата, основанная на операциях с бесконечно большими величинами, была предпринята учеником Эйлера швейцарским математиком Луи Бертраном (1731—1812) во втором томе его «Нового изложения элементарной части математики» (Développement nouveau de la partie élémentaire des mathématiques. Genève, 1778), переизданном впоследствии под названием «Начала геометрии» (Éléments de géométrie. Paris, 1812). Доказательство Бертрана было помещено в обоих изданиях этой книги. Это доказательство состоит в следующем: пусть прямые LC и KA (рис. 23) составляют с прямой KL внутренние углы AKL и CLK, сумма которых меньше двух прямых. Тогда существует прямая LM, образующая с LC такой угол CLM, что сумма трех углов AKL, CLK и CLM равна двум прямым. Следовательно, если бы прямая LC не пересекала бы прямой KA, угол MLC заключался бы внутри полосы $MLKA$. Но эта полоса содержится в плоскости «бесконечное число раз», в то время как угол MLC содержится в ней лишь столько раз, сколько дуга MC содержится в окружности, описанной из центра L радиусом LM. Отсюда Бертран делал вывод, что угол MLC не может заключаться

[1] *J. H. Lambert.* Theorie der Parallellinien. In: *F. Engel, P. Stäckel.* Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss, S. 202—203.

целиком внутри полосы $MLKA$, так что его сторона LC выходит из этой полосы и пересекает KA.

На самом деле ни вся плоскость, ни ее часть, заключенная между сторонами угла, не могут рассматриваться как определенные величины, допускающие количественное сравнение, и так как каждый угол на плоскости может быть бесконечно много раз помещен внутри себя, то, рассуждая, как Бертран, мы получим нелепое равенство между «величиной угла» и суммой этой величины с «величинами» области, входящей в первое положение угла и не входящей в его второе положение области, входящей во второе положение и не входящей в третье и т. д. В то же время наглядная

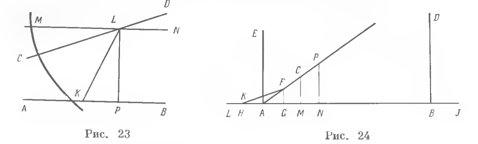


Рис. 23

Рис. 24

образность рассуждений Бертрана нашла признание у многих серьезных математиков того времени, и А. Крелле еще в 1835 г. поместил в издававшемся им журнале «Journal für die reine und angewandte Mathematik» модификацию этого доказательства.

В самом конце XVIII и в начале XIX в. несколько попыток доказательства V постулата предпринял в различных изданиях своих «Начал геометрии» (Éléments de géométrie. 1ᵉ éd. Paris, 1794) А. М. Лежандр. «Начала геометрии» Лежандра — учебник элементарной геометрии, продолжающий традиции одноименного учебника Клеро. В первом издании «Начал геометрии» Лежандр доказывал V постулат следующим образом: пусть прямая BD перпендикулярна прямой AB, а прямая AC составляет с ней острый угол BAC (рис. 24). Прежде всего устанавливается, что основание G перпендикуляра FG, опущенного из некоторой точки F линии AC, не может совпасть с точкой A и не может попасть на продолжение AL линии AB по другую сторону от точки A: первое невозможно, так как угол BAF по условию острый; второе невозможно потому, что если бы точка G совпала с точкой линии AL, то перпендикуляр FH пересекся бы с перпендикуляром AE к прямой AB, восставленным из точки A, в некоторой точке K и из этой точки к прямой AL было проведено два перпендикуляра и, следовательно, основание G перпендикуляра находится на линии AJ. Таким же образом основание M перпендикуляра, опущенного на прямую AB из точки C, не может совпасть с точкой G и попасть на линию GL, основание N перпендикуляра PN, опущенного из некоторой точки P продолжения линии AC на линию AB, не может совпасть с точкой M и попасть на линию ML и т. д. и при удалении точки прямой AC от точки A основание перпендикуляра, опущенного из нее на прямую AB, также удаляется от точки A. Ни одно из этих оснований перпендикуляров не может быть последним, так как предположение о том, что основание N — последнее, противоречит тому, что на прямой AC существуют точки, отстоящие от точки A дальше соответствующей точки P, и основания перпендикуляров,

опущенных из этих точек, отстоят от точки A дальше, чем N. Отсюда Лежандр делал вывод, что расстояния оснований перпендикуляров, опущенных из точек прямой AC на прямую AB от точки A, могут быть сколь угодно большими и, следовательно, один из них совпадает с точкой B, т. е. перпендикуляр BD также опущен на прямую AB из некоторой точки прямой AC, которая и является точкой пересечения прямой AC и AB. Из того же, что перпендикуляр и наклонная всегда пересекаются, уже нетрудно вывести V постулат в общем виде.

Ошибка этого доказательства Лежандра была вскрыта С. Е. Гурьевым в «Опыте о усовершении элементов геометрии» (Петербург, 1798). Дело в том, что из монотонного увеличения расстояния от точки A до основания перпендикуляра вовсе не следует, что это расстояние может быть сделано сколь угодно большим; например, сумма сходящегося знакоположительного ряда монотонно увеличивается, но не может превзойти суммы ряда. Лежандр и сам остался недоволен этим доказательством и в третьем издании «Начал геометрии» (1800) предложил новое доказательство V постулата: здесь он сначала доказал, что сумма углов треугольника не может быть больше двух прямых (это утверждение, вытекающее из «гипотезы тупого угла», противоречит нескольким аксиомам геометрии Евклида), а затем сделал попытку доказать, что эта сумма не может быть меньше двух прямых, молчаливо исходя, что из точки внутри угла всегда можно провести прямую, пересекающую обе его стороны. Обнаружив и эту ошибку, в двенадцатом издании (1823) Лежандр попытался доказать, что сумма углов треугольника равна двум прямым углам, исходя из предположения, что всегда можно преобразовать треугольник в треугольник с равной суммой углов и с уменьшающейся площадью. Оба эти предположения содержат утверждения, эквивалентные V постулату, что очевидно из того, что оба они не выполняются в геометрии Лобачевского. Исследования Лежандра, несмотря на его ошибки, сыграли существенную роль в подготовке неевклидовой геометрии, чему особенно способствовало широкое распространение его «Начал».

Из других доказательств V постулата в XVIII в. отметим доказательство упомянутого нами выше С. Е. Гурьева. Семен Емельянович Гурьев (1764?—1813) окончил Артиллерийский и Инженерный кадетский корпус в Петербурге и преподавал навигацию, артиллерию и математику. В 1796 г. он был принят в адъюнкты Академии наук, а через два года стал академиком. С. Е. Гурьев был организатором первого научного журнала академии, издававшегося на русском языке,— «Умозрительные исследования» (в 1809—1819 гг. вышли пять томов) и активным участником реформ начала XIX в. в области просвещения. Он преподавал во многих учебных заведениях Петербурга и составил целый ряд учебников. Упомянутый выше «Опыт о усовершении елементов геометрии» (СПб., 1798) С. Е. Гурьева посвящен проблемам обоснования и изложения не только геометрии, но и других разделов математики, и нам еще придется говорить об этой книге в седьмой главе (см. стр. 276).

Оставляя в стороне как интересный критико-методический разбор «Начал» Евклида и «Начал геометрии» Лежандра, так и программу курса геометрии, разработанную Гурьевым и реализованную в его учебниках, мы остановимся здесь только на его трактовке проблемы параллельных. Как было сказано, Гурьев правильно заметил дефект рассуждения Лежандра в его доказательстве V постулата, предложенного им в 1794 г., и показал, что из этого рассуждения вытекает лишь невозможность существования

последнего препендикуляра, опущенного из точек прямой AC на прямую AB, а не существования границы расстояний AM. Гурьев отметил, что неизвестно, соответствуют ли равным отрезкам $AF = FG = GP$ и т. д. равные отрезки AC, CM, MN и т. д., и если каждый из последних отрезков, например, в два раза меньше предыдущего, то их сумма не превзойдет удвоенного отрезка AC. Эта остроумная критика не помешала Гурьеву допустить аналогичную ошибку в его собственном доказательстве V постулата, также приведенного в указанной книге. Гурьев, как и Лежандр, рассматривает перпендикуляр BD и наклонную AC к прямой AB (рис. 25) и опускает перпендикуляры GR, IP, HS, FQ, KT, LV из точек G, I, H,

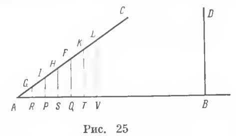


Рис. 25

F, K, L прямой AC на прямую AB. Основания R, P, S, Q, T, V этих перпендикуляров обладают тем свойством, что перпендикуляры к прямой AB, восставленные в этих точках, пересекаются с наклонной. Если существуют перпендикуляры, не пересекающиеся с наклонной, то на AB имеются точки, не обладающие этим свойством, и Гурьев делает вывод о существовании «общего предела» между точками, обладающими указанным свойством и не обладающими им. Однако из того, что среди перпендикуляров, пересекающих наклонную, нет последнего, Гурьев неправомерно заключает, что среди перпендикуляров, не пересекающих наклонной, нет первого. В геометрии Лобачевского, в которой V постулат не имеет места, такой первый непересекающий перпендикуляр имеется и называется параллелью Лобачевского к наклонной, это и есть тот «общий предел», о котором говорил Гурьев. Позднее, в «Основаниях геометрии» (СПб., 1804—1807) Гурьев предпочел привести доказательство Бертрана (см. стр. 218).

Если в «Опыте» С. Е. Гурьева была впервые в русской математической литературе поставлена проблема доказательства постулата о параллельных, то всего лишь через тридцать лет в России же появилось первое сочинение, в котором было дано принципиально новое решение проблемы параллельных, а именно построена геометрическая система, основанная на постулате о параллельных, согласно которому две прямые, пересекаемые третьей и составляющие с ней внутренние односторонние углы, в сумме меньшие двух прямых, могут и не пересекаться и, в частности, могут не пересекаться и перпендикуляр и наклонная. Это великое открытие, сделанное Н. И. Лобачевским, было доложено им физико-математическому факультету Казанского университета в 1826 г. и опубликовано в «Казанском вестнике» за 1829—1830 гг. Независимо от Лобачевского к тому же выводу пришел Я. Бояи, напечатавший свои результаты в 1831 г., и К. Ф. Гаусс, заметки которого по этому вопросу увидели свет лишь в 1860—1865 гг., после его смерти. Однако создание первой системы неевклидовой геометрии, имевшее далеко идущие последствия для всей математики и физики, лежит уже вне границ рассматриваемого нами времени.

ШЕСТАЯ ГЛАВА

ИСЧИСЛЕНИЕ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

Конечные разности

Исследование функций при прерывном изменении аргумента, в частности их интерполирование, велось издавна, но в отдельную математическую дисциплину исчисление конечных разностей, в котором специально изучаются функции с дискретно меняющимся аргументом, выделилось только в XVIII в. В этом исчислении оперируют приращениями функций, которые соответствуют конечным приращениям аргумента, и роль дифференциалов играют конечные разности функции $f(x)$, как-либо заданной в точках x_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$: разности первого порядка $\Delta f(x_k) = f(x_{k+1}) - f(x_k)$, разности второго порядка $\Delta^2 f(x) = \Delta f(x_{k+1}) - \Delta f(x_k)$ и т. д. Алгоритм вычисления конечных разностей аналогичен алгоритму дифференцирования, в частности для элементарных функций. Интегрированию здесь соответствует суммирование разностей, т. е. отыскание функций $f(x)$ с данной разностью $\Delta f(x) = \varphi(x)$, а роль дифференциальных уравнений играют уравнения в конечных разностях

$$\Phi[x, f(x), \Delta f(x), \Delta^2 f(x), \ldots, \Delta^n f(x)] = 0,$$

которые можно записать и в виде

$$\varphi[x, f(x), f(x_1), \ldots, f(x_n)] = 0,$$

если выразить все разности через значения искомой функции $f(x)$ при аргументах $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$; функции Φ и φ предполагаются известными. Может оказаться, что после приведений некоторые значения $f(x_m)$, $f(x_{m+1}), \ldots, f(x_n)$ выпадут.

Одна из основных задач в исчислении конечных разностей XVIII в. ставилась так: для заданной функции $f(x)$ найти в конечном виде точно или приближенно сумму

$$S_n = f(x_0) + f(x_0 + h) + \ldots + f(x_0 + nh),$$

при фиксированных x_0, h и n. Более общая постановка требует выяснения асимптотического поведения S_n при $n \to \infty$ по тем или иным аналитическим свойствам $f(x)$. Задача суммирования сводится к нахождению функции по ее заданной разности первого порядка. Для пояснения положим $x_0 = 0$, $h = 1$. Введя замену $\varphi(x) = f(x_0 + hx)$, получаем $S_n = \varphi(0) + \varphi(1) + \ldots + \varphi(n)$. Предположим, что удалось найти функцию $F(x)$, для которой $\Delta F(x) = \varphi(x)$ или $F(x + 1) - F(x) = \varphi(x)$. Тогда $F(1) - F(0) = \varphi(0)$, $F(2) - F(1) = \varphi(1)$, ..., $F(n + 1) - F(n) = \varphi(n)$.

Складывая эти равенства, получаем решение задачи суммирования

$$\varphi(0) + \varphi(1) + \ldots + \varphi(n) = F(n+1) - F(0).$$

Соотношение $\Delta F(x) = \varphi(x)$ содержит разность неизвестной функции первого порядка и представляет простейшее разностное уравнение. Всякая функция $F(x)$, удовлетворяющая этому уравнению, называется его решением. Отметим произвол решения: пусть имеется два решения $F_1(x)$ и $F_2(x)$. Положим $y(x) = F_1(x) - F_2(x)$. В таком случае $\Delta y(x) = \Delta F_1(x) - \Delta F_2(x) = 0$, т. е. $y(x+1) = y(x)$. Это означает, что разность двух любых решений уравнения есть периодическая функция. Таким образом, если $F_1(x)$ есть какое-либо решение уравнения $\Delta F(x) = \varphi(x)$, то всякое другое его решение содержится в формуле $F(x) = F_1(x) + C(x)$, где $C(x)$ — произвольная периодическая функция периода 1; для уравнения $F(x+h) - F(x) = \varphi(x)$ возникает периодическая функция периода h.

Изложенное показывает существенную аналогию между только что рассмотренными задачами исчисления конечных разностей и основными задачами дифференциального и интегрального исчислений. Действительно, операции нахождения производной здесь отвечает операция взятия разности ΔF; решение же уравнения $\Delta F(x) = \varphi(x)$ соответствует нахождению первообразной. В таком случае суммирование функции φ с помощью первообразной F отвечает нахождению определенного интеграла с помощью неопределенного. Соответствующая формула есть, таким образом, прямой аналог формулы Ньютона — Лейбница, выражающей определенный интеграл через первообразную функцию. Для пояснения результатов Эйлера, о которых говорится ниже, приведем два примера.

1. Пусть $F(x) = 1/x$, тогда $\Delta F = -\frac{1}{x(x+1)}$ и для вычисления $\sum_{x=1}^{n} \frac{1}{x(x+1)}$ достаточно воспользоваться суммационной формулой, в силу которой $-\sum_{x=1}^{x} \frac{1}{x(x+1)} = F(n+1) - F(1) = \frac{1}{n+1} - 1$, т. е. $\sum_{x=1}^{n} \frac{1}{x(x+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$.

2. Суммирование обобщенных степеней $x^{(n)} = x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)$: легко доказать, что $\Delta x^{(n)} = nx^{(n-1)}$. Эта формула совершенно аналогична формуле дифференцирования $(x^{(n)})' = nx^{(n-1)}$. Заменяя n на $n+1$, имеем $\Delta x^{(n+1)} = (n+1)\,x^{(n)}$ или $\Delta F(x) = \varphi(x)$, где $F(x) = x^{(n+1)}/(n+1)$, $\varphi(x) = x^{(n)}$. Основная формула дает выражение для суммы обобщенных степеней:

$$\sum_{x=0}^{n} x^{(k)} = \frac{(n+1)^{(k+1)}}{k+1}.$$

Конечные разности $\Delta f(x)$ и $\Delta^2 f(x)$ применялись при интерполировании функций, заданных таблицами, еще в древности и в средние века. Конечными разностями различных порядков широко пользовались при вычислении тригонометрических и логарифмических таблиц. Так, Бригс при составлении таблиц логарифмов вычислял последовательные разности до

тех пор, пока они не становились, при выбранном им числе знаков, постоянными, что позволяло найти разности низших порядков и экстраполировать логарифмическую функцию. По существу вычисления Бригса сводились к приближению логарифмической функции многочленами (мы уже упоминали, что, как показал Ньютон, функции, для которых $\Delta^n f(x)$ постоянна,— многочлены n-й степени). Эта же идея позволила Грегори и Ньютону найти общую формулу параболического интерполирования (см. т. II, стр. 155—158). Параболическое интерполирование применялось и при численном интегрировании. В частности, квадратичному интерполированию соответствует известная формула приближенного интегрирования, найденная еще Грегори и затем вторично Томасом Симпсоном (см. стр. 364).

Частичная разработка некоторых других задач исчисления конечных разностей также велась издавна, как, например, суммирование отдельных классов последовательностей, вроде последовательности Леонардо Фибоначчи или степенных сумм натурального ряда. Однако, как сказано, в качестве самостоятельной математической науки исчисление конечных разностей впервые выступило лишь в начале XVIII в. и прежде всего в трудах Ньютона, «Метод разностей» (1711) которого был рассмотрен в предыдущем томе, и особенно его последователей и младших современников— Тейлора, Муавра и Стирлинга.

Брук Тейлор

Один из крупнейших представителей английской математики XVIII в. Брук Тейлор (1685—1731) шестнадцатилетним юношей поступил в Кембриджский университет, где обучался юриспруденции, но с неменьшим усердием и большим успехом занимался и математическими науками. В 1712 г. он был избран членом Лондонского королевского общества и в 1714—1718 гг. состоял его секретарем; он принял активное участие в знаменитом споре о приоритете между Ньютоном и Лейбницем. Первая математическая работа Тейлора, написанная в 1708 г. и опубликованная в «Philosophical Transactions» за 1714 г., была посвящена теории колебаний маятника. Основным математическим сочинением Тейлора был «Прямой и обратный метод приращений» (Methodus incrementorum directa et inversa, Londini, 1715). В этом труде Тейлор, выступая как верный последователь метода флюксий Ньютона, обогатил математику целым рядом важных открытий. О некоторых нам еще придется говорить в дальнейшем (правила дифференцирования функции обратной данной (стр. 341), введение особого решения обыкновенного дифференциального уравнения (стр. 399), механико-геометрическая формулировка и первая попытка решения дифференциального уравнения малых колебаний струны (стр. 412)). Здесь мы остановимся на результате, более всего прославившем имя Тейлора,— общей теореме о разложении функции в степенной ряд, к которой он пришел в связи с задачей о приближенной квадратуре кривых. Отправным пунктом вывода Тейлора явилась формула Ньютона, выражающая приращение функции $f(a+n\Delta x)-f(a)$, соответствующее приращению аргумента $n\Delta x$.

Формулу Ньютона (см. т. II, стр. 157) можно записать в виде

$$f(a+n\Delta x)-f(a)=n\Delta f(a)+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 f(a)+\\+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\Delta^3 f(a)+\ldots+\Delta^n f(a). \qquad (1)$$



Б. Тейлор
(с портрета 1717 г., принадлежавшего леди Янг)

Здесь $\Delta f(a)$ обозначает первую разность $\Delta f(a) = f(a + \Delta x) - f(a)$, $\Delta^2 f(a)$ — вторую, т. е. $\Delta(\Delta f) = f(a + 2\Delta x) - 2f(a - \Delta x) + f(a)$ и т. д.

Идея Тейлора состояла в переходе от интерполяционной формулы Ньютона, выведенной для конечного приращения $h = n\Delta x$, к ряду, возникающему, когда n становится бесконечно большим, а Δx соответственно бесконечно малым. При $h = n\Delta x$ формула (1) получает вид

$$f(a+h) - f(a) = h\frac{\Delta f(a)}{\Delta x} + \frac{h(h-\Delta x)}{1\cdot 2}\cdot\frac{\Delta^2 f(a)}{\Delta x^2} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{h(h-\Delta x)(h-2\Delta x)\ldots[h-(n-1)\Delta x]}{1\cdot 2\ldots n}\,\frac{\Delta^n f(a)}{\Delta x^n}.$$

Предельное поведение первых членов в этом разложении при $\Delta x \to 0$ для Тейлора очевидно: $\frac{\Delta f(a)}{\Delta x}$ стремится к $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=a}$, $\frac{\Delta^2 f(x)}{\Delta x^2}$ к $\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=a}$, множитель $h(h - \Delta x)$ в пределе равен h^2 и т. д. Поэтому Тейлор, не беспокоясь, что число членов разложения неограниченно возрастает, в стиле математики XVIII в. заключает о справедливости для всякой функции $y = f(x)$ разложения, имеющего в современной записи вид

$$f(a+h) = f(a) + h\frac{df(a)}{dx} + \frac{h^2}{2!}\,\frac{d^2 f(a)}{dx^2} + \ldots$$

К ряду Тейлора мы еще возвратимся (стр. 294), здесь же подчеркнем еще раз, что Тейлор получил его в рамках формировавшегося исчисления конечных разностей.

В «Прямом и обратном методе приращений» рассмотрены также некоторые задачи на интерполирование и суммирование последовательностей. Тейлор сознавал необходимость в специальной символике исчисления конечных разностей и предложил обозначения, сходные с применявшимися в методе флюксий. Первую разность Δx он обозначал $\underset{\cdot}{x}$, вторую разность $\underset{\cdot\cdot}{x}$ и т. д. или еще ставя порядок разности под буквой $\underset{3}{x}$, $\underset{4}{x}$ и вообще $\underset{n}{x}$. Через $\underset{0}{x}$ он обозначал значение самого переменного x, а с помощью отрицательных индексов — суммирование, как операцию, обратную взятию разностей, так что, например, $\Delta \underset{-1}{x}$ есть не что иное, как x. Напомним. что применение отрицательных индексов имелось и у Лейбница, рассматривавшего интегрирование как дифференцирование с отрицательным показателем (см. т. II, стр. 273). Эти обозначения применялись некоторыми английскими математиками XVIII в., в том числе Э. Варингом, но общепринятой стала символика Эйлера (см. стр. 231), которой неоднократно пользовались выше и мы.

Перу Тейлора принадлежат еще книги по теории перспективы. о которых говорилось в пятой главе (см. стр. 196). В последние десять лет жизни он отошел от математики и занимался религиозными и философскими вопросами.

Исчисление конечных разностей все же не получило систематического развития в «Прямом и обратном методе разностей», и его бо́льшая часть была посвящена различным вопросам метода флюксий и его приложений к геометрии и механике. Но эта книга немедленно привлекла к дальнейшей разработке теории конечных разностей еще нескольких английских и французских ученых, работы которых тесно связаны между собой. Эти ученые дополнили и популяризовали исследования самого Тейлора. Парижский академик Франсуа Николь (1683—1758), в частности, вычислил (в Mém Ac. Paris, (1717—1719) 1720) формулы разности и суммы обобщенной степени, взятой в виде $x^{(n)} = x(x+h)(x+2h)\ldots[x+(n-1)h]$ и обобщенной для отрицательной степени $x^{(-n)} = 1 : x^{(n)}$; укажем, что

$$\Delta x^{(-n)} = \frac{-nh}{x(x+h)\ldots(x+nh)}.$$

Дробные функции Николь разлагал на простейшие. т. е. на дроби с постоянными числителями и обобщенными степенями в знаменателях. Пользуясь своими формулами, которые мы записали в теперешнем обозначении, Николь суммировал ряды с общим членом вида $\frac{1}{x(x+h)\ldots(x+kh)}$. Откликнулся на книгу Тейлора и учитель Николя П. де Монмор (Philos. Trans. (1719), 1720). Другая работа де Монмора содержала изложение только что рассмотренной статьи его ученика, а в приложении к этой работе Тейлор также занялся суммированием дробных функций с помощью разложения на простейшие дроби (Mém. Ac. Paris, (1717—1719) 1720). Николь еще несколько раз возвращался к суммированию рядов, расположенных по обобщенным отрицательным степеням. Николь употреблял только разности первого порядка. Высшие разности нашли применение в работах другого парижского академика Тома Фанте де Ланьи (1660—1734) по приближенному решению уравнений (Mém. Ac. Paris, 1705, 1722).

Рекуррентные последовательности

Одновременно с описанными исследованиями, как мы уже указывали (см. стр. 79), интересную главу в исчисление конечных разностей вписал А. де Муавр. Отправляясь от одной задачи теории вероятностей. он пришел к рассмотрению рекуррентных (возвратных) последовательностей и рядов. Связь между рекуррентными последовательностями и разностными уравнениями состоит в том, что определяющая последовательность «шкала отношений» (рекуррентная формула) есть не что иное, как линейное однородное уравнение в конечных разностях с постоянными коэффициентами; решение этого уравнения позволяет выразить общий член последовательности в функции его номера (ср. стр. 228).

Решается также задача об определении по шкале отношений общего члена рекуррентной последовательности. Муавр решал однородное линейное разностное уравнение с постоянными коэффициентами. При этом он строил выражение общего члена последовательности по корням алгебраического уравнения, которое позднее назвали характеристическим. Им разобраны и примеры, когда характеристическое уравнение имеет равные действительные корни или же два комплексных корня. Общая теория линейных разностных уравнений была, впрочем, создана позднее (см. стр. 234).

Вслед за Муавром рекуррентными рядами занялись многие: Николай I Бернулли, которому он изложил некоторые свои результаты еще в письме от 14 марта 1714 г., де Монмор, Д. Бернулли, Эйлер и другие. О применении рекуррентных последовательностей к численному решению уравнений говорилось в третьей главе (стр. 79), эти последовательности встретятся нам и в дальнейшем.

Ряд Стирлинга

Следующий важный шаг вперед сделал Стирлинг, роль которого в разработке исчисления конечных разностей, пожалуй, еще более значительна, чем в теории высших алгебраических кривых. Уроженец Шотландии, Джемс Стирлинг (1692—1770) с 1710 г. был стипендиатом Оксфордского университета, но участие в политической деятельности, враждебной правившей династии, заставило его эмигрировать в Венецию, где он зарабатывал на жизнь частными уроками. Там он написал упоминавшиеся ранее «Ньютоновы кривые третьего порядка» (см. стр. 155) и «Ньютонов метод разностей» (Methodus differentialis Newtoniana). Оба эти сочинения были опубликованы при содействии Ньютона — первое в Оксфорде в 1717 г., второе в «Philosophical Transactions» в 1719 г. С помощью Ньютона Стирлингу в 1725 г. удалось вернуться в Англию, где он выпустил «Метод разностей, или Трактат о суммировании и интерполяции бесконечных рядов» (Methodus differentialis sive tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum. Londini, 1730). В 1735 г. Стирлинг получил пост директора одного из горных предприятий в Шотландии, который занимал до конца своей жизни.

В статье 1719 г. Стирлинг приложил интерполяционный метод Ньютона к улучшению сходимости некоторых числовых рядов. Из богатого содержания «Метода разностей» мы укажем только наиболее выдающиеся результаты. Книга разделена на две части. В первой, «О разностных урав-

нениях, определяющих ряды», среди прочего рассмотрено суммирование обобщенных отрицательных степеней и образованных из них рядов. Среди приложений заслуживает упоминания приближенное суммирование ряда обратных квадратов $s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$, которое он произвел с высокой точностью, не заметив, однако, что полученный им результат $s = 1{,}644934065$, верный до предпоследнего знака, соответствует $\pi^2/6$, как это через несколько лет обнаружил Эйлер (см. стр. 337). В первой же части Стирлинг дал вывод одной из интерполяционных формул Ньютона, принадлежащей к группе так называемых формул центральных разностей, выгодных для интерполирования функции близ середины ряда ее значений. Эту важную формулу, нередко называемую формулой Ньютона — Стирлинга или даже только по имени Стирлинга, Ньютон сообщил без доказательства в третьем предложении «Метода разностей» (1711).

Во второй части «Метода разностей», озаглавленной «Об интерполировании рядов», Стирлинг, как он сам указывает, распространил идеи теории рекуррентных рядов Муавра на другие ряды, члены которых следуют какому-либо «регулярному закону». Его исходный принцип заключался в замене определяющей последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ рекуррентной шкалы

$$a_n = m_1 a_{n-1} + m_2 a_{n-2} + \ldots + m_k a_{n-k}$$

с постоянными коэффициентами m_i на шкалу с переменными коэффициентами $m_i(n)$. Эту шкалу Стирлинг наименовал разностным уравнением (aequatio differentialis). Считая, что существует одна и только одна (непрерывная) функция $f(x)$, определяемая такой шкалой и принимающая значения членов данной последовательности $f(n) = a_n$, Стирлинг поставил задачу об интерполировании последовательностей, занимавшую еще Валлиса (см. т. II, стр. 152), как задачу решения линейного уравнения в конечных разностях с переменными коэффициентами. Например, члены указанной Валлисом гипергеометрической последовательности $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 2 \cdot 3 = 6$, $a_4 = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$, $a_5 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$, ... удовлетворяют уравнению $f(x+1) = xf(x)$, решением которого, как выяснилось впоследствии, является гамма-функция $\Gamma(x)$, при натуральных значениях аргумента принимающая значения $n! = \Gamma(n+1)$. Впрочем, в интерполировании приведенной последовательности Стирлинг получил только понадобившийся ему частный результат, который можно записать в виде $a_{-1/2} = \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Он не знал, что одновременно той же проблемой занимались в Петербургской академии наук Гольдбах, Д. Бернулли и Эйлер и что последний к концу 1729 г. нашел полное ее решение с помощью определенных интегралов (см. стр. 335).

Видное место во второй части «Метода разностей» занимает возникшая в связи с успехами теории вероятностей и комбинаторики проблема приближенного вычисления факториалов $n!$ и коэффициентов бинома $(a+b)^n$ при очень больших значениях n. Здесь Стирлинг работал параллельно и в тесной связи с Муавром. В 1721 г. ученик Муавра Александр Кюминг (1690? — 1775) поставил перед ним одну теоретико-вероятностную задачу, решение которой требовало оценки отношения среднего члена разложения бинома $(1+1)^{2m}$ к сумме всех его членов, т. е.

$$\frac{C_{2m}^m}{2^{2m}} = \frac{2m(2m-1)\ldots(m+1)}{m!\,2^m},$$

а также отношения среднего члена к какому-либо другому, т. е. $C_{2m}^{m} / C_{2m}^{m\pm k}$ при весьма большом m. Муавр вскоре нашел приближенное решение обоих вопросов, опубликованное позднее в «Аналитических этюдах» (1730). Мы приведем его ответ на первый вопрос, положив $2m = n$:

$$C_n^{n/2} : 2^n \approx \frac{2{,}168\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{n-1},$$

при этом он указал, правда в других выражениях, что $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}$ (ср. стр. 319). Свою оценку Муавр проверил по специально составленной таблице логарифмов $n!$ для $n = 10, 20, 30, \ldots, 900$. Вывод оценки был основан на применении степенных разложений для $\ln \frac{m+\mu}{m-\mu} = \ln \frac{1+x}{1-x}$, $x = \frac{\mu}{m}$, а в ходе преобразований он использовал суммы нечетных степеней натуральных чисел, найденные Я. Бернулли (стр. 307).

В 1725 г. Кюминг предложил эту задачу Стирлингу, который дал другое решение при помощи конечно-разностных методов и интерполирования, в частности и упомянутого определения $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Это решение он письменно сообщил летом 1729 г. Муавру, успевшему поместить его в «Аналитических этюдах», вышедших в самом начале 1730 г., а два вывода опубликовал в «Методе разностей».

Но еще значительнее был другой результат Стирлинга, к которому он пришел, по-видимому занимаясь проверкой таблицы логарифмов $n!$ Муавра, именно, асимптотический ряд для суммы десятичных логарифмов первых n членов арифметической прогрессии. Этот ряд, носящий теперь его имя, Стирлинг опубликовал вместе с частным случаем $\sum_{k=2}^{n} \log k = \log(n!)$ в «Методе разностей». Еще раньше, через несколько дней после выхода «Аналитических этюдов», Стирлинг письменно сообщил свой ряд для $\log(n!)$ Муавру вместе с указаниями на некоторые неточности в его таблице. В несколько более современной записи и для случая натуральных логарифмов ряд Стирлинга можно записать так:

$$\ln(n!) = \frac{1}{2}\ln 2\pi + \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(n+\frac{1}{2}\right) - \left(n+\frac{1}{2}\right) - \\ - \frac{1}{2\cdot 12\left(n+\frac{1}{2}\right)} + \frac{7}{2^3\cdot 360\left(n+\frac{1}{2}\right)^3} - \frac{31}{2^5\cdot 1260\left(n+\frac{1}{2}\right)^5} + \ldots$$

В «Дополнении к Аналитическим этюдам» (Miscellaneis Analyticis Supplementum), изданном в Лондоне в том же 1730 г., Муавр вывел ряд Стирлинга в несколько иной, более простой форме, причем впервые указал закон образования его коэффициентов, в которые входят числа Бернулли.

Имя Стирлинга носит также асимптотическое равенство, дающее при больших n хорошие приближения:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}.$$

Оно без труда формально получается, если ограничиться первыми тремя членами приведенного ряда. Однако в «Методе разностей» этого приближения нет, его дал Муавр.

Эти результаты Стирлинга и Муавра были распространены на гамма-функцию Эйлером (см. стр. 336), вместе с тем они представляют собой частные случаи общей формулы суммирования Эйлера — Маклорена, которая в равной мере принадлежит исчислению конечных разностей и теории рядов и о которой нам будет удобнее рассказать в седьмой главе. Следует добавить, что ни Стирлинг, ни Муавр не выявили асимптотический характер своих разложений, более глубокий анализ которых выпал опять-таки на долю Эйлера (см. стр. 306 и след.).

Интерполяционные формулы Лагранжа

Во второй половине XVIII в. возникла новая постановка проблемы интерполяции, связанная с новым подходом к приближенному выражению функциональной зависимости.

В применениях математического анализа вопрос не всегда сводится к нахождению аналитического выражения искомой зависимости в виде формулы $y = f(x)$. Даже в том случае, когда это выражение известно, оно может оказаться в силу своей сложности мало пригодным для вычисления нужных частных значений аргумента. Для нужд практики в огромном большинстве случаев достаточно знать значения функции на достаточно «плотном» множестве точек, например, при значениях аргумента: x_0, $x_0 + h$, $x_0 + 2h$, $x_0 + 3h, \ldots$ при некотором малом приращении h (любого знака). Поэтому возникает задача: заменить сложную функцию $y = f(x)$ другой — более простой функцией, значения которой, во всяком случае при указанных значениях аргументов, были бы достаточно близки к значениям $f(x)$. В частности, задача может ставиться так: найти многочлен от x степени не выше n, который совпадает с заданными значениями в $n+1$ точках. При подобной постановке выражение точной функциональной зависимости излишне: используются лишь $y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$, соответствующие $n + 1$ значениям аргумента $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, y_k могут быть взяты непосредственно из эксперимента.

Принципиальные результаты в исследовании проблемы интерполяции в указанной постановке получил Лагранж. Исходя из выражений общих членов для рекуррентных рядов, найденных им в 1775 г., он несколько позже нашел выражение интерполяционных многочленов, получивших затем его имя (Nouv. Mém. Ac. Berlin, (1792/93) 1798). Имя Лагранжа носит формула, приведенная им без доказательства в «Элементарных лекциях по математике» (1795), но опубликованная ранее Варингом (Philos. Trans., 1779). Многочлен Лагранжа, совпадающий в точках x_1, $x_2, \ldots, x_n$ со значениями $y_1, y_2, \ldots, y_n$ интерполируемой функции, имеет вид

$$P_n(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_n)}\, y_1 + \frac{(x-x_1)(x-x_3)\ldots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots(x_2-x_n)}\, y_2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\ldots(x_n-x_{n-1})}\, y_n.$$

В работе, опубликованной в 1783 г. в «Astronomisches Jahrbuch», Лагранж, решая задачу интерполяции в той же постановке, применил тригонометрические суммы, т. е. показал, каким образом должны быть определены параметры $a, b, c, \ldots \alpha, \beta, \gamma, \ldots, \varphi, \chi, \psi, \ldots,$ чтобы

конечная сумма $a \sin(\alpha + x\varphi) + b \sin(\beta + x\chi) + c \sin(\gamma + x\psi) + \ldots$ совпадала с заданными значениями интерполируемой функции в конечном числе точек. Впрочем, этой проблемой он занимался еще в 1759 г. (ср. стр. 418).

Исследования Эйлера; суммирование функций

Интерес Эйлера к исчислению конечных разностей помимо вопросов интерполяции обусловливали задачи суммирования функций и теории рекуррентных рядов. Наряду с этим исчисление конечных разностей Эйлер существенно использовал при разработке методов приближенного интегрирования дифференциальных уравнений и создании основ вариационного исчисления. Более того, само дифференциальное исчисление он пытался построить, отправляясь от исчисления конечных разностей. Первые две главы «Дифференциального исчисления» (1755) Эйлера отчетливо выявляют это его стремление: они целиком посвящены теории конечных разностей.

Используя результаты своих предшественников, прежде всего Тейлора и Стирлинга, Эйлер впервые дал здесь отчетливое и последовательное изложение основ исчисления конечных разностей. Характерной особенностью изложения является его алгоритмичность. Сразу же весьма удачно вводится основная символика, сохранившаяся до наших дней. Следуя примеру Лейбница, который обозначил дифференциалы символом d, Эйлер для разностей вводит единый символ Δ. При этом подчеркивается дальнейшая цель. Обозначив значения функции $y = y(x)$ для значений x, $x + \omega$, $x + 2\omega$, ..., соответственно через y, y^{I}, y^{II}, ..., Эйлер говорит: «Чтобы поставить их (т.е. разности.— *Ред.*) в связь с дифференциалами, будем обозначать их следующим образом:

$$y^{\mathrm{I}} - y = \Delta y, \quad y^{\mathrm{II}} - y^{\mathrm{I}} = \Delta y^{\mathrm{I}}, \quad y^{\mathrm{III}} - y^{\mathrm{II}} = \Delta y^{\mathrm{II}}$$

и т.д.» [1]. Разности второго порядка обозначаются двояко: $\Delta\Delta y$ или $\Delta^2 y$. Первое из обозначений соответствует обозначению ddy, нередко употреблявшемуся для дифференциалов второго порядка, однако разности высшего порядка обозначаются единообразно: $\Delta^3 y$, $\Delta^4 y$ и т. д., что совпадает с современной символикой.

Вслед за этим устанавливаются основные алгоритмы. Первый их них состоит в нахождении коэффициентов для разностей высшего порядка. Получив выражения разностей первых пяти порядков вплоть до $\Delta^5 y = y^{\mathrm{V}} - 5y^{\mathrm{IV}} + 10y^{\mathrm{III}} - 10y^{\mathrm{II}} + 5y^{\mathrm{I}} - y$, Эйлер указывает: «Коэффициенты в этих формулах подчинены тому же закону, который наблюдается у степеней бинома» [2]. Далее устанавливается, как мы скажем сейчас, линейность операции взятия разности: если $y = p + q + r + \ldots$, то $\Delta y = \Delta p + \Delta q + \Delta r + \ldots$, $\Delta^2 y = \Delta^2 p + \Delta^2 q + \Delta^2 r + \ldots$ Затем выводится правило нахождения разности произведения, отличающейся от его дифференциала на величины высшего порядка малости: $\Delta(pq) = p\Delta q + q\Delta p + \Delta p\Delta q$. Это позволяет вычислять разности любого порядка для x^n. Полученный алгоритм переносится (сначала формально) на случай произвольных значений n. Не ограничиваясь выражением

---

[1] *Л. Эйлер*. Дифференциальное исчисление. Перевод, вступительная статья и примечания М. Я. Выгодского. М.—Л., 1949, стр. 48.
[2] Там же, стр. 51.

разностей в этих случаях в виде рядов, Эйлер отмечает и возможность представления их в конечном виде. Поясним это на простейшем примере: $y = x^{-1} = \frac{1}{x}$, $\Delta \frac{1}{x} = \frac{1}{x+\omega} - \frac{1}{\omega}$, «если дробь $\frac{1}{x+\omega}$ развернуть в ряд, получится вышеприведенное выражение» [1]. Далее вычисляются разновидности дробных функций.

Для вычисления разностей иррациональных и трансцендентных функций используются ряды.

Общий вывод первой части этой главы таков: для произвольной алгебраической и трансцендентной функции y от x ее первая разность может быть представлена в форме $\Delta y = P\omega + Q\omega^2 + \ldots$, вторая разность должна иметь вид $\Delta^2 y = P\omega^2 + Q\omega^3 + \ldots$; при этом коэффициенты при степенях приращения ω обозначаются одними и теми же буквами, хотя они представляют различные функции x (это отмечается в тексте).

Вторая часть первой главы посвящена обращению задачи: по заданной разности теперь требуется найти соответствующую функцию. Искомую функцию, разность которой известна, Эйлер называет суммой, вводя символ Σ: обращая уравнение $z = \Delta y$, он пишет $y = \Sigma z$. Другими словами, здесь решаются разностные уравнения вида $\Delta y = z(x)$. Эйлер ограничивается простейшими случаями, которые он может рассмотреть методом суммирования, т. е. с помощью обращения найденных разностей отдельных элементарных функций.

Изложение этой части сочинения, в противоположность другим главам, в силу сжатости не отличается обычной для Эйлера ясностью. Мы проиллюстрируем существо вопроса примером. Получив формулы $\Delta x = \omega$, $\Delta x^2 = 2\omega x + \omega^2$, $\Delta x^3 = 3\omega x^2 + 3\omega^2 x + \omega^3$ и т. д., Эйлер с помощью метода суммирования хочет их обратить. Не приводя пояснений, он сразу указывает равенства $\Sigma\omega = x$, $\Sigma(2\omega x + \omega^2) = x^2$, $\sum x = \frac{x^2}{2\omega} - \sum \frac{\omega}{2} = \frac{x^2}{2\omega} - \frac{x}{2}$. Эти результаты становятся понятными, если воспользоваться указанной выше основной формулой суммирования (см. стр. 222). Для $\Delta x = \omega$ имеем $F(x) \equiv x$, $\varphi(x) = \omega$. Так как приращение $\omega \neq 1$, то формула будет иметь вид $\sum\limits_{x=0}^{n} \varphi(x) = F[(n+1)\omega] - F(0)$, что и означает справедливость равенства $\Sigma\omega = x$ при $x = (n+1)\omega$. Аналогично при $\varphi(x) = 2\omega x + \omega^2$ и $F(x) = x^2$ эта формула дает $\sum\limits_{x=0}^{n} (2\omega x + \omega^2) = F[(n+1)\omega] - F(0) = [(n+1)\omega]^2$, что в сжатой форме в тексте и записывается в виде равенства $\Sigma(2\omega x + \omega^2) = x^2$. Следствие $\sum x = \frac{x^2}{2\omega} - \frac{x}{2}$ получается из этих формул без затруднений.

Весьма широкие применения исчисление конечных разностей получило в теории рядов. Вторая глава «Дифференциального исчисления» Эйлера и носит название: «О применении разностей в учении о рядах». Здесь решаются две основные задачи:

1) нахождение общего члена арифметических рядов, конечные разности Δ^k членов которых становятся постоянными начиная с некоторого значения k;

[1] *Л. Эйлер.* Дифференциальное исчисление, стр. 58.

2) нахождение «суммационных членов» рядов, т. е. сумм заданного числа членов $\varphi(0) + \varphi(1) + \ldots + \varphi(n)$.

В частности, здесь выясняется, что суммы рядов только что указанного класса будут также обладать свойством постоянства разностей соответствующего порядка.

Применение изложенных выше результатов позволяет Эйлеру найти методом суммирования суммы конечного числа членов рядов $1^k + 2^k + 3^k + \ldots$ для $k = 1, 2, \ldots, 16$, а затем рядов, общий член которых есть целая рациональная функция или же дробь, знаменатель которой разлагается на линейные множители.

Отметим особую трактовку Эйлером интерполяции рядов. Краткое замечание имеется во второй главе «Дифференциального исчисления»: «Более того, из общего члена можно определить и те члены, индексы которых суть дроби; в этом и состоит интерполяция рядов» [1]. Определение индекса дается ранее: «Индексом или показателем в каком-нибудь ряде называются числа, которые указывают, каков порядок каждого члена. Так индекс первого члена есть 1, второго 2 и т. д.» [2]. К вопросам об интерполяции рядов в только что указанном смысле Эйлер возвращается в главах 16 и 17 второй части книги, где рассматриваются ряды, не обладающие свойством постоянства разностей их членов.

Конечные разности вообще получили в «Дифференциальном исчислении» Эйлера многочисленные приложения, например в первой главе второй книги, где с их помощью производится преобразование бесконечных рядов в конечные или быстрее сходящиеся (см. стр. 305).

Особо отметим, что в классическом «методе ломаных» Эйлера для приближенного интегрирования дифференциальных уравнений используется идея замены дифференциального уравнения разностным. Этот метод излагается в первом томе «Интегрального исчисления» (см. стр. 393).

Уравнения в конечных разностях

Мы упоминали, что разностное уравнение

$$\Phi(x, f(x), \Delta f(x), \ldots, \Delta^n f(x)) = 0, \qquad (2)$$

где Φ — данная, а f — искомая функция, можно, представив все разности через данные значения $f(x)$, рассматривать в форме

$$\varphi(x, f(x), f(x_1), f(x_n)) = 0. \qquad (3)$$

Если в (3) фактически входят значения $f(x_k)$ с индексом вплоть до $k = m \leqslant n$, то говорят, что порядок уравнения (2) или (3) есть m. Мы примем для простоты, что $m = n$ и, кроме того, что $x_1 = x + 1$, $x_2 = x + 2, \ldots, x_n = x + n$. Тогда, считая (3) разрешенным относительно $f(x + n)$, его можно записать так:

$$f(x + n) = F(x, f(x), f(x + 1), \ldots, f(x + n - 1)). \qquad (4)$$

Отсюда следует, что если при $x = x_0$ заданы значения

$$f(x_0) = a_0, \quad f(x_0 + 1) = a_1, \ldots, f(x_0 + n - 1) = a_{n-1},$$

---

[1] *Л. Эйлер*. Дифференциальное исчисление, стр. 76.

[2] Там же, стр. 70.

то из (4) однозначно определяется $f(x+n)$. Но в таком случае замена в (4) x_0 на x_0+1 позволяет вычислить $f(x_0+n+1)$ и т. д. Задача нахождения решения разностного уравнения n-го порядка по данным начальным условиям $f(x_0)=a_0$, $\Delta f(x_0)=b_1, \ldots, \Delta^{n-1}f(x_0)=b_{n-1}$ совершенно аналогична задаче Коши для дифференциального уравнения n-го порядка.

Остается определить понятие общего решения. Будем считать числа $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ произвольными постоянными. Из (4) видим, что в таком случае любое решение $f(x)$ исходного уравнения будет зависеть от этих постоянных. Обратно, если имеется семейство функций $f(x) = \Psi(x, a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$, определенных на последовательности точек $x=x_0+n$, где n — целое число, то, исключая из $n+1$ равенств

$$f(x)=\Psi(x, a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}),$$
$$f(x+1)=\Psi(x+1, a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f(x+n)=\Psi(x+n, a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$$

постоянные $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$, получают разностное уравнение n-го порядка относительно $f(x)$.

Очевидно, что результат исключения не изменится, если считать эти постоянные произвольными периодическими функциями периода 1. Таким образом, общее решение разностного уравнения n-го порядка (при $\Delta x=1$) зависит от n произвольных периодических функций периода 1.

Рассматривая линейные разностные уравнения в связи с вопросами рекуррентных рядов, Эйлер выяснил, что при решении разностных уравнений с шагом h вместо произвольных постоянных следует в общем случае вводить произвольные периодические функции с периодом h (Novi Commentarii, (1750)1753).

Изложенное показывает, что весьма сложные вопросы существования и единственности решения задачи с начальными данными для дифференциальных уравнений при их постановке для разностных уравнений решаются крайне просто. Этим в значительной мере объясняется, что теория уравнений в конечных разностях возникла и развивалась одновременно с теорией дифференциальных уравнений.

Переход от дифференциальных уравнений к разностным имел принципиальное значение в самой теории дифференциальных уравнений не только в XVIII, но и в XIX в. Существо вопроса заключается в принципиальной возможности предельного перехода при $h \to 0$ от разделенных разностей $\frac{y(x+h)-y(x)}{h}$ к производной $\frac{dy}{dx}$, при котором разностное уравнение переходит в дифференциальное.

Методы решения разностных уравнений в значительной степени аналогичны методам теории дифференциальных уравнений. Особенно отчетливо это проявилось в области линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами и решении некоторых линейных уравнений с переменными коэффициентами.

Линейное неоднородное разностное уравнение первого порядка

$$\Delta y + M(x)\, y = N(x)$$

решил, следуя методу решения аналогичного дифференциального урав

нения, Лагранж (Miscellanea Taurinensia, 1759). Приведем его решение. Замена $y = uz$ дает $\Delta y = u\Delta z + z\Delta u + \Delta u\Delta z$. Это позволяет исходное уравнение разложить на два: $z\Delta u + uzM = 0$ и $u\Delta z + \Delta u\Delta z = N$. Из первого сразу следует $\frac{\Delta u}{u} = -M$; положив $u = e^t$, Лагранж в силу равенства $\Delta u = e^t (e^{\Delta t} - 1)$ получает новое уравнение $\frac{\Delta u}{u} = e^{\Delta t} - 1 = -M$, т. е. $\Delta t = \ln (1 - M)$, следовательно, по методу суммирования $t = \Sigma \ln (1 - M)$ и $u = \Pi (1 - M)$, где Π — символ произведения. С помощью этого результата легко решается второе уравнение $\Delta z = \frac{N}{u + \Delta u}$, откуда и находится искомое решение $y = \prod (1 - M) \left(A + \sum \frac{N}{\Pi (1 - M')}\right)$. Для уточнения приведем современную запись решения уравнения $\Delta f(x) + P(x) f(x) = Q(x)$, получаемого с помощью замены $f(x) = u(x) V(x)$:

$$f(x) = \prod_{t=0}^{x-1} [1 - P(t)] \left\{ \sum_{\nu=0}^{x-1} \frac{Q(\nu)}{\prod_{t=0}^{\nu} [1 - P(t)]} + C \right\}.$$

В том же томе «Miscellanea Taurinensia», что и описанная выше работа Лагранжа, была опубликована его работа о неоднородном линейном разностном уравнении с постоянными коэффициентами любого порядка $y + A\Delta y + B\Delta^2 y + \ldots + Q\Delta^n y = x$. Лагранж здесь следует методу постоянных множителей, примененному Даламбером к линейным неоднородным дифференциальным уравнениям n-го порядка (Mém. Ac. Berlin. (1748)1750), который мы поясним на примере уравнения второго порядка:

$$y + A \frac{dy}{dx} + B \frac{d^2y}{dx^2} = X.$$

Положим $p = dy/dx$, $q = dp/dx$ (что сводит задачу к интегрированию системы линейных дифференциальных уравнений). Умножим эти два уравнения соответственно на числовые множители a и b и сложим произведения с данным уравнением; тогда

$$y + (A + a) p + (B + b) q - a \frac{dy}{dx} - b \frac{dp}{dx} = X.$$

Множители a и b подбираются так, чтобы свести дело к решению линейного уравнения порядка на единицу ниже данного, а именно: берутся $A + a = b/a$, $B + b = 0$, так что после исключения b для a получается квадратное уравнение

$$a^2 + Aa + B = 0$$

с корнями a_1, a_2. Если обозначить $y + (A + a) p = z$, то z оказывается решением уравнения первого порядка:

$$z - a \frac{dz}{dx} = X.$$

По двум значениям z_1, z_2, соответствующим a_1, a_2, находятся два частных

решения y_1, y_2 данного уравнения, для чего нужно лишь решить линейную систему:

$$y + (A + a_1)\frac{dz_1}{dx} = z_1,$$

$$y + (A + a_2)\frac{dz_2}{dx} = z_2.$$

Все это легко распространяется на неоднородное линейное дифференциальное уравнение n-го порядка; случаи кратных и комплексных корней мы оставим в стороне.

Применив этот довольно сложный прием к линейному разностному уравнению n-го порядка, Лагранж получил соответствующее ему алгебраическое уравнение n-й степени, позволяющее совершенно аналогично найти n частных решений и затем общее решение.

Громоздкость приема не удовлетворила Лагранжа и в «Nouv. Mém. Berlin», (1775) 1777, он применил к однородному линейному уравнению с постоянным коэффициентом вида

$$Ay(x) + By(x+1) + \ldots + Ny(x+n) = 0$$

показательную подстановку $y = m^x$, которая тотчас дает алгебраическое уравнение для определения m:

$$A + Bm + \ldots Nm^n = 0,$$

о применении аналогичной подстановки к родственному классу дифференциальных уравнений Эйлером (1743) будет сказано далее (см. стр. 383).

Неоднородные линейные разностные уравнения изучались почти одновременно Лапласом и Лагранжем. Подробное исследование возможности нахождения решения неоднородного разностного уравнения n-го порядка с помощью решения соответствующего однородного уравнения было проведено Лагранжем в том же томе берлинских записок. Решение было достигнуто излюбленным методом Лагранжа — вариацией произвольных постоянных. Решение неоднородного уравнения Лагранж ищет в виде $y(x) = C'(x)z'(x) + \ldots + C^{(n)}(x)z^{(n)}(x)$, где $z', \ldots, z^{(n)}$ — решения однородного разностного уравнения. Для неизвестных функций $C'(x), \ldots, C^{(n)}(x)$ возникает система уравнений $\Delta C'(x) = \varphi^{(1)}(x)$, $\Delta C''(x) = \varphi^{(2)}(x), \ldots, \Delta C^{(n)}(x) = \varphi^{(n)}(x)$, где $\varphi^{(k)}(x)$ — известные функции. Отсюда нужные функции $C^{(k)}(x)$ определяются методом суммирования. Несколько ранее та же задача была по-другому решена Лапласом в «Miscellanea Taurinensia» за 1766—1769 гг. и в статье, подготовленной, вероятно, в 1771 г. и опубликованной в «Mém. prés. par div. sav» (1773)1776). Между прочим, в последней из упомянутых статей Лаплас указал, что можно, не нарушая общности, принимать постоянную разность аргумента равной единице, в чем за ним последовали и другие ученые.

Нелинейные разностные уравнения

Вкратце остановимся на результатах, полученных в XVIII в. в решении нелинейных разностных уравнений. Такие уравнения возникали при интегрировании уравнений с частными производными и при решении функциональных уравнений. Последние нередко появлялись при изучении итерационных процессов в задачах приближенного анализа. Для

иллюстрации приведем прием, с помощью которого Лаплас свел к разностному функциональное уравнение

$$\Phi[\varphi(x)] = H(x)\Phi[\psi(x)] + X(x),$$

где φ, ψ, H, X — заданные функции, а Φ — неизвестная функция (Mém. de math. et phys. présentés par divers savants, (1773) 1776). Основная идея состоит в том, что функции $\psi(x)$ и $\varphi(x)$ рассматриваются как значения новой неизвестной функции u_z в соседних узлах. С этой целью и делаются подстановки $u_z = \psi(x)$, $u_{z+1} = \varphi(x)$. Обращение первого из этих равенств $x = \Gamma(u_z)$ дает $u_{z+1} = \varphi[\Gamma(u_z)] = \Pi(u_z)$. Эта нелинейная рекуррентная формула определяет u_z как функцию z, следовательно, и остальные функции определяются как функции z. Поэтому подстановка в исходное уравнение приводит к уравнению в конечных разностях

$$y_{z+1} = L_z y_z + z_z,$$

где y_z соответствует $\Phi(u_z)$. В этой же работе Лаплас исследует уравнение $f(mx) = f(x^n) - p$, где m, n, p — постоянные. Аналогичный прием, т. е. подстановки $mx = u(z)$ и $x^n = u(z+1)$, приводит к нелинейному разностному уравнению $u(z+1) = \left[\frac{u(z)}{m}\right]^n$.

В некоторых случаях с помощью «метода дифференцирования» нелинейные разностные уравнения удавалось свести к линейным.

Приведем типичный пример, принадлежащий Монжу (Mém. Ac. Paris, (1783)1786). Требуется решить уравнение $(\Delta y)^2 = b^2$. Найдя почленно первые разности, Монж приходит к соотношению $\Delta^2 y\,[2\Delta y + \Delta^2 y] = 0$. Множитель $\Delta^2 y$ дает решение $y = Bx + A$ и в силу исходного уравнения $y(x) = \pm bx + A$. Второй множитель сразу же дает равенство $2y + \Delta y = C_1$, т. е. $y(x+1) + y(x) = C$. В результате Монж приходит к четырем решениям, которые он называет общими интегралами:

$$y(x) = \pm bx + A, \qquad y(x) = \pm(-1)^x \frac{b}{2} + C.$$

Из других методов теории обыкновенных дифференциальных уравнений, перенесенных на разностные, отметим метод интегрирующего множителя. В частности, член Берлинской академии швейцарец Жан Трамблей (1749—1811) с помощью множителя вида $P(x) + \Delta P$ вновь получил решение неоднородного линейного уравнения $\Delta y + M(x)y = N(x)$ (Nouv. Mém. Ac. Berlin, (1799—1800)1803). Умножение уравнения на $P + \Delta P$ показывает, что левая часть результата этого умножения становится полной разностью произведения Py, если P удовлетворяет разностному уравнению $\frac{\Delta P}{P + \Delta P} = M$. Последнее с помощью подстановки $P = e^t$ Трамблей сводит к простому разностному уравнению $\Delta t = \ln\frac{1}{1 - M}$, решаемому далее методом суммирования. Окончательное решение исходного разностного уравнения, полученное Трамблеем, с точностью до обозначений совпадает с указанным выше решением Лагранжа (вместо символов разности Δ и суммирования Σ Трамблей пишет соответственно δ и S).

Следуя Лагранжу в теории особых решений, Жак Шарль (1746—1823), профессор физики в Парижском Музее искусств и ремесел, распростра-

нил на разностные уравнения понятие особого интеграла (Mém. Ac. Paris, (1786)1788). Укажем схему рассуждения. Если $v = 0$ интеграл разностного уравнения $z = 0$, то последнее возникает, говорит Шарль. при исключении постоянной интегрирования из уравнений $v=0$ и $\delta v = 0$, где δv — вариация v, возникающая при вариации x и y в разностном смысле при постоянном a. Если же варьируется и a, то получают соотношение $\Delta v = \delta v + R\Delta a$. Поэтому если оказывается, что $R = 0$, то в результате исключения $a = a(x)$ вновь приходят к уравнению $z = 0$, как и при постоянном a. Таким образом, особый интеграл получается путем исключения a из равенств $v = 0$, $R = 0$. Отличие от случая дифференциальных уравнений, замечает Шарль, состоит в том, что a приходится теперь находить из уравнения, содержащего не только a, но и Δa. В силу этого в особый интеграл вновь вводится произвольное постоянное. Шарль поясняет этот прием на примере, являющемся разностным аналогом уравнения Риккати: $gy = x\Delta y + \frac{(\Delta y^2)}{4n^2}$, $\Delta x = g$, для которого общий интеграл имеет вид $gy = 2nax + a^2$. Метод дифференцирования (в разностном смысле) приводит для определения $a = a(x)$ к уравнению $2n(x + g) + 2a + \Delta a = 0$.

Дифференциально-разностные уравнения

В конце XVIII в. начинается исследование таких разностных уравнений, в которых значения x не образуют арифметической прогрессии. Другими словами, в таких уравнениях разность Δx рассматривается как заданная функция x. Так, Монж в связи с изучением произвольных функций, входящих в интегралы уравнений с частными производными (Mém. de math et phys. présentes par Savants divers, 1780), рассмотрел уравнение $\Delta y + Ay + B = 0$ в предположениях: 1) $\Delta x = a + bx$, 2) $\Delta x = ax^n - x$. В первом из этих случаев он использовал подстановку $a + bx = e^\omega$, во втором — подстановку $x^n = e^\omega$, дающую уравнение $\Delta\omega = (n - 1)\omega + n \ln a$. Этой задачей занимался одновременно организатор и первый президент Итальянского общества наук Антонио Марио Лорнья (1735—1796), считая, что Δx есть заданная функция $X = X(x)$ (Mem. Mat. Fis. Soc. It., 1782). Последовательные значения $y, y', y'', \ldots$, возникающие при таком определении разности, понимались в том смысле, что последующее значение возникало из предыдущего путем замены x на $x + X(x)$, таким образом, если $y = y(x)$, то $y'(x) = y(x + X(x))$, $y''(x) = y'(x + X(x))$ и т.д.

Вместе с этим новым направлением на рубеже XVIII и XIX вв. начинается изучение обширного класса так называемых дифференциально-разностных уравнений, первые примеры которых были рассмотрены Кондорсе (Mém. Ac. Paris, (1771)1774), Лапласом (там же, (1779)1782) и Лорнья (Mem. Mat. Fis. Soc. It., 1788). Такие уравнения наряду с разностями неизвестных функций содержат их дифференциалы или производные. Вследствие того что дифференциалы считались бесконечно малыми разностями, подобные уравнения и получили название уравнений со смешанными разностями. Первые попытки их классификации. произведенные в 1806 г. парижским ученым Ж. Б. Био, связаны с алгебраическим источником их возникновения. Существенную роль в этой трактовке Био имели приемы Лагранжа построения особых решений

уравнений с помощью метода вариации произвольных постоянных Поясним основное содержание этого алгебраического подхода.

Первый — самый простой класс уравнений — возникает в трактовке Био следующим образом. Пусть задано соотношение $V(x, y, a, b) = 0$, где a и b — произвольные постоянные. Введя обозначения $y_1 = y + \Delta y$, $x_1 = x + \Delta x$, $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{dy_1}{dx} = p_1$, т. е. $p_1 = \frac{dy}{dx} + \frac{d\Delta y}{dx}$, и предполагая, что Δx фиксировано, Био ставит задачу исключения произвольных постоянных из системы трех равенств:

$$V(x, y, a, b) = 0, \qquad V(x + \Delta x, y + \Delta y, a, b) = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial y} = 0.$$

Результат исключения будет представлять, очевидно, соотношение вида $F(x, y, y + \Delta y, p) = 0$, т. е. дифференциально-разностное уравнение первого порядка. Из самого построения следует, что соотношение $V(x, y, a, b) = 0$ определяет функцию $y = y(x, a, b)$, удовлетворяющую полученному дифференциально-разностному уравнению, по терминологии Био — интеграл этого уравнения.

Второй подход таков. Исходным является соотношение $u_1(x, y, x_1, y_1, a) = 0$. Дифференцируя полным образом по x, получаем соотношение

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + p\frac{\partial u_1}{\partial y} + p_1\frac{\partial u_1}{\partial y_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x} = 0.$$

Исключая из этих двух уравнений постоянную a, находим связь между x, y, y_1, p и p_1, т. е. также дифференциально-разностное уравнение первого порядка. Существенно отметить различие от предыдущих построений. Оно объясняется тем, что в этом втором случае выражения $\partial u_1/\partial y$ и $\partial u_1/\partial y_1$ будут содержать результаты последовательного применения операций дифференцирования и взятия разностей.

Третий способ интересен для перенесения на эти уравнения метода вариации произвольных постоянных. В этом случае исходным является уравнение $u\left(x, y, \frac{dy}{dx}, a(x)\right) = 0$, причем $a(x) = a(x_1)$.

Одним из истоков возникновения уравнений со смешанными разностями явилось стремление синтезировать результаты математического анализа и исчисления конечных разностей.

В третьем томе не раз упоминавшегося «Трактата по дифференциальному и интегральному исчислению» С. Лакруа (изд. 2, Париж, 1819), содержащем превосходное изложение исчисления конечных разностей и специальную главу об уравнениях со смешанными разностями, это стремление высказано уже со всею определенностью.

Другой источник был связан с отдельными задачами геометрии и физики малых колебаний. В этом отношении должны быть отмечены не только исследования Кондорсе 1771 г., но и значительно более ранняя работа И. Бернулли (1728) о колебаниях струны.

В заключение отметим, что уравнения со смешанными разностями образуют простейший класс так называемых дифференциально-функциональных уравнений, т. е. таких уравнений, где производные неизвестной функции и сами функции входят при разных значениях аргумента.

Для пояснения рассмотрим простейший пример: пусть

$$\frac{dy}{dx} = f(x, \Delta y),$$

где $\Delta y = y(x+h) - y(x)$. Заменяя значение Δy, получаем

$$\frac{dy}{dx} = f[x, y(x+h) - y(x)].$$

В более общем случае имеют, например, уравнение

$$\frac{dy(x)}{dx} = f[x, y(x), y(x+\tau(x))],$$

где $\tau(x)$ — заданная функция, определяющая отклонение аргумента. При $\tau(x) < 0$ имеют уравнение с запаздывающим аргументом, при $\tau(x) > 0$ — с опережающим. В динамике к уравнениям с запаздыванием приходят в том случае, если скорость или ускорение зависят от более раннего состояния системы. Эти уравнения весьма важны и в современной теории автоматического регулирования, поскольку при автоматическом регулировании любой системы неизбежно некоторое запаздывание на сигналы управления. Методы решений дифференциальных уравнений с запаздывающими аргументами интенсивно разрабатываются в наше время.

СЕДЬМАЯ ГЛАВА

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Структура и особенности анализа в XVIII в.

Заканчивая второй том, мы привели слова Лейбница, в которых он выражал надежду еще в XVII в. довести до завершения, по крайней мере в главном, «анализ чисел и линий», с тем чтобы сосредоточить усилия человеческого разума на физике (см. т. II, стр. 287). Так Лейбниц писал в 1691 г., т. е. всего через семь лет после выхода в свет знаменитого мемуара по дифференциальному исчислению. Прошло немного времени, и Лейбниц убедился, что до завершения анализа очень далеко. В 1708 г. он уже предупреждал: «Не следует удивляться, что анализ бесконечно малых делает только первые шаги и что мы совсем не хозяева положения ни в квадратурах, ни еще менее в обратной задаче касательных и, в еще меньшей мере, при решении дифференциальных уравнений. . .»[1]. И в самом деле, все XVIII столетие прошло в постоянном распространении и обогащении математического анализа, в значительной мере обусловленном запросами механики и затем математической физики, особенно теории колебательных процессов.

Мы уже отмечали некоторые характерные черты развития математического анализа в рассматриваемое время. Одной из них было его разветвление на несколько наук — отделение от основного ствола, дифференциального и интегрального исчисления, новых больших отделов — теории дифференциальных уравнений, в свою очередь расчленившейся на учение об обыкновенных дифференциальных уравнениях и уравнения с частными производными, вариационного исчисления, теории специальных функций, начал теории функций комплексного переменного. Выделяется также, хотя это не нашло внешнего выражения в тогдашней терминологии (так долго обстояло дело и с дифференциальными уравнениями), учение о бесконечных рядах. В рамках дифференциального и интегрального исчисления в качестве нового отдела вырастает анализ функций многих переменных.

Другой особенностью анализа XVIII в. являлось его постепенное преобразование в науку, принципиально независимую от геометрии и механики, а в смысле общности и абстрактности своих идей им предшествующую. Мы видели, что еще анализ бесконечно малых Ньютона и Лейбница нес яркую печать своей кровной связи с механикой и геометрией. Это относится не только к основным понятиям флюенты, флюксии и мо-

---

[1] Цит. по публикации: *P. Costabel.* De Scientia infiniti. In: Leibniz. Aspects de l'Homme et de l'Oeuvre. Paris, 1968, p. 115.

мента или же дифференциала и интеграла, но и к математическому мышлению в целом, которое часто обращалось к пространственным или физическим представлениям и аналогиям, как к средству вывода и обоснования. Конечно, у обоих основоположников исчисления бесконечно малых, особенно у Лейбница, уже отчетливо намечалась и тенденция к его трактовке, как самостоятельной, собственно аналитической науки. В XVIII в. эта тенденция становится господствующей. Понятия анализа все более выступают как своего рода алгебраические формы, обладающие прежде всего арифметическим содержанием, а некоторые соответствующие геометрические или физические представления (например, наклон касательной или скорость) — лишь как их конкретные интерпретации. Этот процесс алгебраизации и арифметизации, особенно усилившийся в XIX в., имел величайшее значение для дальнейшего развития математики в целом.

Становление анализа как самостоятельной науки отразилось на содержании основных монографий и учебных руководств. Лекции по дифференциальному и интегральному исчислению И. Бернулли и учебник дифференциального исчисления Лопиталя, составленные в конце XVII в., включали очень небольшое число аналитических понятий, обычно поясняемых на чертежах, и очень ограниченный запас общих теорем и правил, но зато множество геометрических и физических, более всего — механических или оптических, задач (см. т. II, стр. 267—270, 284—285). Первый том «Введения в анализ бесконечных» (1748) Эйлера, так же как его курсы дифференциального исчисления (1755) и интегрального исчисления с теорией дифференциальных уравнений (1768—1770), были изложены чисто аналитически и в них отсутствовали какие-либо геометрические и механические интерпретации или приложения (ср. стр. 246). Поучительно в этом отношении сравнить и построение первого курса вариационного исчисления «Метода нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума или минимума» (1744) Эйлера, где геометрические представления играли существенную роль, как это видно из названия труда, с чисто аналитическим изложением предмета в более поздних мемуарах Лагранжа и того же Эйлера, опубликованных в 60-е годы (ср. гл. X). Строго аналитически построена была и «Теория аналитических функций» (1797) Лагранжа, где приложения к геометрии и механике были выделены особо (см. стр. 285). Как говорилось в первой главе, начиная с 30-х годов XVIII в., сама теоретическая (аналитическая) механика превращается в своеобразный отдел анализа, который в конце концов выдвигается как универсальный метод исследования природы. Лаплас был уверен в принципиальной возможности — для бесконечного разума — выразить дифференциальными уравнениями все законы мира (см. стр. 9). Фурье в своей «Аналитической теории тепла» (Théorie analytique de la chaleur. Paris, 1822) заявил: «Математический анализ столь же обширен, как и сама природа; он определяет все чувственные отношения, изменяет времена, пространства, силы, температуры» [1].

Это изменение положения анализа среди других математических наук сопровождалось переоценкой, точнее сказать, обесценением доказательств, состоящих в обращении к интуитивно-физической или геометрической наглядности. Правда, Маклорен в «Трактате о флюксиях» (1742) еще исходил из аксиом механического характера, но большинство математиков следовало иному пути. Даламбер счел нужным освободить метод

[1] *J. B. Fourier.* Oeuvres, v. I. Paris, 1888, p. XXIII.

пределов Ньютона от понятий движения и скорости, принадлежащих менее отвлеченной, чем анализ, науке — механике. Во введении к «Теории аналитических функций» Лагранж, в противоположность Ньютону и Маклорену, подчеркивал, что «вводить в исчисление, имеющее предметом только алгебраические величины, движение, значит вводить в него чужеродную идею», и добавлял: «мы отнюдь не обладаем достаточно четким понятием о том, что есть скорость точки в любое мгновение, в случае когда скорость переменная»[1]. Для Ньютона производная какой-либо величины была скорость ее течения, для Лагранжа скорость изменения величины — ее производной по времени.

Впрочем, ученые XVIII в. не питали какого-либо недоверия к механической или геометрической интуиции, ограниченность которой обнаружилась много позднее. В безусловном существовании таких величин, как площадь или длина непрерывной кривой и других, аналогичных, никто не сомневался. Некоторые математики по-прежнему считали правомерным доказывать аналитические предложения с помощью обращения к пространственным представлениям. Так, С. Е. Гурьев (1811) и французский ученый, особенно известный своими работами по механике, Л. Пуансо (1815) доказывали существование производной (непрерывной) функции всюду, за исключением, быть может, отдельных значений аргумента, ссылаясь на «очевидное» наличие касательной к (непрерывной) плоской кривой во всех ее точках, за исключением, быть может, отдельных точек, где касательная не определена или образует прямой угол с осью абсцисс. И все же геометрическая аргументация, как таковая, удовлетворяла далеко не всех. Так, выдающийся французский математик и физик А. М. Ампер предпринял попытку аналитически доказать дифференцируемость, вообще говоря, непрерывной функции (1806). Другое доказательство, принадлежащее французскому математику Ж. Ф. М. Бине, привел в своем курсе анализа Лакруа.

Ярко и последовательно выразил убеждение в необходимости самостоятельного обоснования анализа знаменитый чешский мыслитель Бернард Больцано (1781—1848), последний в ряду великих математиков-любителей. Философ и богослов по образованию, Больцано в течение пятнадцати лет с 1805 г. занимал в Пражском университете кафедру истории религии. В 1820 г. власти навсегда отстранили его от преподавания за пропаганду свободомыслия в общественных и религиозных вопросах. Свою концепцию математики и, в частности, анализа Больцано высказал в брошюре, посвященной доказательству того свойства непрерывной функции одного переменного, что при перемене знака она по крайней мере один раз принимает нулевое значение. Полное название этого небольшого, но чрезвычайно богатого новыми идеями сочинения таково: «Чисто аналитическое доказательство теоремы, что между любыми двумя значениями, дающими результаты противоположного знака, лежит по меньшей мере один действительный корень уравнения» (Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwei Werten, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reele Wurzel der Gleichung liege. Prag, 1817).

По времени брошюра Больцано выходит за границы рассматриваемой нами эпохи, и мы не можем здесь разбирать самое доказательство, для которого автору потребовалось ввести новое, современное определение

[1] *J. L. Lagrange*. Théorie des fonctions analytique. Paris, 1813, p. 3.

непрерывной функции, теорему о верхней грани (так называемую теперь теорему Больцано — Вейерштрасса) и общий признак сходимости последовательности (так называемый критерий Больцано — Коши). Мы коротко остановимся только на общей установке этого труда, великолепно выразившего основные тенденции реформы анализа, подготовленной его развитием в XVIII в., но осуществленной лишь в XIX столетии.

Перечисляя многочисленные доказательства теоремы, которой посвящен его труд, среди них Кестнера, Клеро, Лакруа и Лагранжа, Больцано разделяет их на две группы. Доказательства одной группы основаны на представлении, что непрерывная линия, чьи ординаты сперва положительны, а затем отрицательны (или наоборот), должна пересекать ось абсцисс в какой-либо точке между этими ординатами. В другой группе доказательств дело сведено к рассмотрению прямолинейного движения двух тел, из которых одно сначала находится позади другого, а затем впереди, так что первое в какой-то момент проходит мимо второго. Соглашаясь с очевидностью таких геометрических или механических положений, Больцано писал: «Но столь же очевидно также, что нетерпимым нарушением хорошего метода является, когда истины чистой (или общей) математики (т. е. арифметики, алгебры или анализа) желают вывести из соображений, которые принадлежат только прикладной (или частной) ее части, а именно геометрии... Подобное геометрическое доказательство, как в большинстве случаев, так и в настоящем, составляет настоящий круг. Ибо, хотя геометрическая истина, на которую здесь ссылаются..., вполне очевидна, а значит не нуждается в доказательстве для уверения, она тем не менее нуждается в обосновании» [1]. Эта истина не принадлежит к числу «простых» или «основных», но есть «производная истина» или теорема, «объективное обоснование» которой и состоит в том общем свойстве непрерывных функций, о котором идет речь. Совершенно сходно отвергает Больцано методологическое и логическое значение механических доказательств, ибо «понятие *времени*, а тем более *движения* столь же чужеродно в общей математике, как и понятие пространства» [2].

Программная по существу брошюра Больцано не привлекла внимания, какого заслуживала (хотя возможно, что она не осталась без влияния на формирование взглядов Коши), а многие другие свои замечательные открытия в теории функций действительного переменного он изложил в рукописях, прочитанных только через несколько десятков лет. Но одновременно с Больцано к реформе анализа на тех же началах приступили Гаусс и Коши. При этом как раз Коши, который не только применял свои идеи в специальных работах, как Гаусс, но и распространял их с кафедры и в целом ряде возникших из лекций печатных курсов, особенно содействовал реформе, за которой во второй половине XIX в. необходимо последовала более глубокая арифметизация анализа, т. е. сведение в конечном итоге его понятий и их отношений к свойствам множества натуральных чисел. Принципиальное значение имело при этом построение на рубеже 60-х и 70-х годов новых теорий действительного числа. В ходе теоретико-функциональных исследований выяснилось, что в ряде фун-

---

[1] См. *Э. Кольман.* Бернард Больцано. М., 1955, стр. 171—172 (в этой книге помещен полный русский перевод цитируемой брошюры Больцано.)
[2] Там же, стр. 173.



Б. Больцано
(с литографии И. Крихубера, сделанной в 1849 г.
по портрету Г. Гольпейна 1839 г.; хранится в Архиве
Австрийской национальной библиотеки

даментальных вопросов внушаемые всем со школьной скамьи геометрические представления отказываются служить и могут даже ввести в заблуждение. Так, около 1870 г. Вейерштрасс построил пример непрерывной и вместе с тем нигде не дифференцируемой на отрезке функции, т. е. непрерывной плоской кривой, ни в одной точке некоторой дуги не имеющей определенной касательной. Подобные конструкции были невообразимы и немыслимы для разума, опиравшегося только на привычную пространственную интуицию [1].

Наконец, третьей особенностью анализа XVIII в. было, как выразился в предисловии к своему введению в дифференциальное и интегральное исчисление — «Алгебрическому анализу» (Analyse algèbrique. Paris, 1821) Коши, недостаточно осмотрительное употребление «наведений» и «суждений, извлекаемых из алгебраического обобщения», постоянная готовность «дать безграничный простор алгебрическим формулам, между тем как в действительности большая часть этих формул справедлива только

---

[1] На сорок лет ранее другой такой пример построил Больцано, но он долгое время оставался никому, в том числе Вейерштрассу, не известным. Сам Больцано доказал недифференцируемость построенной им функции на некотором всюду плотном множестве точек.

при известных условиях и то для некоторых значений количеств, в них заключающихся» [1]. Как в арифметике и алгебре первоначально механически распространяли свойства целых чисел на дроби, положительных чисел — на отрицательные и действительных чисел — на мнимые, так и в анализе формально переносили свойства конечных выражений на бесконечные, сходящихся рядов на расходящиеся, интегралов непрерывных функций на несобственные и т. д. Сравнивая положение дел в конце XVII и в XVIII вв., А. Н. Колмогоров пишет: «Если при создании анализа бесконечно малых сказывалось неумение логически справиться с идеями, имевшими полную наглядную убедительность, то теперь открыто проповедуется право вычислять по обычным правилам с лишенными непосредственного смысла математическими выражениями, не опираясь ни на наглядность, ни на какое-либо логическое оправдание законности таких операций» [2].

Грубых ошибок при этом обычно избегали, руководясь чутьем, но иногда наталкивались на противоречия и парадоксы, вызывавшие попытки устранить первые и объяснить вторые. Несмотря на преобладающий формальный подход к разработке и применению аппарата анализа, в XVIII в. широко велось также изучение его оснований. И хотя окончательные результаты получить здесь не удалось, но были существенно подготовлены как реформа, начатая Больцано, Гауссом и Коши, так и некоторые еще более поздние исследования, например в теории суммирования расходящихся рядов.

Руководства Эйлера по анализу

Первое место в разработке дифференциального и интегрального исчисления, как и всего анализа в целом, принадлежало в течение почти пятидесяти лет рассматриваемой эпохи Эйлеру. Его шеститомная трилогия (один том которой мы подробно рассмотрели ранее) имела особенное значение в математическом образовании нескольких поколений ученых. В ней он оригинально переработал огромную сумму знаний во всех отделах анализа, в ней, как впрочем, и в других работах, поставил целый ряд проблем, долгое время продолжавших привлекать внимание современников и потомства. Очень значительная часть изложенных в трилогии результатов принадлежала при этом самому Эйлеру. Ранее других вышло «Введение в анализ бесконечных» (Introductio in analysin infinitorum, t. 1—2, Lausannae, 1748). Первый том «Введения в анализ бесконечных» содержит изложение теории функций без средств дифференциального исчисления — общие вопросы и исследование основных классов элементарных функций с широким применением бесконечных рядов, произведений и непрерывных дробей; второй том — аналитическую и алгебраическую геометрию (см. гл. V). Впрочем, в первом томе рассматриваются также некоторые задачи теории чисел (см. гл. III), а во втором продолжается разбор понятия функции и исследуются некоторые трансцендентные кривые. Через семь лет в Берлине увидело свет «Дифференциальное исчисление» (Institutiones calculi differentialis, 1755) в двух частях: в первой было изложено само исчисление в узком смысле слова, а во второй —

[1] *О. Л. Коши.* Алгебраический анализ. Перевод Ф. Эвальда, В. Григорьева, А. Ильина. Лейпциг, 1864, стр. VI.

[2] *А. Н. Колмогоров.* Математика. Большая советская энциклопедия. Изд. 2, т. 25, стр. 474.

его применение к теории рядов, алгебраических и трансцендентных уравнений, разысканию экстремумов и (предельных) значений неопределенных выражений, а также к некоторым другим вопросам. Геометрическим приложениям дифференциального исчисления Эйлер предполагал посвятить отдельную монографию, но написал лишь часть ее, изданную посмертно (1862). Наконец, почти пятнадцать лет спустя появилось «Интегральное исчисление» (Institutiones calculi integrali, v. 1—3. Petropoli, 1768—1770). Содержание этого руководства гораздо шире, чем говорит теперешнему читателю его название. Интегрирование функций одного переменного (опять-таки без приложений в геометрии) составляет лишь первый раздел и небольшую часть второго раздела первого тома; второй же раздел отведен интегрированию обыкновенных дифференциальных уравне-

Титульный лист первого тома
«Введения в анализ бесконечных» Л. Эйлера (Лозанна, 1748)

INTRODUCTIO

IN ANALYSIN

INFINITORUM.

AUCTORE

LEONHARDO EULERO,

Professore Regio Berolinensi, & *Academiæ Imperialis Scientiarum* Petropolitanæ *Socio.*

TOMUS PRIMUS.



LAUSANNÆ,

Apud Marcum-Michaelem Bousquet & Socios.

MDCCXLVIII.

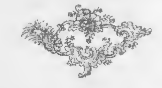
ний первого порядка. Во втором томе рассмотрены уравнения высших порядков и в третьем томе — уравнения с частными производными. В третьем же томе, в специальном большом приложении по-новому изложено, в развитие идей Лагранжа, вариационное исчисление, которому Эйлер за четверть века до того посвятил свой основоположный «Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума, либо минимума, или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле» (1744; см. гл. X).

Трилогия Эйлера явилась основой последующих руководств и преподавания. И хотя в изложение многих вопросов были затем внесены радикальные изменения, ее влияние заметно даже в учебниках нашего

Титульный лист «Дифференциального исчисления» Л. Эйлера (1755)

INSTITUTIONES
CALCULI
DIFFERENTIALIS
CUM EIUS VSU
IN ANALYSI FINITORUM
AC
DOCTRINA SERIERUM

AUCTORE
LEONHARDO EULERO
ACAD. REG. SCIENT. ET ELEG. LITT. BORUSS. DIRECTORE
PROF HONOR. ACAD. IMP. SCIENT. PETROP. ET ACADEMIARUM
REGIARUM PARISINAE ET LONDINENSIS
SOCIO.



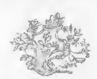
IMPENSIS
ACADEMIAE IMPERIALIS SCIENTIARUM
PETROPOLITANAE
1755.

времени. Успех книг Эйлера объяснялся как богатством содержания, так и замечательным порядком, простотой и ясностью (в рамках тогдашних требований к строгости) изложения, всегда поясняемого превосходными многочисленными примерами. Для Эйлера было характерно такое освещение вопроса, при котором читатель как бы соучаствует с автором в его решении, вместе преодолевая встречающиеся попутно трудности. Чтение руководств Эйлера не утрачивает познавательной ценности и в наши дни. Это особенно относится, пожалуй, к первому тому «Введения в анализ бесконечных». Здесь молодой любитель математики может познакомиться в легко доступной и увлекательной форме со многими интереснейшими задачами, которые при их современной трактовке требуют глубокой специальной подготовки.

Титульный лист первого тома «Интегрального исчисления» Л. Эйлера (Петербург, 1768)

INSTITVTIONVM
CALCVLI INTEGRALIS
VOLVMEN PRIMVM
IN QVO METHODVS INTEGRANDI A PRIMIS PRINCIPIIS VSQVE AD INTEGRATIONEM AEQVATIONVM DIFFERENTIALIVM PRIMI GRADVS PERTRACTATVR.

AVCTORE
LEONHARDO EVLERO
ACAD. SCIENT. BORVSSIAE DIRECTORE VICENNALI ET SOCIO
ACAD. PETROP. PARISIN. ET LONDIN.



PETROPOLI
Impensis Academiae Imperialis Scientiarum
1768.

Развитие понятия функции

В предисловии к «Введению в анализ бесконечных» Эйлер впервые отчетливо выразил ту мысль, что анализ есть общая наука о функциях, что, как он писал, «весь анализ бесконечных вращается вокруг переменных количеств и их функций» [1].

Мы знаем, что И. Бернулли определил функцию как количество, составленное каким угодно способом из переменной и постоянных (см. т. II, стр. 147). В первой главе первого тома «Введения в анализ бесконечных» Эйлер, уточняя определение своего учителя, подчеркнул, что функции задаются формулами: «Функция переменного количества есть аналитическое выражение, составленное каким-либо образом из этого переменного и чисел или постоянных количеств» [2]. При этом делается шаг вперед принципиальной важности; независимая переменная рассматривается как совокупность всех действительных и мнимых чисел, так что функции комплексного переменного сразу вводятся на равных правах с функциями действительного переменного.

Но о каких способах составления аналитических выражений идет речь? Этот вопрос — в другой терминологии — возникал еще в XVII в. В V определении «Истинной квадратуры круга и гиперболы» (1667) Дж. Грегори писал, что одна величина называется составленной (compositum) из других, если получается из них с помощью четырех элементарных действий, извлечения корня или какой-нибудь другой мыслимой операции (quacunque imaginabili operatione); при этом он имел в виду переход к пределу последовательности (ср. т. II, стр. 151) [3]. Эйлер в добавление к приведенному определению называет алгебраические действия, из трансцендентных — показательную и логарифмическую операции и к ним присоединяет еще «бесчисленные другие, доставляемые интегральным исчислением» [4], подразумевая при этом и интегрирование дифференциальных уравнений (см. стр. 247). Далее Эйлер различает явные функции и неявные, зависящие от решения уравнений, и затем формулирует предложения о существовании обратной функции и функции, заданной параметрически (если y и x суть функции z, то y есть функция x и x есть функция y). Мы сейчас увидим, как все такие способы задания функций подводятся Эйлером под его первое определение, а пока отметим, что его классификация функций вся целиком вошла в употребление. В частности, функции делятся еще на однозначные и многозначные и выделяются классы четных и нечетных функций. В V главе рассмотрены функции многих переменных и, среди них, однородные функции.

В IV главе различные аналитические способы задания функций одного переменного Эйлер сводит к одному. Универсальной и наиболее удобной для выражения функций формулой объявляется, со ссылкой на всю практику вычислений, бесконечный степенной ряд вида

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \dots$$

---

[1] *Л. Эйлер*. Введение в анализ бесконечных, т. I. Перевод Е. Л. Пацановского под редакцией И. Б. Погребысского. М., 1961, стр. 19.
[2] Там же, стр. 24.
[3] *M. Dehn, E. Hellinger*. On James Gregory's Vera Quadratura. In: *James Gregory*. Tercentenary memorial volume. London, 1939, p. 477.
[4] *Л. Эйлер*. Введение в анализ бесконечных, т. I, стр. 25.

Впрочем, добавляет Эйлер, для большей общности утверждения нужно допустить любые (рациональные) показатели и тогда уже «не будет никакого сомнения в том, что всякая функция может быть преобразована в такое бесконечное выражение

$$Az^{\alpha} + Bz^{\beta} + Cz^{\gamma} + Dz^{\delta} + \ldots,$$

где показатели α, β, γ, δ и т.д. обозначают любые числа» [1]. Действительно, перечисленные Эйлером ранее операции, да и подавляющее большинство других известных тогда способов задания зависимостей, приводят к функциям, аналитическим во всей области их существования, кроме, быть может, отдельных случаев, когда они раскладываются в ряд по дробным или отрицательным степеням аргумента. Мы применили здесь слово «аналитический», которым в XVIII в. называли любые функции, употребительные в анализе (см. стр. 285), в нашем современном смысле: теперь аналитической называют функцию, представимую в области ее существования степенным рядом с натуральными показателями.

Однако, когда Эйлер писал первый том «Введения в анализ бесконечных», он уже знал, что в математике встречаются и не «аналитические» функции. В начале второго, геометрического тома, где естественно речь идет о функциях действительного переменного, плоские кривые и соответственно функции одного переменного подразделяются на непрерывные (continuae) и разрывные (discontinuae) или смешанные (mixtae). Эта терминология имела смысл, отличный от современного. Эйлер называл непрерывной линию или функцию, заданную во всей области определения одним и тем же аналитическим выражением, а разрывной или смешанной — линию, состоящую из дуг нескольких различных кривых, заданных каждая различными выражениями. Непрерывность означала, таким образом, неизменность аналитического закона, определяющего функцию или линию. В таком понимании две ветви гиперболы $y = 1/x$ с бесконечным разрывом при $x = 0$ образуют непрерывпую линию (пример самого Эйлера), между тем как два встречающихся в начале координат луча с уравнениями $y = -x$ при $x < 0$ и $y = x$ при $x > 0$ составляют разрывную линию (ср. стр. 252). Класс функций, непрерывных в смысле Больцано — Коши, Эйлер особо не выделил и его свойства не исследовал, хотя в отдельных случаях, например, излагая методы приближенного интегрирования, учитывал непрерывность и наличие разрывов в этом современном смысле (см. стр. 346).

Различение непрерывных и разрывных функций основывалось у Эйлера на убеждении, которое разделяли и другие математики того времени, что задание непрерывной функции в каком-либо промежутке однозначно определяет ее значение повсюду. В статье «Об употреблении разрывных функций в анализе» (De usu functionum discontinuarum in analysi. Novi Commentarii, (1765) 1767) он писал, что все части непрерывных кривых соединены между собой теснейшим образом, так что ни в одной из частей не может произойти изменения без нарушения связи непрерывности. С другой стороны, все были убеждены, что совокупность функций, заданных в различных промежутках различными уравнениями, нельзя выра-

---

[1] *Л. Эйлер.* Введение в анализ бесконечных, т. I, стр. 67. Это утверждение, восходящее к Ньютону и Лейбницу (см. т. II, стр. 227 и 265), выражало общую точку зрения математиков XVIII в. Напомним, что почти одновременно с Эйлером его высказал Даламбер (стр. 73).

зить одним аналитическим законом. И в этой же статье Эйлер указывал, что обыкновенно в анализе и в высшей геометрии имеют дело с непрерывными функциями, но в недавно открытом и еще мало разработанном интегрировании уравнений с частными дифференциалами дело обстоит иначе.

К расширенному пониманию функции Эйлер пришел еще в «Методе нахождения кривых линий» (1744), где ему понадобилось произвольно варьировать экстремальные линии на сколь угодно малых участках (см. стр. 459). Но с особенной ясностью необходимость в разрывных функциях обнаружилась при исследовании задачи о малых плоских колебаниях струны, которой Эйлер, вслед за Даламбером, занялся в конце 40-х годов. Задача выражается уравнением $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, общее решение которого Даламбер получил в виде суммы произвольных функций $y = f_1(x + at) + f_2(x - at)$. В конкретных случаях эти функции определяются по начальной форме струны и начальным скоростям ее точек. Эйлер считал, что эта форма, как и распределение скоростей, могут быть графически представлены любыми (кусочно-гладкими) кривыми, какие только можно вообразить себе начерченными «свободным влечением руки». А такие произвольные линии — разрывные, так как их нельзя, вообще говоря, выразить с помощью какого-либо одного аналитического уравнения,— даже в таком простом случае, когда в начальном положении струна, защемленная в средней точке, оттянута от прямолинейного состояния и имеет форму ломаной из двух отрезков. Более того, произвольная кривая может и не состоять из конечного числа дуг непрерывных линий.

Эту мысль Эйлер высказал в статье «О колебании струны», представленной им Берлинской академии в мае 1748 г. (Nova Acta Eruditorum, 1749; Mém. Ac. Berlin, (1748) 1750); она естественно распространялась и на другие задачи математической физики. Даламбер, в отличие от Эйлера, полагал, что допустимые начальные условия и соответственно решения уравнений с частными производными должны быть ограничены значительно более узким классом функций. Вспыхнувший между Даламбером и Эйлером спор вскоре осложнился выступлением Д. Бернулли, который предложил, исходя из физических соображений и принципа колебаний, общее решение задачи в виде тригонометрического ряда (1755). Д. Бернулли утверждал, что любая плоская кривая может быть выражена рядом по синусам, с чем не согласились ни Даламбер, ни Эйлер. Вслед за этим в знаменитом споре о струне приняли участие почти все крупные математики второй половины XVIII в. (см. стр. 416 и след.). Эйлер оставался на своих позициях до конца. В третьем томе «Интегрального исчисления» (1770), содержащем методы интегрирования уравнений с частными производными, он писал: «в то время как прежде рассмотренные интеграции давали только непрерывные функции, в данном случае в анализе появляются также разрывные функции, что до сих пор многим видным математикам представляется противоречащим его принципам. Особенная сила интеграций, рассматриваемых в этой книге, в том и состоит, что при них могут встречаться и разрывные функции; так что надо полагать, что благодаря этому существенно новому исчислению границы анализа значительно расширяются» [1].

Спор об объеме понятия функции и о классах функций, выразимых как суммы степенных или тригонометрических рядов или с помощью

[1] *Л. Эйлер.* Интегральное исчисление, т. III. Перевод Ф. И. Франкля. М., 1958, стр. 28.

еще каких-либо других операций анализа, имел чрезвычайное значение для развития оснований математики. К нему восходит развитие теории рядов Фурье, обобщения понятия интерала и вообще значительная часть теории функций действительного переменного. Мы еще вернемся к некоторым из выдвинутых в ходе дискуссий вопросов, которые были точнее поставлены и удовлетворительно решены только в XIX и XX вв., здесь же добавим только следующее.

Настаивая на необходимости расширения понятия функции, Эйлер был прав. Но он ошибался, думая, что функции, заданные в каком-либо промежутке несколькими различными формулами, не могут быть выражены в нем одной формулой. Впервые на это обратил внимание Жак Шарль, который показал, что функцию, определенную двумя или большим числом частных законов, скажем ту же ломаную, составленную из отрезков двух прямых, можно всегда выразить также одним общим законом (Mém. de math. et de phys. présentés par divers savants, 1785). Позднее, в 1807 г. Фурье показал, что разрывные, по Эйлеру, функции можно бывает (на любом конечном промежутке) представить одним аналитическим выражением — тригонометрическим рядом (ср. стр. 317). Тем самым разделение функций на непрерывные и смешанные, в смысле Эйлера, утрачивало значение. Если ограничиться рассмотрением функций на конечном промежутке, то и любая проведенная «свободным влечением руки» гладкая кривая без вертикальных касательных представима рядом Фурье, ибо такая кривая соответствует непрерывной функции с ограниченной и кусочно-непрерывной производной. Правда, произвольная непрерывная в данном промежутке непрерывная функция непредставима, вообще говоря, ее рядом Фурье, который может расходиться на этом промежутке в бесконечном множестве точек. Зато такая функция может быть представлена суммой равномерно сходящегося к ней ряда целых многочленов,— это доказал Вейерштрасс (1885). И вместе с тем Эйлер был опять-таки прав, утверждая, что его разрывная функция не выражается в общем случае степенным рядом: ведь функция, непрерывная в смысле Больцано — Коши и дифференцируемая, вообще говоря, неаналитическая.

Любопытно, что Эйлеру были известны примеры функций, выраженных одной формулой, но нигде не аналитических. Еще в переписке 1727—1728 гг. с И. Бернулли и затем во втором томе «Введения в анализ бесконечных» (1748) он рассмотрел функцию $y = (-1)^x$, график которой состоит из бесчисленного множества точек, лежащих всюду плотно на прямых $y = -1$ и $y = 1$, но, как он выражался, нигде не смежных (функция принимает действительные значения только при значениях x, равных несократимой дроби с нечетным знаменателем) [1]. Впрочем, такие парадоксальные, по выражению самого Эйлера, случаи в то время не беспокоили математиков, ибо не играли в их творчестве сколько-нибудь заметной роли.

Произведенное Эйлером выделение аналитических функций явилось событием величайшей важности, и мы увидим, что еще в XVIII в. были обнаружены некоторые основные их свойства. Одно из них, свойство единственности, было упомянуто выше. В XIX в. было доказано, что аналитическая функция определяется во всей области ее аналитичности, если заданы ее значения в каком бы то ни было промежутке (свойством единственности обладают и так называемые квазианалитические функции).

[1] *Л. Эйлер.* Введение в анализ бесконечных, т. II, стр. 275—276.

Итак, определение функции, данное в первом томе «Введения в анализ бесконечных», оказалось слишком узким для анализа в целом. Это побудило Эйлера дать другое, более общее определение, которое, впрочем, он использовал уже ранее. Речь идет о концепции функции, как произвольно заданного соответствия между элементами множеств значений двух переменных величин, концепции, существовавшей издавна, но никогда еще отчетливо не сформулированной, поскольку в ней не нуждались. В первой главе «Введения в анализ бесконечных» Эйлер несколько раз обращается к исследованию свойств функций, аналитическое выражение которых заранее неизвестно, как в случаях функции обратной для данной, неявной функции или функции, заданной параметрически. Рассуждения, с помощью которых Эйлер обосновывает при этом существование функции в этих случаях, вовсе нестроги, но в данной связи интересно, что функция в них выступает просто как некоторое соответствие. Аналогично обстоит дело во второй и третьей главах, где разъясняется, что одна и та же функция может быть представлена с помощью бесконечного числа различных преобразуемых друг в друга аналитических выражений; общий субстрат всех этих выражений есть некоторое соответствие между элементами числовых множеств.

Свое новое определение функции Эйлер сформулировал в предисловии к «Дифференциальному исчислению» (1755): «Когда некоторые количества зависят от других таким образом, что при изменении последних и сами они подвергаются изменению, то первые называются функциями вторых. Это наименование имеет чрезвычайно широкий характер; оно охватывает все способы, какими одно количество может определяться с помощью других» [1]. В цитированном определении ничего не говорится о способе вычисления значений функции. Лакруа в своем курсе анализа специально подчеркнул, что этот способ может и не быть известен: «Всякая величина,— писал он,— значение которой зависит от одной или нескольких других величин, называется их функцией, независимо от того, известны или неизвестны действия, с помощью которых следует от последних переходить к первой» [2]. Таким образом, классические определения функции, данные Н. И. Лобачевским (1834) и П. Лежен-Дирихле (1837), из которых второе перешло в позднейшие руководства, преемственно связаны с дефиницией, принадлежащей Эйлеру. Но математики рассматриваемого времени были далеки от мысли о тех особенностях в поведении функций, какие были обнаружены позднее, и, например, они считали само собой разумеющимся, что любая функция имеет на конечном интервале только конечное число максимумов и минимумов [3].

Новое определение функции, ничем не ограничивающее в принципе способ ее задания, удовлетворяло возросшим потребностям анализа, в котором все чаще встречались зависимости, аналитически не выраженные или даже, быть может, невыразимые. Это определение впоследствии оказалось логически уязвимым. Еще Г. Ганкель в 1870 г. отмечал чисто номинальный характер формулировки Дирихле, в которой ничего не говорится о том, как может быть установлено правило или закон соответствия между значениями функции и аргумента. Современный математико-логи-

[1] *Л. Эйлер.* Дифференциальное исчисление. Перевод, статья и примечания М. Я. Выгодского. М.—Л., 1949, стр. 38.
[2] *S. F. Lacroix.* Traité du calcul différentiel et du calcul intégral, t. 1. Éd. 2. Paris, 1810, p. 1.
[3] Ср. там же, стр. 241.

ческий анализ выявил трудности, кроющиеся в таком номинальном и вместе с тем претендующем на безграничную всеобщность определении. При всем том оно сыграло в истории математики положительную роль, раскрывая, казалось бы, безбрежный простор для все более сложных и смелых конструкций теории функций действительного переменного конца XIX и начала XX в., о которых и не думали Эйлер и его ближайшие преемники.

Проблемы обоснования анализа

Разработка инфинитезимальных методов всегда сопровождалась исследованием их логической правомерности и применяемых в них основных понятий. Во втором томе мы видели, что уже вскоре после выхода в свет мемуара Лейбница о «Новом методе» (1684) ему пришлось встать в защиту дифференциального исчисления от критики со стороны Б. Нивентейта (1695), который не замедлил выступить с контрвозражениями (1696), ставшими затем предметом обстоятельного разбора в «Ответе на вторые замечания по поводу принципов дифференциального исчисления Нивентейта» (Responsio ad ... B. Nieuwentijt considerationes secundas circa calculi differentialis principia editas. Basileae, 1701) Я. Германа. Мы упоминали там и о происходившей на рубеже XVII и XVIII вв. в Парижской академии наук дискуссии, главными участниками которой явились М. Ролль и П. Вариньон (см. т. II, стр. 281—282). Споры по этим вопросам, достигавшие порой высокого накала страстей, велись в печати, устно и в переписке. Метод флюксий, восторжествовавший в Англии, при жизни Ньютона не подвергался публичной критике,— от этого его некоторое время ограждал ставший почти непререкаемым авторитет автора «Математических начал» [1]. Первая треть XVIII в. прошла в области «метафизики исчисления бесконечно малых» (выражение Даламбера) довольно спокойно, если не считать отдельных споров, относящихся к применению расходящихся рядов, к которым мы обратимся позднее (стр. 300).

Вместе с тем ни метод пределов и флюксий Ньютона, ни дифференциальное исчисление Лейбница не находили единодушного признания. Едва-едва зарождающиеся или исчезающие начала текущих величин, мгновенные приращения, находящиеся на неуловимой грани между бытием и небытием, предельные значения отношений величин при их становлении нулями, систематические открытия точных результатов с помощью, казалось бы, неточных уравнений, возникающих при отбрасывании ничтожно малых величин, применение несравнимых величин (в смысле аксиомы Евдокса — Архимеда) — все это порождало недоумения, которые не могли долго оставаться скрытыми. Математики должны были снова обратиться к исследованию фундаментальных понятий и принципов анализа, особенно принципа замены инфинитезимальных величин им эквивалентными, выраженного в постулатах Иоганна Бернулли — Лопиталя (см. т. II, стр. 284). Особые хлопоты доставила та трудность, что дифференциал функции $y = f(x)$ мыслили и определяли как ее бесконечно малое приращение, но вычисляли как главную часть этого приращения, ли-

---

[1] Впрочем, высокий авторитет Ньютона не мог уберечь от неправильного словоупотребления и даже изложения основных идей теории флюксий в сочинениях целого ряда третьестепенных английских авторов, применявших, например, в одном и том же смысле термины бесконечно малое приращение или же момент и флюксия.

нейную относительно $\Delta x = dx$. Таким образом, одновременно принимали, что $dy = \Delta y$ $(= y'\Delta x + \varepsilon\Delta x)$ и $dy = y'\Delta x$.

Распространено мнение, что в XVIII в. уделяли мало внимания обоснованию анализа и что этот период, если воспользоваться крылатым выражением Ф. Клейна, был в развитии математики творческим, но не критическим. Представление это ошибочно. Математики того времени, в том числе самые выдающиеся, видели многие логические недостатки тогдашней системы анализа. Правда, инфинитезимальные процедуры нередко применялись слишком неосторожно, с точки зрения идеалов строгости, выработанных в следующем столетии, но это объяснялось не столько беззаботностью исследователей, сколько сравнительной безопасностью самих процедур в границах области изучавшихся тогда функций, почти без исключения аналитических. Вместе с тем, как мы увидим, математики XVIII в. оставались далеки от единодушия в философских вопросах анализа — единодушия, которое было достигнуто, казалось бы, навсегда в последней трети XIX в., но вскоре затем было вновь нарушено под напором ошеломляющих парадоксов теории множеств.

Карл Маркс, специально изучавший историю проблем обоснования анализа вплоть до Лагранжа, ярко обрисовал положение дел в первые десятилетия XVIII столетия в своих математических рукописях: «Итак, сами верили в таинственный характер новооткрытого исчисления, которое давало правильные (и притом в геометрическом применении прямо поразительные) результаты математически положительно неправильным путем. Таким образом, сами себя мистифицировали и тем более ценили новое открытие, тем более бесили толпу старых ортодоксальных математиков и вызывали с их стороны враждебные вопли, будившие отклик даже в мире неспециалистов и необходимые для прокладывания пути новому» [1]. Такие отклики раздались ровно через 50 лет после опубликования мемуара Лейбница о «Новом методе» в философском лагере.

«Аналист» Беркли

В 1734 г. английский философ, выдающийся представитель субъективного идеализма, епископ Джордж Беркли (1685—1753) выпустил памфлет, известный под сокращенным названием «Аналист». Беркли преследовал при этом не одни научные цели, но и стремился своей критикой принципов анализа подорвать влияние свободомыслящих ученых, указывавших на противоречия в принципах богословия,— считается, что брошюра была обращена к Э. Галлею. Вот полное заглавие сочинения: «Аналист или рассуждение, обращенное к неверующему математику, где исследуется, более ли ясно воспринимаются или более ли очевидно выводятся предмет, принципы и умозаключения современного анализа, чем религиозные таинства и догматы веры» (The Analyst: or, a discourse adressed to an infidel mathematician. Wherein it is examined whether the object, principles and inferences of the modern analysis are more distinctly conceived, or more evidently deduced, than religious mysteries and points of faith. London, 1734). Следует указать, что развиваемая здесь Беркли концепция математического финитизма следовала из его философской системы, которую он сам охарактеризовал афоризмом «существовать — значит быть воспринимаемым»,

[1] *К. Маркс.* Математические рукописи. М., 1968, стр. 169.

esse — percipi. Бесконечное, как чувственно невоспринимаемое, не существует ни в большом, ни в малом. С точки зрения Беркли, не обладала реальным бытием, например, одна десятитысячная часть дюйма, и тем более не могло быть речи о бесконечной делимости какой-либо протяженной величины. Эти идеи Беркли подробно развил еще в «Трактате о началах человеческого познания» (A treatise concerning the principles of human understanding. London, 1710), где в § 123—132 выражено и отношение автора к современной ему высшей математике.

Но каковы бы ни были философские предпосылки и идеологические цели Беркли, его «Аналист» содержал остроумную и во многом справедливую критику, и Ф. Кеджори не без основания сравнил его аргументацию с бомбардировкой математического лагеря.

Возражения Беркли были направлены в равной мере против метода флюксий и исчисления бесконечно малых. Метод анализа он считал несогласным с логикой и писал, что, «как бы он ни был полезен, его можно рассматривать только как некую догадку; ловкую сноровку, искусство или скорее ухищрение, но не как метод научного доказательства» [1]. Невозможно понять, что такое приращение текущих величин в самом начале их зарождения или исчезновения, «это ни конечные величины, ни бесконечно малые, ни даже ничто. Не могли ли бы мы их назвать призраками почивших величин?» [2] Невозможно, далее, представить себе мгновенную скорость, т. е. скорость в данное мгновение и в данной точке, ибо понятие движения включает понятия о (конечных) пространстве и времени. В предложенном Ньютоном выводе флюксии степенной функции x^n Беркли усматривал нарушение логики. Ведь сперва составляется отношение приращения функции $(x + o)^n - x^n$ к приращению аргумента o, т. е. $nox^{n-1} + \frac{n^2 - n}{2} o^2 x^{n-2} + \ldots$ к o или же $nx^{n-1} + \frac{n^2 - n}{2} ox^{n-2} + \ldots$ к 1, а затем принимается, что приращение исчезает, так что последнее предельное отношение оказывается равным отношению nx^{n-1} к 1. Однако, замечал Беркли, если при выводе какого-нибудь предложения принималось некоторое допущение, а в конце это допущение отвергается или заменяется противоположным, то все рассуждение теряет силу. «Когда он (Ньютон. — *Ред.*) говорит, пусть приращения исчезнут, т. е. пусть они станут ничем, т. е. пусть уже не будет приращений, то предыдущее допущение, что приращения были чем-то, что были приращения, отбрасывается, однако же последствия этого допущения, т. е. полученное в силу него выражение, сохраняются. Это... ложный способ рассуждения» [3]. И как вообще можно говорить об отношении между вещами, не имеющими величины? В этом возражении Беркли основывался на обычном в то время отождествлении понятий нуля и «ничего»; между тем нуль и равное нулю приращение существуют в такой же мере, как любое другое число и приращение, и представляют собой «нечто». Правда, Ньютон не разъяснил удовлетворительным образом, какой смысл надлежит приписывать неопределенному символу 0/0, который выражает отношение приращений флюенты и аргумента при их исчезновении, поскольку в его концепции переменные достигают своих предельных значений (см. т. II, стр. 242).

Как же с помощью анализа получаются правильные результаты? Беркли пришел к мысли, что это объясняется наличием в аналитических

---

[1] The Works of *G. Berkeley*, v. III. Ed. A. C. Fraser, London, 1901, p. 36.
[2] Там же, стр. 44.
[3] Там же, стр. 28.

выводах двух противоположных и взаимно уничтожающихся ошибок. Эту идею он пояснил на примере построения касательной TB в точке B параболы $y^2 = px$ (рис. 26), где $x = AP$, $y = PB$. В дифференциальном исчислении кривая рассматривается как многоугольник с бесконечным числом бесконечно малых сторон, а касательная как продолжение какой-либо такой стороны. В таком случае дуга BN, где N — точка, бесконечно близкая к B, есть прямой отрезок и треугольник TPB, где TP — подкасательная,

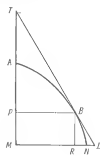


Рис. 26

подобен бесконечно малому треугольнику BRN, где $BR = PM = dx$ и $RN = dy$. Следовательно,

$$TP = y\,\frac{dx}{dy}. \qquad (1)$$

С другой стороны, по правилам дифференциального исчисления

$$pdx = 2ydy, \qquad (2)$$

так что

$$TP = \frac{2y^2}{p} = 2x. \qquad (3)$$

Точность последнего равенства не вызывала сомнений: еще древние греки доказали без употребления принципов дифференциального исчисления, что подкасательная к параболе $y^2 = px$ равна удвоенной абсциссе точки касания.

На самом деле, указывал Беркли, оба уравнения (1) и (2) неверны. Первое ложно потому, что треугольник TPB подобен не фигуре BRN, но треугольнику BRL, где L — точка пересечения продолженной касательной и продолженной ординаты кривой, точным же является уравнение

$$TP = \frac{ydx}{dy + z}, \qquad (1')$$

где $z = NL$. Ложно и уравнение (2), основанное на отбрасывании высших степеней дифференциалов, а точно уравнение

$$pdx = 2ydy + (dy)^2, \qquad (2')$$

и поэтому на самом деле

$$TP = \frac{ydx}{\frac{pdx}{2y} - \frac{(dy)^2}{2y} + z}. \qquad (3')$$

Однако уравнения (3) и (3′) совпадают, ибо $z = (dy)^2/2y$, как это следует из 33-й теоремы первой книги «Конических сечений» Аполлония, в которой синтетически доказано, что прямая, проходящая через точки B и T так, что $TA = AP$, касается параболы AB в точке B. Таким образом, заключал Беркли, благодаря двойной ошибке приходят если не к научному познанию, то к истине. Впоследствии некоторые крупные математики пришли к выводу, что компенсация ошибок составляет движущую силу анализа и является вместе с тем строго научным методом познания, об этом говорится далее.

По мнению Беркли, высказанному еще в философском трактате 1710 г., можно было бы вовсе обойтись без нового анализа. «При тщательном исследовании скажется,— писал он,— что ни в каком случае не необходимо пользоваться бесконечно малыми частями конечных линий или вообще количеств или представлять их себе меньшими, чем наименьшее ощущаемое» [1]. С таким заключением математики, разумеется, согласиться не могли, но «действительно им крайне необходимо было найти защиту от философски-теологически-юмористических атак знаменитого епископа Беркли» [2]. Недаром с ними пришлось считаться ученым такого ранга, как Маклорен и Эйлер.

Определение предела

«Аналист» Беркли немедленно вызвал многочисленные отклики и возражения, прежде всего в Англии, где в том же 1734 г. с защитой метода флюксий выступили секретарь Лондонского королевского общества любитель математики, по специальности врач, Джемс Джюрин (1684—1750) и дублинский преподаватель математики Джон Уолтон, которым Беркли ответил в брошюре «Защита свободомыслия в математике» (A defence of free-thinking in mathematics. Dublin. 1735). Вслед за тем в полемику вступил талантливый математик — самоучка Бенджамин Робинс (1707—1751), автор упоминавшегося ранее труда по артиллерии (ср. стр. 35) и изобретатель баллистического маятника. В «Рассуждении о природе и истинности методов флюксий, а также первых и последних отношений сэра Исаака Ньютона» (A discourse concerning the nature and certainty of sir Isaac Newtons methods of fluxions, and of prime and ultimate ratios, 1735) Робинса интересны определение предела и замечания о моментах величин. Робинс называет последней величиной или пределом переменной величины ту определенную величину, к которой «переменная может приблизиться с любой степенью близости, хотя она и не может никогда стать ей абсолютно равной» [3]. Затем доказываются предложения об отношении последних величин, когда сами переменные находятся в постоянном отношении, и о единственности последней величины (предела). Наряду с определением предела для величин дается отдельное определение последнего отношения для переменного отношения двух величин. В случае первого определения Робинс замечает, что к нему подходили еще Л. Валерио и А. Таке (ср. т. II, стр. 131—134); второе определение он связывает с раз-

---

[1] *Дж. Беркли.* Трактат о началах человеческого знания. Перевод Н. Г. Дебольского. СПб., 1905, стр. 163—164.

[2] *Н. Бурбаки.* Очерки по истории математики. Перевод И. Г. Башмаковой под редакцией К. А. Рыбникова. М., 1963, стр. 205.

[3] Цит. по книге: *F. Cajory.* A history of the conceptions of limits and fluxions in Great Britain from Newton to Woodhouse. Chicago and London, 1919, p. 97.

витием идей Ньютона. Он особо предупреждает, что выражение «последнее отношение исчезающих величин» надлежит понимать лишь фигурально, ибо на деле имеется в виду не последнее отношение, но некоторое фиксированное количество, от которого переменное отношение может отличаться менее, чем на любое сколь угодно малое данное количество, но которому это переменное отношение никогда не становится равным.

Поскольку со времени Ньютона (действительное) число отождествлялось с отношением, именно второе определение являлось арифметическим. Что касается первого определения, то, как и у Валерио и других математиков XVII в., оно возникло прежде всего из рассмотрения задач на измерение геометрических фигур по методу исчерпывания и относилось к последовательностям величин. Именно поэтому предельная величина обязательно оказывается внешней по отношению к последовательности значений переменной, которая к тому же явно или молчаливо предполагается монотонно возрастающей и убывающей, наподобие последовательностей вписанных в круг или описанных около него правильных многоугольников с безгранично возрастающим числом сторон. Только что приведенный пример служит Робинсу для иллюстрации этой в сущности расплывчатой идеи предела, охватывающей не только величины — длины, площади и т.д. фигур, но и самые «формы переменных фигур». Какие парадоксы могут встретиться при неосторожном употреблении «приближения с любой степенью близости», в те времена не подозревали; теперь с ними знакомят школьников с помощью элементарных софизмов, вроде известного «доказательства» равенства длины гипотенузы прямоугольного треугольника сумме его катетов. Различение пределов величин и отношений, так же как ограничение, по крайней мере в теоретическом плане, пределами монотонных последовательностей, члены которых заведомо не принимают своего предельного значения, сохранялось в течение десятилетий.

Впрочем, Джюрин, который вскоре вслед за Робинсом сформулировал определения предела переменной величины и переменного отношения, высказал, в противовес ему, мнение, что существуют переменные, достигающие своего предела; именно: если процесс изменения величины или отношения длится конечное время, то предел достигается, а в противном случае не достигается (The Republick of letters, 1735). Такую концепцию предела Джюрин усматривал у самого Ньютона, ссылаясь на примеры из «Математических начал». Так, процесс образования вписанных и описанных около данной криволинейной трапеции прямолинейных фигур можно мыслить завершенным, скажем, в течение одного часа, и тогда «в мгновение, когда истекает час, нет уже более какой-либо вписанной или описанной фигуры; но каждая из них совпадает с криволинейной фигурой, которая есть предел, limes curvilineus, которого они тогда достигают» [1]. А вот равный единице предел отношения двух неограниченно возрастающих с постоянной разностью величин является недостижимым (ср. т. II, стр. 239 и 242). Мы не будем останавливаться на дальнейшей полемике между Робинсом и Джюрином, которая не принесла чего-либо нового.

Что касается ньютонова описания моментов величин как их мгновенных приращений, Робинс находил его, быть может, темным, но по существу этот термин употребляется просто ради большей краткости. Интересно замечание Робинса о выделении в приращении величины той его части, с

[1] *F. Cajory.* A history of the conceptions of limits and fluxions in Great Britain from Newton to Woodhouse, p. 103.

помощью которой выражается предел отношения приращений: «При определении последних отношений между одновременными разностями величин часто требуется предварительно рассмотреть каждую из разностей отдельно, чтобы найти, сколько из этих разностей необходимо взять, чтобы выразить последнее отношение» [1]. Например, моментом произведения AB называется лишь часть приращения $Ab + Ba$, где a и b суть приращения соответственно A и B, а не все приращение $Ab + Ba + ab$ (ср. т. II. стр. 243). Однако до выделения понятия дифференциала как главной линейной части приращения, Робинс не дошел.

Маклорен и метод исчерпывания

«Аналист» Беркли дал ближайший повод для появления и фундаментального «Трактата о флюксиях» (A treatise of fluxions, V. 1—2. Edinburgh, 1742) К. Маклорена. Место этого выдающегося труда в истории анализа не ограничивается своеобразным изложением его принципов. Трактат представлял собой полный курс анализа и многие приложения к геометрии и механике и содержал целый ряд открытий, более долговечных, чем попытка автора укрепить фундамент метода флюксий. Здесь мы рассмотрим только те его отделы, которые непосредственно относятся к основаниям анализа и которые были подготовлены вскоре после того, как Маклорен познакомился с памфлетом Беркли; лишь позднее, по совету читателей его первого опыта, включавшего только главы 1—4 первой книги и главу 1 второй книги, он существенно расширил план своего труда. Бо́льшая часть первого тома была набрана еще в 1737 г.

Когда математиков XVII в. упрекали за нестрогость их инфинитезимальных выводов, они нередко отвечали, что все найденные таким образом результаты можно проверить с помощью приведения к нелепости по способу древних греков (ср. т. II, стр. 281). Маклорен решил такую проверку основных предложений анализа произвести раз и навсегда. Во введении к трактату он излагает в обобщенной форме основные результаты и схемы доказательств Евклида и Архимеда. Здесь же он делает несколько критических замечаний о применении чисто инфинитезимальных представлений в XVII в. [2]; несколько более подробно разбирается при этом весьма слабая попытка построить арифметику актуально бесконечно больших и обратных им бесконечно малых величин в «Началах геометрии бесконечного» (Eléments de la géométrie de l'infini. Paris, 1727) секретаря Парижской академии наук и талантливого популяризатора естественнонаучных знаний Бернара де Фонтенелля (1657—1757). В этой связи Маклорен ссылается на знаменитого Джона Локка (1632—1704), сенсуалистическая теория познания которого оказала влияние на его воззрения.

В первой главе первой книги трактата Маклорен доказывает по методу исчерпывания основные общие теоремы анализа, выраженные в терминах геометрии и кинематики. Он начинает с характеристики математиче-

---

[1] *F. Cajory.* A history of the conceptions of limits and fluxions in Great Britain from Newton to Woodhouse, p. 99.

[2] Следует иметь в виду, что под бесконечно малыми Маклорен, как и большинство ученых XVIII в., понимал величины, исчезающие в том неопределенном смысле, который включал и актуально бесконечно малые, отличные от нуля, и величины, становящиеся в конце концов нулями. (При написании этого раздела были учтены еще не опубликованные устные сообщения М. М. Коренцовой.— *Ред.*)

ских наук как наук о взаимных отношениях величин и обо всех их свойствах, которые можно подчинить измерению и вообще регулярному определению. Опять-таки со ссылкой на Локка он замечает, что можно иметь ясное понятие об основании отношения каких-либо вещей, не имея точной или адекватной идеи о самих вещах, и вообще идеи об отношениях часто яснее идей о вещах — этим в некоторой степени объясняется специфическая очевидность математики. Далее он замечает, что нет величин, которые мы могли бы себе представить яснее, чем ограниченные части пространства и времени, сосуществующие в случае пространства и непрерывно текущие в случае времени. Благодаря движению эти части могут взаимно измерять друг друга; кроме того, пространство, последовательно описываемое движением, можно представлять себе текущим, как и время. Понятие скорости является для Маклорена, как и Ньютона, столь же интуитивно ясным и начальным, как пространства и времени. В ответ на возражение (Беркли), будто понятие мгновенной скорости опирается на предположение, что возможно движение в мгновение времени и в точке пространства, Маклорен замечает, что любое движение происходит за конечное время и на конечном пространстве и что скорость в данное мгновение можно представить с помощью конечного движения в течение конечного времени. Именно: скорость или же флюксия любой текущей величины или же флюенты «всегда измеряется тем приращением или уменьшением (пространства.— *Ред.*), которое было бы произведено за данное время этим движением, если бы оно равномерно продолжалось с этого мгновения без всякого ускорения или замедления; или она может быть измерена величиной, произведенной за данное время равномерным движением, равным производящему движению в это мгновение»[1]. Эта попытка выразить мгновенную скорость неравномерного движения через скорость равномерного движения не содержала, впрочем, указания, как действительно вычисляется первая: для этого нужно было бы определить, какое равномерное движение считается «равным» данному неравномерному в данное мгновение.

Высказав еще некоторые натурфилософские соображения о производящих величины движениях, Маклорен формулирует четыре аксиомы, согласно которым пространство, описываемое ускоренным (соответственно: замедленным) движением, больше (соответственно: меньше) пространства, описываемого за то же время равномерным движением со скоростью, равной начальной, и оно меньше (соответственно больше) пространства, описываемого за то же время равномерным движением со скоростью, равной конечной. За этим следует 15 теорем о свойствах прямолинейного движения, каждая из которых с большой подробностью доказывается методом исчерпывания. Эти теоремы выражают некоторые общие свойства интегралов и производных непрерывных функций. Так, в теореме III доказано, что из тождества на некотором промежутке двух (дифференцируе-

[1] *C. Maclaurin.* A treatise of fluxions, v. I, p. 57. Аналогичная трактовка мгновенной скорости встречается у представителей оксфордской школы XIV в. (ср. т. I, стр. 274). Так, Уильям Гейтесбери (около 1313—1372) в «Правилах решения софизмов» (Regule solvendi sophismata) писал: «В неравномерном движении скорость в какое-либо мгновение измеряется путем, какой был бы описан быстрее всего движущейся точкой, если бы она равномерно двигалась некоторое время с той же степенью скорости, с какой она движется в это данное мгновение» (цит. по книге: *M. Clagett.* The science of mechanics in the middle ages. Madison — Wisconsin, 1959, p. 241). Мы уже отмечали генетическую связь кинематических концепций анализа XVII—XVIII вв. с оксфордскими калькуляциями и парижской теорией широт форм (т. II, стр. 205).

мых) функций следует тождество их производных: «Если пространства, описываемые в одинаковое время двумя равномерными или переменными движениями, всегда между собою равны, то в любое мгновение времени должны быть равными скорости этих величин»[1]. Эта теорема, говорит Маклорен, столь очевидна, что доказательство ее может показаться лишним, но он считает нужным дать ее полный вывод, так как она принадлежит к основным и справедлива для движения по любым кривым. В теореме IV доказано соответствующее обратное предложение для двух данных тождественно равных скоростей. Теоремы V и VI трактуют о дифференцировании и интегрировании произведения функции на постоянный множитель, теоремы VII и VIII — о дифференцировании и интегрировании суммы или разности функций. Доказательство каждой теоремы проводится с большой подробностью, причем — за исключением последней — по отдельности для равномерного, непрерывно (continually) ускоренного и непрерывно замедленного движения. Учитывается и случай, когда время движения разделяется на конечное число частей, в течение каждой из которых движение относится к одному из этих видов.

При этом Маклорен обсуждает возможность изменения скорости движения конечным скачком, что соответствует существованию неравных левой и правой производных в данной точке. Такое поведение скорости, по его мнению, возможно в отдельные мгновения.

В дальнейшем приводятся, среди прочего, XI теорема, равносильная правилу дифференцирования функции от функции, и XIII теорема, содержащая оценку определенного интеграла снизу и сверху, причем только для монотонной функции: «пространство, описываемое постоянно ускоренным или замедленным движением, находится к пространству, описываемому за то же время каким-либо равномерным движением, в отношении, которое заключено между отношениями скоростей этих движений в начале движения и их отношениями в его конце»[2]. Если, скажем, скорость v в промежутке времени (t_1, t_2) монотонно возрастает от v_1 до v_2, а скорость равномерного движения принята равной единице, то это предложение можно записать в виде

$$v_1(t_2 - t_1) < \int_{t_1}^{t_2} v\,dt < v_2(t_2 - t_1).$$

В конце первой главы вводятся флюксии высшего порядка.

Это общее введение в метод флюксий изложено более чем на ста страницах, причем только в одном месте, при разборе теоремы XIV, мельком упоминается ньютоново понятие предела. Само это понятие Маклорен не подверг специальному исследованию, но, как видно из всего дальнейшего изложения, он, подобно Робинсу, считал, что переменная не достигает своего предела.

В семи предложениях трех следующих глав выведены флюксии некоторых геометрических величин и среди них — площади прямоугольника, криволинейной трапеции в прямоугольных декартовых координатах, криволинейного сектора в полярной системе, объема тела вращения. Насколько громоздко было изложение у Маклорена, можно судить по теореме III

[1] *C. Maclaurin.* A treatise of fluxions, v. I, p. 61.
[2] Там же, стр. 99.

о производной произведения двух функций: «Если флюксии прямых линий AD и AL представлены DG и LM, то флюксия прямоугольника AE, построенного на AD и AL, точно измеряется суммой прямоугольников EG и EM, когда эти линии совместно возрастают или убывают, или же разностью EG и EM, когда одна из этих линий убывает, между тем как другая возрастает» [1] (рис. 27). При доказательстве различаются случаи, когда стороны AP, AQ вспомогательного прямоугольника AR одновременно возрастают или убывают при равномерном движении точек P, Q, когда при том же условии одна из сторон возрастает, а другая убывает и, наконец, когда точки P, Q движутся произвольно. Рассуждение, чисто словесное,

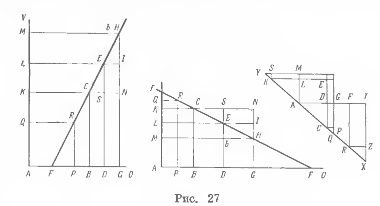


Рис. 27

в манере древних, занимает полных три страницы, а с дополнениями и разъяснениями — почти пять.

Вычислив еще флюксии логарифма, который определяется по Неперу, т. е. кинематически (см. т. II, стр. 59), Маклорен переходит к приложениям, охватывающим огромный круг вопросов анализа, геометрии и механики (касательные, экстремумы, асимптоты, кривизны, многочисленные задачи механики, включая гидромеханику и теорию потенциала, проблемы вариационного исчисления). Касательная к кривой определяется как такая прямая, что между ней и кривой через их общую точку нельзя провести какую-либо другую прямую; аналогично вводится понятие о круге кривизны. В этих приложениях нередко употребляется ньютоново понятие о пределе, как при рассмотрении площадей между бесконечными ветвями плоских кривых и их асимптотами, так и при определении понятия суммы сходящегося ряда (ср. стр. 301). В XII главе первой книги Маклорен обращается к методам бесконечно малых и пределов, развивая замечания, которые он уже сделал в предисловии и введении к труду. При изложении принципов анализа следует избегать постулатов исчисления бесконечно малых, но, когда эти принципы уже доказаны, «краткие и сжатые, хотя и менее точные, способы выражаться могут быть допущены» [2] и метод бесконечно малых «можно рассматривать как легкий и удобный прием для различения тех частей элементов, которые надлежит отбрасывать, и тех, которые надлежит сохранять при определении точной флюксии

---

[1] *C. Maclaurin.* A treatise of fluxions, v. I, p. 126.
[2] Там же, т. I, стр. 3.

величины, или темпа (rate) ее возрастания или убывания»[1]. В оглавлении, где некоторые параграфы специально озаглавлены, имеется такой характерный заголовок одного из параграфов XII главы: «О согласии между методами флюксий и бесконечно малых» [2]. Что касается метода пределов Ньютона, то Маклорен с самого начала объявлял его строгим и изящным, но он считал лучшим начать с метода, менее далекого от античного, дабы начинающим, для которых предназначен, главным образом, трактат, было легче перейти к методу Ньютона. В XII главе, между прочим, Маклорен опровергает критические замечания Беркли против данного Ньютоном вывода флюксии степенной функции.

Только заложив в первой книге трактата синтетико-кинематический фундамент метода флюксий и уже показав его многочисленные применения, Маклорен переходит к исчислению флюксий как таковому. Это происходит в середине второго тома, где начинается вторая книга «О вычислениях по методу флюксий». Здесь Маклорен указывает, что ему еще остается изложить важную часть этого учения, вклад которого в геометрию и познание природы (philosophy) «основан в большей мере на легкости, краткости и большом развитии методов вычисления, или алгебраической части» [3]. Вновь, но уже в алгебраических обозначениях, выводятся с помощью приведения к нелепости основные правила дифференцирования, на странице 591 появляется обозначение флюксий с помощью точек, а затем немалая часть предыдущего материала получает новое выражение. Впрочем, здесь имеются и совершенно новые результаты, в частности знаменитый ряд Эйлера — Маклорена (см. стр. 307).

Попытка Маклорена построить новое исчисление на старом фундаменте успеха не имела. Если у автора хватало энергии и терпения для выражения новых идей modo geometrico-mechanico, то для большинства читателей оно являлось трудно преодолимым барьером. Маклорен пошел почти против всего течения современного ему анализа, и в этом за ним последовать не могли даже сторонники метода пределов и флюксий Ньютона.

«Исчисление нулей» Эйлера

Во второй половине XVIII в. разработка оснований анализа велась главным образом на континенте Европы. «Аналист» и возбужденная им полемика несомненно получили здесь широкую известность. Бюффон, о котором уже говорилось ранее (стр. 140), в предисловии к своему французскому переводу «Метода флюксий» Ньютона (1740) упоминал о выступлении Беркли: «Все было спокойно в течение нескольких лет, как вдруг в самой Англии появился доктор, враг науки, объявивший войну математикам... И он заявляет нам, что исчисление бесконечного ошибочно, ложно, подозрительно неясно, что принципы его недостоверны и что оно приводит к цели лишь случайным образом» [4]. С трактатом о флюксиях Маклорена вскоре стало возможным познакомиться не только в оригинале, но и по французскому переводу, изданному в 1749 г. Впоследствии о спорах, возбужденных Беркли, упомянул в третьем томе своей «Истории математики» (Париж, 1802) Ж. Э. Монтюкла.

---

[1] *C. Maclaurin.* A treatise of fluxions, v. I, p. IV—V.
[2] Там же, т. II, стр. 759.
[3] Там же, т. II, стр. 575.
[4] *I. Newton.* La méthode des fluxions. Paris, 1740, p. XXV—XXVI.

Интерес к проблемам обоснования анализа стимулировался, помимо спора, разгоревшегося в Англии, всей духовной обстановкой эпохи Просвещения и характерным для нее стремлением философски осмыслить принципы научного познания. Несомненное значение имела также подготовка руководств, с одной стороны, а с другой — статей для «Энциклопедии», издававшейся Дидро при участии Даламбера. Характерно, что единственный, кажется, конкурс на чисто математическую тему, объявленный в XVIII в., был конкурс Берлинской академии наук, выдвинувшей в 1786 г. проблему ясного и строгого построения теории математической бесконечности. «Метафизикой» исчисления бесконечно малых занялись почти все крупнейшие математики: Эйлер, Даламбер, Лагранж, а кроме них еще многие — Люилье, Карно, Арбогаст, Лакруа, Гурьев и другие.

Эйлер был непосредственно задет в ходе полемики между Джюрином и Робинсом. В своей «Механике» (1736) Эйлер постоянно оперировал бесконечно малыми величинами. Робинс в 1739 г. обвинил автора «Механики» в ряде ошибок, проистекающих из «приверженности к принципам, которые он впитал под руководством того неловкого вычислителя (inelegant computist), который был его наставником» [1], т. е. И. Бернулли. Обвинение в ошибках было неверным, но Эйлер действительно первоначально стоял на тех же принципиальных позициях, что и И. Бернулли или же Лопиталь. В Архиве Академии наук СССР хранится незаконченная рукопись Эйлера, озаглавленная «Calculus differentialis». Это написанный, вероятно, еще до 1730 г. набросок начальных глав «Дифференциального исчисления», изданного четверть века спустя. Основной замысел в обоих случаях одинаков — это трактовка дифференциального исчисления как специального случая исчисления конечных разностей, имеющего место, когда разности бесконечно малы. Поэтому первая из четырех глав рукописи отведена исчислению конечных разностей. Правила дифференцирования выводятся из формул конечных разностей с помощью принципа отбрасывания высших бесконечно малых, а последние рассматриваются как величины, которые меньше любой данной величины и значения которых нельзя указать. Любопытно, что, характеризуя бесконечно малые тем же термином inassignabiles, которым нередко пользовался Лейбниц, Эйлер обозначал их, как Ньютон, символом o. Принцип отбрасывания доказывается в рукописи следующим образом: «Величина не увеличивается и не уменьшается при прибавлении или отнимании других величин, по сравнению с ней бесконечно малых. Ибо если бы она увеличивалась или уменьшалась, то прибавляемые или отнимаемые величины имели бы к ней отношение, которое можно указать, то есть конечное отношение, вопреки предположению. Отсюда следует, что бесконечно малые в сравнении с конечными можно отбрасывать. Значит $x \mp o = x$, если o бесконечно мала в отношении к x» [2].

---

[1] Цит. по книге: *F. Cajory.* A history of the conceptions of limits and fluxions in Great Britain from Newton to Woodhouse, p. 139—140. Брошюра Робинса должна была привлечь внимание Эйлера, имя которого стояло в ее заглавии: «Замечания о Трактате о движении г. Эйлера, Полной системе оптики д-ра Смита и Опыте об отчетливом и неотчетливом видении д-ра Джюрина» (Remarks on Mr. Euler's Treatise on motion, Dr. Smith's Compleat system of optics, and Dr. Jurin Essay upon distinct and indistinct vision. Loudon, 1739). Мы упоминали, что в 1745 г. Эйлер перевел на немецкий язык книгу Робинса по артиллерии (см. стр. 35).

[2] Архив Академии наук СССР, ф. 1, оп. 1, № 158, л. 52.

Труды по теории флюксий и споры вокруг них явно отразились на взглядах Эйлера. Во «Введении в анализ бесконечных» (1748) он предпочел обойтись без определения инфинитезимальных величин и без предварительного установления их свойств: в предисловии он писал, что развил в книге целый ряд вопросов, «благодаря которым читатели незаметно и как бы сверх ожидания могут освоиться с идеей бесконечного» [1]. Но в «Дифференциальном исчислении» (1755) мы находим уже новую концепцию анализа[2]. Теперь он развивает своеобразное «исчисление нулей» (термин не Эйлера, но современных историков математики), вводя в исчисление бесконечно малых Лейбница идеи метода флюксий Ньютона [3]. Дифференциальное исчисление Эйлер определяет как «*метод определения отношения исчезающих приращений, получаемых какими-либо функциями, когда переменному количеству, функциями которого они являются, дается исчезающее приращение*» (курсив Эйлера.— *Ред.*) [4]. Таким образом, впервые объявляется, что именно производная является, по выражению Эйлера, «истинным объектом» дифференциального исчисления, между тем как дифференциалу отводится, в сущности, вспомогательная роль. Вместе с тем производная определяется не через понятие скорости, как в методе флюксий, но арифметически, как предел отношения конечных приращений, которые «становятся все меньшими и меньшими, и тогда мы найдем, что их отношение все более и более приближается к некоторому определенному пределу, которого они достигают, однако, лишь тогда, когда полностью обращаются в нуль» [5]. Как видно, Эйлер примыкает к Ньютону и в том, что мыслит переменные величины, имеющие предел, достигающими, вообще говоря, своих предельных значений. Выдвинув понятие предела на передний план, Эйлер все же не занялся разработкой самой теории пределов, он даже обходится без дефиниции этого понятия. Для вычисления производных и дифференциалов применяется, как и ранее, принцип отбрасывания бесконечно малых, только обоснование его дается в рамках исчисления нулей.

В соответствии со своей трактовкой процесса стремления к пределу Эйлер считает бесконечно малую величину равной нулю. Он отвергает «особую категорию бесконечно малых величин, которые якобы не полностью исчезают, но сохраняют некоторое количество, которое, однако, меньше, чем всякое могущее быть заданным» [6], ибо отбрасывание слагаемых такого рода нарушало бы совершенную точность анализа. Он отвергает и объяснение точности результатов компенсацией одних ошибок дру-

---

[1] *Л. Эйлер.* Введение в анализ бесконечных, т. I, стр. 19.

[2] Тремя годами ранее эта концепция была неполно и неточно изложена в брошюре богослова Г. В. Клемма (1725—1775) «Письмо о некоторых парадоксах аналитического исчисления, адресованное г. Эйлеру...» (Lettre sur quelques paradoxes du calcul analytique adressée à Monsieur Euler... Tubingue, 1752). Эйлер, который весьма невысоко ценил математические знания Клемма, не мог быть доволен этим изложением, основанным на отдельных беседах с ним.

[3] Сравнивая различия в терминологии и символике между аналистами Англии и других стран Европы, Эйлер отдавал предпочтение наименованиям первых (например, «текущим» величинам перед «переменными») и обозначениям вторых. Но, добавлял он, множество книг, написанных в той и другой менере, делает согласование обеих теорий бесполезным. См.: *Л. Эйлер.* Дифференциальное исчисление, стр. 103; *Л. Эйлер.* Интегральное исчисление, т. I. Перевод С. Я. Лурье и М. Я. Выгодского. М., 1956, стр. 10—11.

[4] *Л. Эйлер.* Дифференциальное исчисление, стр. 39.

[5] Там же, стр. 41.

[6] Там же, стр. 40.

гими; напротив того, получение правильных результатов без такого рода компенсации убедительно показывает, что «количества, которыми пренебрегают, надлежит считать совершенно и абсолютно равными нулю» [1]. Дифференциальное исчисление безошибочно просто потому, что бесконечно малые суть абсолютные нули. И предел отношения $\Delta y/\Delta x$ при обращении Δx в нуль вычисляется вполне точно, когда в частном, уже сокращенном на Δx, это приращение полагается равным нулю. Вместе с тем предел $\Delta y/\Delta x$ можно рассматривать как отношение двух равных нулю дифференциалов, как дробь dy/dx, где $dy = 0$ и $dx = 0$.

Принципы исчисления нулей Эйлер изложил в третьей главе «Дифференциального исчисления». Прежде всего он оспаривает то возражение, что говорить о делении нуля на нуль не имеет смысла. Нули можно сравнивать между собой двояко. Арифметическое отношение двух нулей есть отношение равенства, т. е. их разность есть нуль. Но геометрическое отношение двух нулей не есть отношение равенства и может иметь любое значение, ибо произведение любого числа на нуль равно нулю. В символах, поскольку для всякого n

$$n \cdot 0 = 0,$$

то

$$0 : 0 = n : 1,$$

где n — какое угодно число. Это замечание Эйлера не находится в противоречии и с нашей современной концепцией: в кольце действительных чисел символ 0/0 можно принять равным любому его элементу [2].

Но в дифференциальном исчислении,— и это основной пункт концепции Эйлера,— частное двух нулей, выступающее под видом отношения двух бесконечно малых приращений функции и ее аргумента, или же их дифференциалов, перестает быть неопределенным. При буквальном понимании некоторые высказывания Эйлера звучат в настоящее время непривычно. Различные бесконечно малые или нули, говорит он, следует, во избежание путаницы, обозначать различными символами, например dx, dy и т. д., ибо они могут иметь различные отношения. Когда обозначения фиксируются, неопределенность исчезает: так, отношение $adx : dy$, где a — конечное отличное от нуля число, уже перестает быть неопределенным, но равно $a : 1$. После этого основные правила вычисления дифференциальных отношений формулируются как в форме принципа отбрасывания бесконечно малых, так и в форме, соответствующей предельному переходу:

$$a \pm ndx = a \quad \text{и} \quad \frac{a \pm ndx}{a} = 1,$$

а также при $n > m$

$$adx^m \pm bdx^n = adx^m \quad \text{и} \quad \frac{adx^m \pm bdx^n}{adx^m} = 1.$$

В некоторых трудах по истории математики все эти рассуждения Эйлера до сих пор характеризуются как полностью лишенные строгости и

---

[1] *Л. Эйлер.* Дифференциальное исчисление, стр. 40—41.

[2] Ср., например, *И. В. Проскуряков.* Понятие множества, группы, кольца и поля.— В кн.: Энциклопедия элементарной математики, т. I. М.—Л., 1951, стр. 115.

даже смысла [1]. Однако обороты речи, характерные для XVIII в., не должны скрывать реального математического содержания концепции Эйлера, вовсе не вступающей в конфликт с логикой и здравым смыслом. Отношение двух нулей у него есть не что иное, как предельное значение функции $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$, предполагаемой непрерывной для всех рассматриваемых значений аргумента, включая $x = x_0$, а его правила учат, в частности, находить искомое предельное значение, подставляя $\Delta x = 0$ в разложение этой дроби по степеням Δx. В сущности, такая же ситуация имела место в методе флюксий Ньютона, и мы на ней уже останавливались (см. т. II, стр. 242—244) [2]. Еще Л. Карно с полным основанием писал (1813), что сторонники понимания бесконечно малых как нулей «среди всех отношений, которые эти количества способны иметь в качестве нулей..., рассматривают только те, которые определены законом непрерывности» [3], т. е. законом, по которому непрерывно изменяются Δx и Δy; различием этих законов объясняется и необходимость в различном обозначении нулевых бесконечно малых.

К изложению свойств бесконечно малых Эйлер присоединяет аналогичный разбор свойств бесконечно больших величин и действий над ними; бесконечно большая величина при этом определяется прежде всего как частное от деления конечной величины, не равной нулю, на бесконечно малую, т. е. нуль.

Исчисление нулей образует лишь одну из опор концепции анализа Эйлера, другой служит представление функций степенными рядами, которое играет основную роль уже в фактическом вычислении дифференциалов и их отношений, т. е. производных. Поскольку дифференциальное исчисление определяется как частный случай метода разностей, наступающий, когда разности, вначале предполагаемые конечными, становятся бесконечно малыми, две первые главы монографии содержат элементы исчисления конечных разностей (см. шестую главу этого тома). Формулы конечных разностей служат отправным пунктом изучения природы дифференциалов любого порядка в IV главе рассматриваемого труда: дифференциал функции, в согласии с традицией школы Лейбница, определяется как ее бесконечно малая разность. Если разложение конечной разности какой-либо функции y по степеням ω, конечной разности аргумента x, дано

$$\Delta y = P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + \ldots,$$

где P, Q, R, ... — функции x, то dy находится непосредственно, без отыскания предела отношения $\Delta y/\Delta x$. Здесь вступает в действие принцип отбрасывания бесконечно малых, который Эйлер без каких-либо пояснений распространяет на бесконечное число членов степенного разложения (аналитической) функции, порядок малости которых бесконечно возрастает. Именно: если бесконечно малые приращения Δy и ω обозначить соответственно dy и dx, то все члены ряда, следующие за первым, как исчезающие

[1] *Carl B. Boyer.* The history of the calculus and its conceptual development. N. Y., 1959, p. 246; *E. T. Bell.* The development of mathematics. N. Y.— London, 1945, p. 288.

[2] Ср. *А. Н. Колмогоров.* Ньютон и современное математическое мышление.— В сб.: Московский университет — памяти Исаака Ньютона. М., 1946, стр. 36.

[3] *Л. Карно.* Размышления о метафизике исчисления бесконечно малых. Перевод Н. М. Соловьева под редакцией А. П. Юшкевича. Изд. 2. М.—Л., 1936, стр. 257.

в сравнении с ним, могут быть отброшены [1] и значит $dy = Pdx$. Таким образом, «для нахождения... дифференциала y достаточно знать одну только функцию P», и «если известна конечная разность какой-либо функции, то очень легко найти ее дифференциал» [2]. Именно так выведены в двух следующих главах дифференциалы степенной функции, частного, логарифмической функции $\left(\text{исходя из разложения } \ln(x+dx) - \ln x = \ln\left(1+\frac{dx}{x}\right) = \frac{dx}{x} - \frac{dx^2}{2x^2} + \ldots\right)$, синуса, косинуса и некоторых других функций. Отсюда было уже недалеко до прямого определения производной, как коэффициента линейного члена ряда Тейлора. Именно так поступил затем Лагранж в надежде освободить тем самым анализ от пределов и бесконечно малых (см. стр. 288). Для объяснения природы высших дифференциалов d^2y, d^3y,... Эйлер привлек разложения по степеням приращения аргумента конечных разностей функции высших порядков $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$, ..., из которых и получаются соответствующие дифференциалы при бесконечно малом $\omega = dx$. И так как n-я разность есть разность $(n-1)$-й разности, то $d^n y$ есть $d\,(d^{n-1}y)$.

Ряд Тейлора Эйлер привлек и для решения некоторых вопросов дифференциального исчисления, например для исследования функций на экстремум посредством оценки знака разности

$$f(x \pm \omega) - f(x) = \pm \frac{dy}{dx}\omega + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{\omega^2}{2} \pm \frac{d^3y}{dx^3}\frac{\omega^3}{6} + \ldots$$

при достаточно малых значениях ω. При этом, как и в некоторых других случаях, использовалось предложение, согласно которому при достаточно малом ω (абсолютная) величина какого-либо члена ряда может быть сделана больше (абсолютной) величины суммы всех следующих за ним членов [3]. Это предложение Лагранж возвел в ранг одного из основных принципов своей системы анализа.

В главе XIV второй части «Дифференциального исчисления» Эйлер вернулся к вопросу о природе и вычислении дифференциалов в «особых» случаях. Это случаи, когда для некоторого значения аргумента один или несколько начальных членов разложения приращения функции обращаются в нуль или же когда появляются бесконечные члены. Теперь бесконечно малое приращение функции при $\omega = dx$ называется «истинным» или «полным» дифференциалом функции и записывается в виде

$$d\cdot y = dy + \frac{1}{2}d^2y + \frac{1}{6}d^3y + \ldots,$$

а также

$$d\cdot y = pdx + \frac{1}{2}qdx^2 + \frac{1}{6}rdx^3 + \ldots$$

Не входя в подробности, заметим, что подход Эйлера к «особым» случаям отличается от общепринятого тогда, да и ныне. Например, если при $x = a$ исчезает только первый член, т. е. $p = 0$, то вторым членом пренебрегать в выражении для разности функции уже нельзя; в этом случае в соответствии с определением дифференциала как бесконечно малого приращения и с принципом отбрасывания бесконечно малых $dy = {}^1/_2\, qdx^2$. Вообще

[1] *Л. Эйлер*. Дифференциальное исчисление, стр. 103.
[2] Там же, стр. 105.
[3] Там же, стр. 387—389.

если при $x = a$ обращаются в нуль первые $n - 1$ производных, то dy будет пропорционален dx^n. Любопытно брошенное здесь мимоходом замечание, что «ни для какой функции количества x (отличной от постоянной.— *Ред.*) полный дифференциал никогда не исчезает вполне» [1], т. е. невозможно обращение в нуль всех ее производных: мы вновь встретим его в несколько иной форме у Лагранжа (см. стр. 300). Если какой-либо член ряда Тейлора обращается в бесконечность, нахождение дифференциала по обычному способу Эйлера вообще невозможно. Здесь один из примеров таков: $y = (x - a)^{3/2} + a\sqrt{a}$, так что $p = \frac{3}{2}\sqrt{x - a}$, $q = \frac{3}{4\sqrt{x - a}}$ и т. д. «Поэтому если положить $x = a$, то получим, правда, $p = 0$, но все следующие члены будут бесконечными, поэтому дифференциал dy в этом случае вовсе нельзя будет определить» [2]. Эйлер вычисляет приращение функции непосредственно, подставляя в функцию вместо x значения a и $a + dx$, что дает ему $dy = dx\sqrt{dx}$.

Охарактеризованные нами идеи Эйлера оказали значительное влияние на дальнейшие работы по основаниям анализа. Это относится, в частности, к выдвижению на первый план производной как предела отношения $\Delta y/\Delta x$ и к широкому применению ряда Тейлора. Но понимание бесконечно малых как нулей, при всем авторитете Эйлера, могло явиться только недолгим этапом в истории этого понятия и не привлекло большого числа сторонников. Дифференциал, рассматриваемый как нуль, был практически бесполезен в анализе и его приложениях, а исчисление нулей в целом маскировало фактические предельные переходы. С самого возникновения дифференциального исчисления решающим было то, что при бесконечно малом приращении аргумента (и производной, неравной нулю) дифференциал функции аппроксимирует ее приращение с точностью до высшей бесконечно малой. Отождествление дифференциала и приращения функции приводило к логическим трудностям, но отождествление дифференциала и нуля (хотя бы и нуля как последнего значения некоторой переменной), с одной стороны, лишало это понятие анализа его особенно ценных свойств, а с другой — вовсе не освобождало математику от необходимости применять выражение вида $P\omega$ при малых, но отличных от нуля значениях приращения аргумента ω. В анализе и его приложениях на каждом шагу приходится иметь дело с допредельными приближениями величин и их оценками в форме неравенств, а не только с предельными равенствами. Такие оценки в XVIII в., да и позже, производились, правда, без ε, δ-техники Вейерштрасса, часто на глаз, но это не меняет сути дела: оперировали при этом не с нулевыми бесконечно малыми, а с произвольно малыми величинами. Разумеется, так поступал и Эйлер, но с его точки зрения дифференциал функции мог быть использован для приближенного вычисления ее конечного приращения лишь косвенным образом: если ω, приращение аргумента x, «будет чрезвычайно малым, так что в выражении $P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3$ и т. д. члены $Q\omega^2$ и $R\omega^3$, а тем более остальные станут столь малыми, что в вычислении, где не требуется высшая точность, ими можно пренебречь по сравнению с первым членом $P\omega$, то по известному дифференциалу можно приближенно найти конечную разность, которая $= P\omega$» [3]. Эти слова следует понимать не в том смысле, что сам диффе-

[1] *Л. Эйлер.* Дифференциальное исчисление, стр. 473.
[2] Там же, стр. 345.
[3] Там же, стр. 105.

ренциал Pdx дает приближение для конечной разности, но в том, что приближение получается из его формулы Pdx при замене нулевого dx на ω. Эйлер здесь снова подчеркивает, что дифференциалы суть нули, а не «неопределенно малые» приращения, как считают некоторые.

Вместе с тем в других местах «Дифференциального исчисления» дифференциал понимается как ненулевая величина, например, при выводе ряда Тейлора в III главе второй части, где значения x, $x + dx$, $x + 2\,dx$,... очевидным образом различаются между собой в арифметическом отношении.

Разбирая концепцию Эйлера, Карно, которого мы уже цитировали, писал, что в анализе можно по желанию рассматривать бесконечно малые и как нули, и как неопределенно малые, но последняя точка зрения предпочтительнее, ибо, «приписывая бесконечно малым количествам значение нуля, ... совершают бесполезное действие», и «вопрос мне кажется разрешенным более общим образом, если оставить неопределенными те количества, которые нет никакой нужды определять» [1].

Метод пределов Даламбера

Вскоре после выхода «Дифференциального исчисления» Эйлера Даламбер выступил с предложением основать анализ на понятиях предела и производной, не употребляя, впрочем, этого последнего термина. Свои воззрения Даламбер рассматривал как развитие идей исчисления флюксий Ньютона, но он внес то новое, что освободил их от механических или квазимеханических представлений. Это было связано как с общими тенденциями развития анализа на материке Европы, так и с классификацией наук, принятой Даламбером: он исходил из того положения, что достоверным познанием мы обладаем лишь в области абстрактных понятий и чем более опытных элементов входит в какую-либо науку, тем более сложны ее понятия, так что математика предшествует механике [2]. Популярное изложение собственной концепции Даламбер дал в статьях «Дифференциал» (Différentiel) и «Предел» (Limite), напечатанных соответственно в четвертом (1759) и девятом (1765) томах французской «Энциклопедии», и в некоторых других работах.

Имея в виду распространенные тогда понятия о бесконечно малых, Даламбер заявлял, что в принципе дифференциальное исчисление в них не нуждается: либо бесконечно малые разности в действительности не существуют, либо нет нужды полагать, что они существуют. В частности, он считал лишенным смысла определение бесконечно малой как величины, исчезающей не до того, как она исчезла, и не после того, но в самый момент ее исчезновения. Величина есть либо нечто, либо ничто; в первом случае

---

[1] *Л. Карно.* Размышления о метафизике исчисления бесконечно малых, стр. 259—260.

[2] Л. Карно, с характерной для него широтой взглядов, считал такой довод против введения в анализ понятия скорости недостаточно основательным, так как «Наша классификация наук в достаточной мере произвольна. Мы помещаем математику впереди механики, исходя из степени простоты, но высшие разделы первой гораздо более абстрактны, чем элементарные отделы второй. И так как, по словам Лагранжа, каждый «имеет, или думает, что имеет, ясное представление о скорости», то определять флюксии посредством скоростей вовсе не значит идти в направлении, противном духу математики» (*Л. Карно.* Размышления о метафизике исчисления бесконечно малых, стр. 246—247). Однако такое определение не соответствовало общему духу развития математики в XVIII в.

она еще не исчезла, а во втором она совсем исчезла; допущение промежуточного состояния между этими двумя — химера [1]. На самом деле «в дифференциальном исчислении речь идет вовсе не о бесконечно малых величинах, но только о пределах конечных величин. Слова „бесконечно малые" используются лишь для сокращения выражений»[2]. Конечно, Даламбер пользовался потенциальными бесконечно малыми и бесконечно большими, но явного определения их не сформулировал, а в отдельных случаях его обороты речи при буквальном понимании могут дать повод к недоразумениям, например, когда он писал, что «Бесконечность, рассматриваемая в анализе, есть собственно предел конечного, т. е. граница, к которой всегда стремится конечное, никогда к ней не приходя, но о которой можно предположить, что конечное приближается к ней все ближе и ближе, хотя и никогда не достигает» [3].

В анализе нет необходимости дифференцировать отдельные величины, дифференцирование же уравнений состоит только в отыскании предела отношения между конечными приращениями двух входящих в них переменных [4]. Для отыскания касательной, понимаемой как предел секущих, или же экстремума, требуется вычислять не dy, но dy/dx и далее оперировать с этой последней величиной. Это разъясняет всю тайну дела: называемые бесконечно малыми величины всегда «следует считать поделенными на другие почитаемые бесконечно малыми величины, и они при этом выражают не бесконечно малые и даже не дроби с бесконечно малыми числителями и знаменателями, но предел отношения конечных величин» [5]. Явного определения дифференциала Даламбер не дает, но из текста цитируемой статьи следует, что для него dy и dx — просто величины, частное которых равно пределу, обозначаемому dy/dx.

Понятие предела определено в «Энциклопедии» следующим образом: «Говорят, что одна величина является пределом другой величины, если эта вторая может стать к первой ближе, чем на любую данную величину, как бы мала ни была последняя, причем, однако, приближающаяся величина никогда не может превзойти величину, к которой приближается. Таким образом, разность этой величины и ее предела абсолютно неуказуема». И к этому добавлено: «предел никогда не совпадает или не становится равным величине, для которой он является пределом» [6]. В статье не определены по отдельности предел величины и предел отношения, как поступали Робинс, Джюрин, но по существу идея предела и здесь не арифметизирована (ср. стр. 260). Для иллюстрации приведены последовательности вписанных и описанных около круга многоугольников и частных сумм убывающей геометрической прогрессии. Из текста следует, что переменная мыслится изменяющейся монотонно, хотя это и не оговорено в определении. По недосмотру отсутствует указание, что предел есть вели-

---

[1] См. его «Разъяснение метафизических начал исчисления бесконечно малых» (Eclaircissement sur les principes métaphysiques du calcul infinitésimal, 1759) в книге: *D'Alembert.* Oeuvres philosophiques, historiques et littéraires, t. II. Paris, an XIII (1805).

[2] «Encyclopédie, ou Dictionnaire raisonné des sciences, arts et métiers», t. IV, art. Différentiel. Статьи по математике «Энциклопедии» были переизданы в «Encyclopédie méthodique ou par ordre des matières». Nouv. éd., Padoue, 1787—1790.

[3] *D'Alembert.* Oeuvres philosophiques, historiques et littéraires, t. II, p. 346.

[4] Ср. *De Bougainville,* Traité du calcul intégral, v. 1. Paris, 1754, p. VIII.

[5] «Encyclopédie», t. IV, art. Différentiel.

[6] «Encyclopédie», t. IX, art. Limite. Эта статья написана совместно Даламбером и аббатом де ла Шапелем (1710—1792), автором «Оснований геометрии» (Institutions de géométrie. Éd. 1. Paris, 1746), где идея предела применялась в манере Стевина и Григория Сен Венсана.

чина постоянная,— пробел, отмеченный С. Е. Гурьевым (см. стр. 276). Из теорем приведены две: о единственности предела и о пределе произведения,— вторая используется для доказательства того, что площадь круга выражается произведением полуокружности на радиус.

Хотя Даламбер полагал, что «метафизика дифференциального исчисления, о которой так много писали, еще важнее и, быть может, с большим трудом поддается разработке, чем сами правила этого исчисления» [1], он лично ограничился общей характеристикой метода пределов, предоставив его дальнейшую разработку и применение к построению системы анализа другим. При этом, как мы увидим, идеи Даламбера получили первоначально весьма одностороннее развитие.

Первым курсом анализа, в котором по крайней мере отчасти были воплощены мысли Даламбера, явились «Лекции по дифференциальному и интегральному исчислению» (Leçons de calcul différentiel et de calcul intégral. Paris, 1777) Жака Антуана Кузена (1739—1800). Эта книга была сочувственно встречена не только французскими читателями, о чем говорит второе издание 1796 г.; в 1801 г. она вышла в Петербурге в русском переводе С. Е. Гурьева. Но особенно интересны два сочинения, представленные на конкурс Берлинской академии наук 1786 г. Одно из них, написанное Люилье, содержало изложение анализа на основе теории пределов, в другом, принадлежащем перу Л. Карно, существенно использовались ее понятия и предложения.

Инициатором конкурса был Лагранж, в то время состоявший директором Математического класса Берлинской академии. В вопросах обоснования анализа Лагранж не разделял взглядов ни Эйлера, ни Даламбера. В заметке, напечатанной во втором томе «Miscellanea Taurinensia» (1760—1761), он высказал убеждение, что исчисление бесконечно малых есть по существу исчисление компенсирующихся ошибок и «исправляет само собой принимаемые в нем ложные допущения» [2]. Этот тезис Лагранж иллюстрировал примером касательной к кривой, т. е. в сущности примером Беркли, но с тем различием, что у Беркли речь шла о касательной к конкретной параболе и были проведены все вычисления (см. стр. 258), между тем как Лагранж ограничился замечанием общего характера, относящимся к любым кривым. Со ссылкой на заметку Лагранжа идея компенсации ошибок была упомянута в посмертном издании довольно распространенного учебника астронома Николая Луи де Лакайля (1713—1762) [3]; ее разделяли и некоторые другие ученые. В 70-е годы Лагранж пришел к мысли заменить исчисление бесконечно малых новой теорией производных функций, о которой будет рассказано далее, но он до конца жизни полагал, что дифференциальное исчисление, как таковое, основано на компенсации ошибок. Именно этим объясняется формулировка темы берлинского конкурса 1786 г., объявленного в 1784 г. Чтобы обеспечить за математикой присущую ей издревле ясность принципов, строгость доказательств и точность теорем, академия предлагала представить «*ясную и точную теорию того, что в математике называют бесконечным*. Известно, что высшая геометрия постоянно принимает *бесконечно большие* и *бесконечно малые*. Однако древние геометры и даже аналисты тщательно

---

[1] «Encyclopédie», t. IV, art. Différentiel.

[2] *J. L. Lagrange.* Oeuvres, v. VII. Paris, 1877, p. 598.

[3] *N. L. de la Caille.* Leçons élémentaires de mathématiques. Paris, 1770, p. 337. Это издание представляло собой переработку преподавателем математики аббатом Жозефом Франсуа Мари (1738—1801) курса, впервые вышедшего в 1741 г.

избегали всего, что касается бесконечного, и великие современные аналисты признают, что выражение *бесконечная величина* противоречиво. Академия поэтому желает получить объяснение того, как из противоречивого допущения было выведено столько истинных теорем и чтобы был указан верный, ясный, словом подлинно математический принцип, который мог бы заменить *бесконечное*, не делая слишком трудным или слишком долгими производимые с помощью этого средства исследования» [1].

На конкурс было представлено 21 сочинение. По мнению академии, т. е. фактически Лагранжа, ни одно не отвечало ее пожеланиям полностью, ни в одном не было объяснено, «как из противоречивого допущения было выведено столько истинных теорем». Все же одна из работ, наиболее удовлетворяющая другим предъявленным требованиям, была выделена и автор ее премирован. Лауреатом оказался Симон Люилье (ср. стр. 203), автор «Элементарного изложения начал высших исчислений» (Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs. Berlin, 1786).

По словам самого Люилье, его труд представлял собой «развитие мыслей ..., которые г. Даламбер высказал лишь в виде наброска и как бы предложил в статье о дифференциале в Энциклопедии и в своем сборнике» [2]. В первой главе книги метод пределов действительно получает некоторое развитие. К двум теоремам о пределах, приведенным Даламбером, Люилье добавляет теорему о пределе отношения двух переменных величин и впервые вводит знак предела в виде lim (ср. стр. 280); впервые же производная какой-либо функции P — у Люилье «дифференциальное отношение» (rapport différentiel) — обозначается $\lim \frac{\Delta P}{\Delta x}$ и символ $\frac{dP}{dx}$ рассматривается как единое целое, а не дробь. Термином «бесконечно малая величина» Люилье не пользуется, сохраняя его для обозначения актуально бесконечно малых; нет у него и понятия о дифференциале. Переменную, стремящуюся к нулю, он называет «переменной величиной, не имеющей предела малости (или которая может быть сделана меньше какой бы то ни было указанной величины)» [3]. Он выводит также теорему о сумме нескольких бесконечно малых для частного случая: любая функция $Q = Bx^b + Cx^c + \ldots + Nx^n$, где $0 < b < c < \ldots < n$ и x «не имеет предела малости», может быть сделана меньше какой бы то ни было данной величины. В этом, собственно, и состоял весь вклад Люилье в общую теорию пределов. Предел определялся все еще только для монотонного случая, и в определении сохраняется условие недостижимости предела. Кроме того, подобно Робинсу, Люилье по отдельности определял и рассматривал пределы величин и пределы отношений, и подобно Маклорену, истинной строгости доказательств стремился достичь с помощью метода исчерпывания,

---

[1] «Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des sciences et belles-lettres (1784)». Berlin, 1786, p. 12—13.

[2] *L'Huilier.* Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs. Berlin, 1786, p. 167. Мы благодарны г. Р. Жакелю (Мюлуз), любезно приславшему нам полную фотокопию этой редкой книги.

[3] *L'Huilier.* Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs, p. 21. В другом месте этой книги Люилье предлагает ввести для обозначения переменных инфинитезимальных величин новые термины infinible и infiniblemen petit. Слово infinible, по его мнению, выражает свойство незавершенности (la faculté de ne pouvoir pas être terminé), между тем как слово infini — состояние завершенности (там же, стр. 147). Напомним, что выдающийся московский математик и педагог И. И. Жегалкин (1869—1947) рекомендовал вместо «бесконечно малая» величина говорить «бесконечно умаляющаяся».

причем в каждом выводе различал случаи возрастания и убывания величины или отношения.

Впрочем, в латинском дополненном издании «Элементарного изложения» (Principiorum calculi differentialis et integralis expositio elementaris. Tubingae, 1795) Люилье пошел несколько далее. Он расширил понятие о пределе, показав на примерах сходящихся знакочередующихся рядов, что переменная может стремиться к пределу не монотонно. Кроме того, он привел здесь общие теоремы о сумме или разности бесконечно малых, а также о произведении бесконечно малой на какое-либо число.

В последующих главах книги Люилье содержится систематическое изложение начал дифференциального и интегрального исчисления, включая теорию рядов, и их применений к геометрии, а также, в меньшей мере, к механике. Глава XI содержала критику воззрений на природу актуально бесконечных величин, в частности Фонтенелля (ср. стр. 261), и исчисления нулей Эйлера. В целом Люилье сумел удовлетворительно для своего времени реализовать в учебном плане идеи Даламбера, хотя он и не обогатил их сколько-нибудь существенно.

В России пропагандистом метода пределов выступил С. Е. Гурьев. Главный труд Гурьева «Опыт о усовершении елементов геометрии» (СПб., 1798), не раз упоминавшийся выше, был посвящен вопросам обоснования и преподавания математики. Его подготовка к печати вызвала споры в Петербургской академии наук. Гурьев выступил с возражениями против употребления Эйлером расходящихся рядов и против одного его доказательства теоремы о биноме. Фусс, Румовский и другие академики потребовали исключения из сочинения Гурьева этих возражений, и ему пришлось уступить.

Центральное место в «Опыте» занимает систематическое приложение метода пределов в школьном курсе геометрии. В этой своей части книга Гурьева оказала несомненное влияние на последующие руководства, хотя его собственные учебники (СПб., 1804—1807; СПб., 1811), очень растянутые и трудные, успеха не имели. С помощью метода пределов Гурьев пытался более строго доказать ряд теорем анализа, прежние доказательства которых считал неудовлетворительными. Так, в одной статье 1797 г., опубликованной в 1802 г. в «Nova Acta» (1795—1796), он заново вывел условие полного дифференциала функции двух переменных и теорему о равенстве смешанных производных второго порядка. Заслуживает внимания содержащееся в этой статье обобщение простейших теорем о предельных переходах — пределе суммы, разности, произведения и т. д., именно общее правило вычисления предела функции путем подстановки в функцию предельного значения аргумента: «согласно 12 вспомогательным истинам метода пределов, видно, что если над какой-либо увеличивающейся или уменьшающейся величиной, имеющей предел, производят некоторую операцию, то результат этой операции имеет пределом результат той же операции, произведенной над пределом увеличивающейся или уменьшавшейся величины» [1]. Сформулированное только что свойство $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, характерное для функций, непрерывных при $x = x_0$ в смысле Больцано — Коши, не согласуется, впрочем, с представлением, что переменная не может принимать своего предельного значения.

Метод пределов Гурьев использует и в большом курсе «Оснований

---

[1] «Nova Acta Academiae Petropolitanae», t. XIII (1795—1796), 1802, p. 157.

дифференциального исчисления» (СПб., 1811), где, между прочим, предел обозначается первой буквой этого слова, например:

$$e = \prod \left[1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}\right].$$

Бесконечно малые в явном виде в этом руководстве не применяются, дифференциалы же dy, dx вводятся как произвольные числа, отношение которых равно пределу частного $\Delta y/\Delta x$. В самом начале «Оснований» Гурьев геометрически обосновывает существование этого предела у функций, представимых (непрерывными) плоскими кривыми (ср. стр. 243); такое рассуждение содержалось еще в ненапечатанной части рукописи его «Опыта». Упомянем, что один из последователей Гурьева П. А. Рахманов применил для вывода теорем о пределах приемы и обозначения, сходные с употребительными ныне. Вот два примера из его «Новой теории содержания и пропорции геометрической» (1803), о которой уже говорилось во второй главе. Теорему о пределе суммы Рахманов доказывает, выбирая произвольно малое положительное ε и считая взятые им три переменные X, Y, Z меньшими соответствующих пределов A, B, C, так: можно одновременно сделать:

$$A - X < \varepsilon/3, \quad B - Y < \varepsilon/3, \quad C - Z < \varepsilon/3,$$

и, следовательно,

$$(A + B + C) - (X + Y + Z) < \varepsilon.$$

При доказательстве теоремы о пределе произведения возрастающих переменных используются неравенства:

$$AB - BX < \varepsilon/2 \quad \text{и} \quad BX - XY < \varepsilon/2,$$

где второе, например, выводится из того, что можно сделать $B - Y < \varepsilon/2A$ и что $X < A$.

Даламберу и его последователям принадлежит заслуга дальнейшей разработки учения о предельных переходах в рамках чистого анализа. Но в той конкретной форме, которую метод пределов приобрел в рассматриваемое время, он еще не имел преимуществ в смысле строгости перед исчислением бесконечно малых. Определение предела, ограниченное монотонными переменными, было недостаточным: ведь ни сумма, ни произведение двух монотонных величин, из которых одна возрастает, а другая убывает, не являются, вообще говоря, монотонными. Арсенал понятий и общих теорем метода пределов оставался очень невелик, и его едва хватало только для передоказательства уже известных предложений. Новые широкие перспективы открылись, когда Больцано и Коши установили основной критерий сходимости последовательности и применили его: первый — при исследовании свойств непрерывных функций, а второй — при построении теории сходящихся рядов и в доказательстве теоремы о существовании интеграла.

Но самым уязвимым пунктом теории пределов второй половины XVIII в. являлся отказ от употребления алгоритма бесконечно малых Лейбница. Это отметил еще Карно в сочинении, представленном на конкурс Берлинской академии 1786 г., и ту же мысль он подчеркивал в своих «Размышлениях». «Методу пределов,— писал Карно,— свойственно одно серьез-

ное затруднение, не имеющее места в анализе бесконечно малых; именно, в нем нельзя, как в этом последнем, отделять бесконечно малые количества друг от друга, и так как эти количества в нем всегда связаны друг с другом, то невозможно ни использовать при вычислениях (combinaisons) свойства, принадлежащие каждому из них в отдельности, ни подвергать уравнения, в которых они встречаются, преобразованиям, способствующим их исключению» [1]. Как мы сейчас увидим, Карно принадлежит своеобразная попытка освободить метод пределов от этих ограничений.

Метод пределов и теория компенсации ошибок Карно

Как мы уже писали, Берлинская академия наук в 1786 г. объявила, что ни в одной из поступивших на ее конкурс работ не было разъяснено, как в исчислении бесконечно малых из противоречивых допущений выводятся правильные теоремы. Это суждение, однако, не было вполне беспристрастным. Одно из сочинений Л. Карно, именно «Рассуждение о теории математического бесконечного» (Dissertation sur la théorie de l'infini mathématique), содержало ответ на этот вопрос,— ответ, очевидно, не удовлетворивший академию, т. е. фактически Лагранжа, но совершенно недвусмысленный. Карно подробно аргументировал как раз тот тезис, который сжато высказал в заметке 1760—1761 гг. Лагранж: исчисление бесконечно малых основано на общем принципе компенсации ошибок, которая в определенных условиях необходимо приводит к точным результатам.

Одной из руководящих идей Карно, которую он проводил как в оставшемся неопубликованным «Рассуждении» [2], так и в возникших на его основе «Размышлениях о метафизике исчисления бесконечно малых» (Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal. Paris, 1797; 2e éd., 1813), была следующая: все инфинитезимальные методы в идейном смысле представляют собой один и тот же метод, рассматриваемый с различных точек зрения. «Это,— как писал он во втором издании „Размышлений“,— все тот же метод исчерпывания древних, более или менее упрощенный, более или менее удачно приспособленный к нуждам исчисления и, наконец, приведенный к регулярному, упорядоченному алгорифму» [3]. В «Рассуждении» и первом издании «Размышлений» сопоставлялись исчисление Лейбница, исчисление исчезающих величин Эйлера, метод пределов и метод неопределенных коэффициентов; во втором издании анализируются еще метод исчерпывания, метод неделимых и теория аналитических функций Лагранжа. Каждый метод может быть с пользой применен в тех или иных случаях, но наиболее удобным и плодотворным является «регулярный, упорядоченный алгорифм» исчисления бесконечно малых. Мы уже приводили критические высказывания Карно об исчислении нулей (стр. 272) и о методе пределов. Главной задачей Карно было полное обоснование

---

[1] *Л. Карно.* Размышления о метафизике исчисления бесконечно малых, стр. 243.

[2] Рукопись «Рассуждения» хранится в Центральном архиве Германской академии наук в Берлине (Zentrales Archiv der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Sign. A. A. W: 1261—62. Preisschrift № 5 für das Jahr 1786). Фиксимиле рукописи опубликовано в книге: *Ch. C. Gillispie.* Lazare Carnot savant... with fascimile reproduction of his unpublished writings on mechanics and the calculus and an essay concerning the latter by A. P. Youschkevitch. Princeton, 1971.

[3] *Л. Карно.* Размышления о метафизике исчисления бесконечно малых, стр. 265.

исчисления Лейбница в его классической форме, в которой дифференциал определяется как бесконечно малое приращение, бесконечно малая дуга кривой отождествляется со стягивающей ее хордой и т. д.

Краеугольным камнем концепции Карно служила последовательная трактовка бесконечно малой величины, как переменной, значения которой сколь угодно приближаются к нулю, и, вместе с тем, как разности между переменной и ее пределом, если такой предел существует. В этом отношении Коши не добавил ничего нового. Теперь такая трактовка представляется естественной, но для XVIII в. она была отнюдь не тривиальна и впервые ставила на принципиально одинаковый уровень строгости метод пределов и метод бесконечно малых. В самом начале «Рассуждения» Карно указывает, что точное понятие бесконечно малой весьма просто и непосредственно связано с понятием предела, которое столь ясно, что математики обыкновенно даже считают излишним его определять. Объединяя термином «инфинитезимальные величины» бесконечно малые и бесконечно большие, он дает здесь следующее определение: «Те инфинитезимальные величины, предел или последнее значение которых есть 0, называются бесконечно малыми»[1]. Во втором издании «Размышлений» бесконечно малая определяется непосредственно и понятие предела рассматривается значительно позднее, но здесь также неоднократно подчеркивается, что каждое из обоих понятий приводится к другому. Поэтому «ошибочно полагать, будто метод пределов является более строгим, чем метод обыкновенного анализа бесконечно малых»[2]; если точен первый, в чем никто не сомневается, значит точен и второй.

Другая руководящая идея Карно состояла, как сказано, в том, что исчисление бесконечно малых основано на общем принципе компенсации ошибок. При доказательстве этого принципа он в «Рассуждении» и издании «Размышлений» 1797 г. пользовался понятиями и предела и бесконечно малой, а в издании 1813 г.— только вторым. Прежде всего Карно различает систему означенных величин (quantités désignées) — это наши постоянные $a, b, c, \ldots$ и переменные $x, y, z, \ldots$ и систему вспомогательных или неозначенных величин, которые, как он выражается, в соответствии с условиями задачи «нечувствительными степенями» (par degrés insensibles) приближаются к означенным, т. е. отличаются от последних бесконечно мало. Далее вводится понятие несовершенного уравнения (équation imparfaite), которое в «Рассуждении» и первом издании «Размышлений» определяется как приближенное уравнение, точное в пределе или такое, что отношение обеих частей его имеет пределом единицу, а во втором издании «Размышлений» — как уравнение, погрешность которого бесконечно мала. Затем эффект компенсации ошибок поясняется на примере построения касательной к окружности $y^2 = 2ax - x^2$, причем уравнения, соответствующие (1) и (2) в аналогичном примере Беркли (стр. 258), оказываются несовершенными. Самый принцип компенсации доказан в «Рассуждении» в серии пяти теорем. Согласно первой, точное или несовершенное уравнение при замене какой-либо переменной на другую, разнящуюся от нее бесконечно мало, переходит либо в точное, либо, по меньшей мере, в несовершенное уравнение. Доказательство проводится в терминах ме-

---

[1] *L. Carnot.* Dissertation sur la théorie de l'infini mathématique, p. 9. Прямого определения понятия предела Карно здесь не дает, но с достаточной полнотой и ясностью описывает его в § 1, 4 и 5.

[2] *Л. Карно.* Размышления о метафизике исчисления бесконечно малых, стр. 275.

тода пределов. Вторая теорема гласит, что уравнение, содержащее только означенные количества, не может быть несовершенным. Из этих предложений следует третья теорема: уравнения (1), полученные из точных или несовершенных уравнений посредством преобразований, при которых они не перестают быть по меньшей мере несовершенными, и (2), содержащие лишь означенные количества, являются совершенно точными. Затем формулируется аналогичная теорема для исчисления исчезающих величин Эйлера и, путем объединения двух последних предложений, получается теорема пятая, содержащая «основной принцип исчисления бесконечного»: «Если дано уравнение, обе стороны которого разнятся между собой бесконечно мало ..., то какую-либо входящую в них величину можно заменить другой, бесконечно мало от нее отличной, причем от этого не произойдет никакой ошибки в означенном результате; и дело обстоит также во всех предложениях, которые можно выразить подобного рода уравнениями»[1].

Метод пределов Карно, подобно Люилье и независимо от него, дополнил специальным знаком предела в виде буквы L и теоремой о пределе отношения, которую записал в виде $L\,\frac{Y}{Z}=\frac{LY}{LZ}$ и считал действительной также для исчисления нулей, когда $LY=LZ=0$[2]. Кроме того, в «Рассуждении» впервые появляется теорема о равенстве предела означенной величины ей самой, т. е., в частности, о пределе постоянной величины; в первом издании «Размышлений» Карно пояснил, что для этого понятие предела нужно толковать расширительно.

Особый интерес представляет попытка Карно дополнить метод пределов так, чтобы в нем оказалось возможным отделять бесконечно малые друг от друга и оперировать с ними по отдельности. К числу основных понятий анализа Карно относил и производную, которую назвал «дифференциальным моментом» (moment différentiel) функции и обозначал символами вроде $L\,\frac{dy}{dx}$. Это необычное для нас обозначение связано было с тем, что Карно не отличал бесконечное малое приращение величины от ее дифференциала и определил дифференциальный момент как предел отношения дифференциала функции к дифференциалу аргумента. Для дифференциального момента Карно употреблял и другое обозначение Dy, которое иногда применял раньше Иоганн I Бернулли, а после Карно — Арбогаст. Чтобы отделить друг от друга в выражениях вида $L\,\frac{dy}{dz}$ бесконечно малые dy и dz, Карно рассматривает переменные y и z как функции некоторого параметра, скажем x. Тогда, согласно теореме о пределе частного, $L\frac{dy}{dz}$ можно записать в виде $L\,\frac{dy/dx}{dz/dx}=\frac{Ldy/dx}{Ldz/dx}$, или, что то же, Dy/Dz. В этом последнем выражении мы имеем дело уже с дробью, где Dy и Dz отделены и вместе с тем характеристика D подчиняется тому же алгоритму, что и характеристика d в исчислении Лейбница. Таким образом, метод пределов, сохраняя свою точность, приобретает ту же алгоритмическую простоту, что исчисление бесконечно малых; все формальные приемы в обоих становятся тождественными при замене бесконечно малых

---

[1] *L. Carnot*. Dissertation sur la théorie de l'infini mathématique, p. 61. Во втором издании «Размышлений» вся теория несовершенных уравнений изложена в терминах исчисления бесконечно малых.

[2] В соответствии со смыслом, какой придается в нем символу 0/0.

дифференциалов соответствующими конечными дифференциальными моментами. Здесь возникает такая же ситуация, как в методе флюксий Ньютона, где нашей производной dy/dz соответствует отношение флюксий y/z, причем y и z зависят от универсального параметра «времени t». Во всех преобразованиях флюксии $\dot{y}$, $\dot{z}$ играют ту же роль, что наши дифференциалы dy, dz. Как заметил А. Н. Колмогоров, совпадение приемов исчисления флюксий с трактовкой дифференциала функции, как произведения ее производной на произвольное постоянное приращение аргумента, совершенно естественно: если взять $\Delta t = 1$, то $dx = \dot{x}\Delta t = \dot{x}$ и $dy = \dot{y}\Delta t = \dot{y}$[1]. Эту мысль в других словах выразил Карно в § 142—143 второго издания «Размышлений».

Замысел Карно сообщить методу пределов алгорифмические свойства исчисления бесконечно малых является одной из наиболее интересных особенностей его «Рассуждения». В этом, как и в трактовке понятия бесконечно малого, Карно предвосхищал идеи реформы Коши, который также поставил перед собой цель сочетать строгость, присущую теории пределов, с простотой алгорифма бесконечно малых. Однако Коши для этого произвел гораздо более радикальную перестройку анализа. Устанавливая формальное тождество операций над символами Dy и dy, Карно еще не решил выдвинутую им задачу: ведь «отделены» были в символе $L\frac{dy}{dz}$ не бесконечно малые приращения или дифференциалы в его смысле слова, а конечные величины Dy и Dz, пропорциональные дифференциалам в нашем смысле слова. Вероятно, автор «Рассуждения» сам не был вполне доволен полученными в этом направлении результатами. Во всяком случае эту часть рукописи он полностью исключил из печатного текста «Размышлений».

При подготовке к печати первого издания «Размышлений» (1797) Карно внес и некоторые другие изменения, сохраняя, однако, при обосновании принципа компенсации ведущее место за понятием предела; многие пассажи рукописи вошли в книгу целиком. «Размышления» быстро приобрели широкую известность. Лакруа с похвалой отозвался о них в предисловии к своему трактату и кратко изложил ее принципиальные установки; на протяжении короткого времени появились португальский (1798), немецкий (1800), английский (1800—1801), итальянский (1803), а затем и русский (1823) переводы. Но, разумеется, теория несовершенных уравнений, не уступая в строгости другим концепциям анализа того времени, и не превосходила их в этом. Достаточно сказать, что область применения общего принципа компенсации оставалась неопределенной и не было средств выяснить, какой класс задач выражается несовершенными уравнениями и каков класс допускаемых в теории преобразований. Впрочем, центральное в теории Карно понятие несовершенного уравнения естественно утратило значение в теории пределов Коши: сам Карно в обоих изданиях «Размышлений» отметил, что в методе пределов такие уравнения заменяются совершенно точными.

На втором издании «Размышлений» (1813), существенно переработанном и дополненном, мы можем не задерживаться, так как основное его отличие от первого издания и «Рассуждения» было уже отмечено.

---

[1] *А. Н. Колмогоров.* Ньютон и современное математическое мышление.— В сб.: Московский университет — памяти Ньютона, стр. 40.

Теория производных функций Лагранжа

В XVIII в. были сделаны также попытки обоснования анализа с помощью средств, которые представлялись чисто алгебраическими. Здесь следует прежде всего назвать английского математика-самоучку Джолана Ландена (1719—1790), имя которого носит одно важное преобразование в теории эллиптических интегралов. Свои взгляды Ланден изложил в книге «Рассуждение о разностном анализе: новая ветвь алгебраического искусства» (A discourse concerning residual analysis: a new branch of algebraic art. London, 1758). Понятию производной у Ландена соответствует «специальное значение» частного $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ при $y=x$, для которого он ввел особый знак; так, в случае x^3 специальным значением частного $\frac{y^3-x^3}{y-x}=y^2+xy+x^2$ является $3x^2$. Для степенной функции $x^{m/n}$, где m, n — целые числа, Ланден доказывал формулу[1]

$$\frac{y^{m/n}-x^{m/n}}{y-x}=x^{\frac{m}{n}-1}\ \frac{1+\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2+\ldots+\left(\frac{y}{x}\right)^{m-1}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{m}{n}}+\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2m}{n}}+\ldots+\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{(n-1)m}{n}}};$$

положив $y=x$, он вывел таким образом производную степенной функции с рациональным показателем. Он пытался обобщить свой вывод и на иррациональные показатели, беря для примера показатель $\sqrt{2}$, рассматриваемый как «последнее значение» своих десятичных приближений 1, $\frac{14}{10}$, $\frac{141}{100}$ и т. д. Отыскание же производной любой функции сводилось в принципе к почленному дифференцированию степенного ряда, поскольку заранее предполагалось, что разность $f(y)-f(x)$ разлагается по степеням разности $y-x$. По существу Ланден доопределял функцию $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ для значения $y=x$ по непрерывности, подобно Ньютону и Эйлеру,— еще Лакруа в своем «Трактате» указывал, что разностный анализ сводится к методу пределов. Лагранж, который развил собственную алгебраическую концепцию анализа несколько позднее, писал, что Ландену действительно удалось избежать бесконечно малых и исчезающих количеств, но характеризовал приемы и применения разностного анализа как «затруднительные и мало естественные»[2].

Центральную мысль своей теории производных функций Лагранж впервые высказал в мемуаре «О новом роде исчисления, относящегося к дифференцированию и интегрированию переменных величин» (Sur une nouvelle espèce du calcul relatif à la différentiation et à l'intégration des quantités variables. Nouv. Mém. Ac. Berlin, (1772) 1774). Эта мысль заключается в следующем: при записи разложения функции u от $x+\xi$ по степеням ξ в форме

$$u+u'\xi+\frac{u''}{2}\xi^2+\frac{u'''}{2\cdot 3}\xi^3+\ldots$$

функции u, u', u'', u''', ... последовательно получаются одна из другой, на-

[1] Эта формула для положительных m, n легко выводится путем деления y^m-x^m на $y-x$, а также на $y^{m/n}-x^{m/n}$, после чего немедленно распространяется на отрицательные показатели.

[2] *J. L. Lagrange.* Théorie des fonctions analytiques. Paris, 1813, p. 4.

чиная с u', по одному и тому же правилу: каждая из них есть коэффициент при первой степени в разложении по степеням ξ, ей предшествующей. Таким образом, все эти функции могут быть произведены (dérivées) из начальной u с помощью повторного применения операции разложения в степенной ряд — операции, которую Лагранж считал чисто алгебраической.

Функции u', u'', u''', ... Лагранж назвал производными от начальной; обозначения $\varphi' x = \frac{d\varphi x}{dx}$, $\varphi'' x = \frac{d\varphi' x}{dx}$ и т. п., без скобок, он применил еще ранее в одной статье, напечатанной в «Miscellanea Taurinensia», 1760—1761. Мы отмечали ранее, что еще Эйлер в 1755 г. особенно подчеркивал возможность нахождения производной из разложения в степенной ряд (см. стр. 269). Лагранж положил эту идею в самое основание анализа. Развернутое построение системы анализа на этой основе Лагранж дал только четверть века спустя, но еще до того два математика, вероятно, вдохновляемые мемуаром Лагранжа 1772 г., развили, каждый по-своему, начала такого построения. Первым из них был Кондорсе, который в 1778—1782 гг. готовил энциклопедический курс анализа под названием «Трактат по интегральному исчислению» (Traité du calcul intégral), оставшийся незаконченным. Рукопись и некоторое число уже набранных ее листов хранятся в библиотеке Национального института в Париже. К ним приложена записка Лакруа, где, между прочим, сказано: «Изложение начал дифференциального исчисления, полностью содержащееся в отпечатанных листах, будучи независимым от какого-либо понятия о *бесконечно малых* и о *пределах*, показалось бы новым в случае публикации, ибо тогда по этому вопросу был известен только мемуар Лагранжа, помещенный в томе Берлинской академии за 1772 г.» [1]. Наряду с этим Лакруа отмечал большую сложность вычислений Кондорсе в сравнении с изложением в позднейших трудах Лагранжа. Мы можем ограничиться указанием, что Кондорсе вводил последовательные производные точно так же, как Лагранж (ср. стр. 288), и что он один из первых, если не первый, стал употреблять термин «аналитическая функция».

Другим единомышленником Лагранжа явился Франсуа Луи Антуан Арбогаст (1759—1803), воспитанник университета в Страсбурге, профессор математики в различных учебных заведениях Эльзаса, член Института, т. е. Академии наук в Париже, и в 1793—1795 гг. депутат Национального конвента, активно участвовавший в реформе народного образования. В апреле 1789 г. Арбогаст представил Парижской академии «Опыт о новых началах дифференциального и интегрального исчисления, независимых от теорий бесконечно малых и пределов» (Essai sur les nouveaux principes du calcul différentiel et de calcul intégral, indépendants de la théorie des infiniment petits et de celle de limites). Работа была передана на заключение Лежандру и Лагранжу, которые представили свой отзыв в мае. Отзыв, по-видимому, пропал, а рукопись не увидела света и хранится в настоящее время во Флоренции [2]. Сжатое изложение принципов этого труда, публикации которого помешали перерыв в 1790 г. издания ученых записок Парижской академии, затем бурные политические события того времени и, наконец, выход в 1797 г. «Теории аналитических функций»

---

[1] Эта записка Лакруа находится в начале первого из трех томов, содержащих как рукописи Кондорсе, так и набранные листы (Bibliothèque de l'Institut de France, MS, № 877—879). Оценка того же труда имеется во введении Лакруа к «Traité du calcul différentiel et du calcul intégral», t. 1, Ed. 2, p. XXII—XXIV.

[2] Biblioteca Laurentiana, Codex Ashburnham, Appendix, sign. 1840.

Лагранжа, Арбогаст дал в предисловии к своей книге «Об исчислении дериваций» (Du calcul des dérivations. Strasbourg, an VIII [1] (1800).

«Опыт» Арбогаста состоит из двух отделов. В первом определяются дифференциалы различных порядков через коэффициенты ряда Тейлора, а самый ряд выводится при двух предположениях: 1) что произвольная функция y представима обобщенным степенным рядом

$$y = Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + \ldots,$$

где α, β, γ, ... — любые действительные числа, и 2) что биномиальное разложение справедливо для всех действительных показателей. Арбогаст записывает приращенное значение функции

$$y + \Delta y = A(x + \Delta x)^{\alpha} + B(x + \Delta x)^{\beta} + C(x + \Delta x)^{\gamma} + \ldots$$

в виде ряда по степеням Δx

$$y + \Delta y = \left\{\begin{matrix} Ax^{\alpha} \\ + Bx^{\beta} \\ + Cx^{\gamma} \\ + \ldots \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} Ax^{\alpha'} \\ + Bx^{\beta'} \\ + Cx^{\gamma'} \\ + \ldots \end{matrix}\right\} \Delta x + \frac{1}{1\cdot 2} \left\{\begin{matrix} Ax^{\alpha''} \\ + Bx^{\beta''} \\ + Cx^{\gamma''} \\ + \ldots \end{matrix}\right\} \Delta x^2 + \ldots,$$

где $x^{\alpha'}$, $x^{\alpha''}$, ... обозначают соответственно величины $\alpha x^{\alpha-1}$, $\alpha(\alpha - 1)\, x^{\alpha-2}$, ... и т. п. Обозначив выражения в фигурных скобках, после первого, равного y, через p, q, r, ..., Арбогаст получает

$$y + \Delta y = y + p\Delta x + \frac{1}{1\cdot 2} q\Delta x^2 + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} r\Delta x^3 + \ldots$$

и констатирует, что коэффициенты последнего ряда, начиная с члена второй степени, последовательно умноженные на 1.2, 1.2.3, ..., «производятся одни из других таким же способом и следуя тому же приему, как коэффициент при Δx производится из функции y» [2]. Выражения $p\Delta x$, $q\Delta x^2$, $r\Delta x^3$, ... Арбогаст называет первым, вторым, третьим, ..., дифференциалами функции y и затем применяет общеупотребительную символику. Далее Арбогаст утверждает, что при достаточно малом приращении Δx ряд Тейлора сходится, а каждый член его оказывается (по абсолютной величине) бо́льшим (абсолютной величины) суммы всех следующих за ним членов. На этой основе выведены главные правила дифференцирования функций одного переменного и приемы отыскания экстремумов. Во втором отделе содержатся начала теории соприкосновения плоских кривых и вычислены дифференциалы площади и длины дуги кривой в прямоугольных координатах.

---

[1] В этой книге строятся формальные алгоритмы дифференциального характера для разложений в степенные ряды различных функций одной или многих переменных, например, $\varphi(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \ldots)$. Деривации, которые Арбогаст обозначал символами D, D^2,..., D^n, представляют собой дифференциальные операторы типа производных и в простейшем случае функции $f(x)$ совпадают с ее производными. Довольно подробное изложение начал деривационного исчисления имеется в книге: *В. Я. Буняковский*. Лексикон чистой и прикладной математики, т. I. СПб., 1839, стр. 349—354.

[2] Цит. по докторской диссертации: *K. Zimmermann*. Arbogast als Mathematiker und Historiker der Mathematik. Heidelberg, 1934, S. 46. Фотокопия этой редкой работы была любезно предоставлена профессором Р. Татоном (Париж).

Лагранж высоко оценил работу Арбогаста и во введении к первому изданию «Теории аналитических функций» (1797), упомянув о своем мемуаре 1772 г., писал, что позднее Арбогаст представил Академии наук «*прекрасный мемуар*, в котором та же мысль изложена с принадлежащими ему развитиями и приложениями. *Это сочинение не оставляет ничего пожелать в вопросе, о котором идет речь*» [1]. Во втором издании той же книги (1813) приведенные курсивом слова отсутствуют [2]. И. Ю. Тимченко по этому поводу заметил, что «Лагранж, очевидно, принимал слишком близко к сердцу вопрос о приоритете теории аналитических функций» [3]. Впрочем, приоритет действительно принадлежал Лагранжу.

Полное название не раз цитированного труда Лагранжа выражает его основную установку: «Теория аналитических функций, содержащая начала дифференциального исчисления, освобожденные от всякого рассмотрения бесконечно малых, исчезающих, пределов и флюксий и сведенные к алгебраическому анализу конечных величин» (Théorie des fonctions analytiques contenant les principes du calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits, d'évanouissants, de limites et de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies. Paris, 1797; 2-е пересмотренное и дополненное издание. Париж, 1813). Книга возникла в связи с тем, что Лагранж стал читать курс анализа в Политехнической школе; к ней очень близки «Лекции об исчислении функций» (Leçons sur le calcul des fonctions), напечатанные сперва в «Séances de l'Ecole normale», an IX (1801); второе значительно дополненное издание вышло в Париже в 1806 г.

«Теория аналитических функций» заключает, помимо введения, три части: 1) изложение теории и ее главных применений в анализе; 2) приложения к геометрии, 3) приложения к механике, причем во всей книге нет ни одного чертежа, как, впрочем, и в «Аналитической механике» Лагранжа. Введение к книге содержит сжатый историко-критический очерк существовавших в XVIII в. методов обоснования анализа. Дифференциальное и интегральное исчисление Лейбница Лагранж по-прежнему считал исчислением компенсирующихся ошибок; задачу общего доказательства неизбежности такой компенсации он считал нерешенной и после выхода в свет первого издания «Размышлений» (1797) Карно. В методе пределов Лагранж усматривал тот же недостаток, что и в концепции Эйлера: в обоих случаях дело приводится к рассмотрению отношений между нулями, а такое отношение перестает быть для разума ясной и точной идеей. Этим и другим методам он противопоставлял теорию аналитических функций. Необходимо, однако, напомнить, что в этот термин Лагранж вкладывал смысл, несколько отличный от современного. В «Рассуждении о предмете теории аналитических функций» (Discours sur l'objet de la théorie des fonctions analytiques. Journal de l'Ecole Polytechnique, an VII (1799) он разделяет все учение о функциях на две ветви. К первой относится алгебра, где изучаются лишь первоначальные функции, происходящие в результате алгебраических действий над переменными и числами. Вторая ветвь — это теория аналитических функций, в которой рассматриваются не только первоначальные функции, возникающие при любых вычисле-

[1] *J. L. Lagrange.* Théorie des fonctions analytiques. Paris, an V (1797), p. 5.
[2] *J. L. Lagrange.* Théorie des fonctions analytiques. Nouv. éd. Paris, 1813, p. 5.
[3] *И. Ю. Тимченко.* Основания теории аналитических функций, т. I, ч. I. Одесса, 1899, стр. 324.

ниях (Лагранж иногда называл функции expressions de calcul), но и их производные функции. Вместе с тем Лагранж, как и его предшественники, был уверен, что изучаемые в анализе функции, вообще говоря, являются аналитическими в том смысле слова, какой ему придал Вейерштрасс.

Начала своей теории Лагранж закладывает в первых двух главах труда, о котором идет речь. Он прежде всего желает обосновать постоянно обнаруживаемый в практике вычислений факт, что любая функция $f(x)$ при подстановке $x + i$ вместо x раскладывается в ряд вида

$$f(x+i) = f(x) + p(x)i + q(x)i^2 + \ldots$$

Сперва доказывается, что разложение не может содержать дробных положительных степеней i, за исключением отдельных особых значений x. Радикалы, содержащие i, рассуждает Лагранж, могут произойти только от радикалов, имеющихся в первоначальной функции $f(x)$. Но в таком случае допущение членов вида $ui^{m/n}$ приводит к нелепости: ряд $f(x) + pi + qi^2 + \ldots + ui^{m/n} + \ldots$, в котором все возможные значения $f(x)$ комбинируются с каждым из значений радикала $\sqrt[n]{i^m}$, дает для $f(x+i)$ больше различных значений, чем их имеет $f(x)$; между тем, если x и i остаются неопределенными, то число этих значений в обоих случаях должно быть одинаково. Лишь при отдельных определенных значениях x некоторые радикалы в $f(x)$ могут уничтожиться, сохраняясь в $f(x+i)$. Подобного рода исключительные случаи рассмотрены в V главе [1].

Затем Лагранж показывает, что разложение функции $f(x+i)$ не может, вообще говоря, содержать отрицательные степени i: член вида r/i^m при $i = 0$ стал бы бесконечным и, значит, должна была бы стать бесконечной при неопределенном x функция $f(x)$, между тем как это может случиться только при особых значениях x.

Подчеркнем еще раз, что Лагранж, как и все математики XVIII в., заранее принимал, что любая функция анализа представима рядом по каким-либо действительным степеням и в доказательстве, с его точки зрения, нуждалось только предложение, что такой ряд, вообще говоря, содержит лишь целые положительные степени, между тем как другие степени встречаются исключительно в разложениях, соответствующих изолированным особым значениям аргумента. В V главе «Теории аналитических функций» он писал, что «разложение $f(x) + i\,f'(x) + \frac{i^2}{2} f''(x) +$ и т. д. может стать ошибочным для какого-либо данного значения x лишь в случае, если для этого значения x станет бесконечной одна из функций $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ и т. д., так же как и все следующие. Тогда, если n есть индекс первой ставшей бесконечной функции, разложение, о котором идет речь, должно будет содержать член вида i^m, где m — число, заключенное между $n-1$ и m. А если становятся бесконечными для одного и того же значения x все функции $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ и т. д., то разложение $f(x+i)$ содержит в этом случае отрицательные степени i» [2]. Более подробно последний случай Лагранж рассмотрел в VIII главе «Лекций об исчислении функций». Однако приведенные выше рассуждения Лагранжа опирались не только на допущение о представимости произвольной функции обобщенным сте-

[1] Если, например, $f(x) = (x-a)\sqrt{x-b}$, то при $x = b$ функция $f(b)$ обращается в нуль, между тем как $f(b+i)$ содержит радикал $f(b+i) = (b-a)i^{1/2} + i^{3/2}$.
[2] *J. L. Lagrange.* Théorie des fonctions analytiques, p. 51.

пенным рядом, но и на уверенность в том, что выведенные посредством формальных алгебраических преобразований ряды представляют соответствующие функции, вообще говоря, повсюду, так что свойства, принадлежащие при каких-либо значениях x, i ряду, принадлежат и функции. Между тем Коши показал, что сходящийся ряд Тейлора не обязательно сходится к порождающей его функции, и тем самым выявил принципиальную недостаточность теории Лагранжа (см. стр. 300).

Установив общий вид степенного ряда, выражающего данную функцию, Лагранж переходит к рассмотрению его членов. Так как разность $f(x+i) - f(x)$ равна нулю при $i = 0$, то она может быть представлена в виде произведения целой положительной степени i на некоторую функцию $P(x, i)$, конечную при $i = 0$. Таким образом, можно положить $f(x+i) = f(x) + iP$. Если функция $P(x, i)$ при $i = 0$ обращается в $p(x)$, то аналогично $P = p + iQ$, где $Q(x, i)$ обращается в $q(x)$ при $i = 0$; при сходных обозначениях далее получается, что $Q = q + iR$, $R = r + iS$ и т. д., так что

$$f(x+i) = f(x) + iP = f(x) + ip + i^2Q = f(x) + ip + i^2q + i^3R = \ldots$$

и в итоге для разложения $f(x+i)$ получается тот ряд, какой был предположен вначале. Описанный прием может быть употреблен для непосредственного разложения рациональных функций, а также иррациональных алгебраических функций, что Лагранж иллюстрирует на примерах $1/x$ и $\sqrt{x}$. Коэффициенты разложения выступают при этом вычислении как «специальные значения» Ландена (стр. 282). Так, коэффициент p есть значение при $i = 0$ функции P или же равного ей выражения $\frac{f(x+i) - f(x)}{i}$, в котором деление на i уже произведено.

Из способа образования ряда легко следует теорема: величине i всегда можно дать столь малое значение, чтобы каждый член ряда $f(x) + pi + qi^2 + ri^3 + \ldots$ оказался больше суммы всех следующих за ним членов, и то же справедливо для всех значений i, еще меньших, чем уже выбранное значение (разумеется, сравниваются абсолютные значения соответствующих величин). «Эту теорему,— писал Лагранж,— следует рассматривать как один из „фундаментальных принципов“ его теории и ее молчаливо предполагают в дифференциальном и флюксионном исчислении» [1]. Последнее утверждение не вполне справедливо; Эйлер высказывал это предложение достаточно ясно, хотя и не в форме специальной теоремы (стр. 270), а Арбогаст и как общую теорему анализа (стр. 284). Впрочем, сам Лагранж, как мы вскоре увидим, пользовался не столько этой теоремой, сколько формулой Тейлора с остаточным членом. Нужно добавить, что вывод теоремы очевидным образом предполагает существование сходящегося к $f(x+i)$ ряда и Лагранж вовсе не имел в виду доказывать таким образом его сходимость [2].

---

[1] *J. L. Lagrange.* Théorie des fonctions analytiques, p. 16.

[2] Судя по некоторым выражениям Лагранжа, он не был до конца уверен в универсальности излагаемых методов. В конце рассматриваемой главы он подчеркивает, что прием последовательного определения членов степенного ряда и вытекающая из него теорема применимы постольку, поскольку функция x и i может быть приведена к ряду по целым положительным степеням i. «Ибо рассуждение..., с помощью которого мы доказали, что всякая функция $x + i$, вообще говоря, приводима к такому виду, не может быть применено к любой функции x и i». См. *Lagrange.* Théorie des fonctions analytiques, p. 16.

В главе II устанавливается общий закон последовательного образования функций p, q, r, ..., порождаемых разложением в ряд $f(x+i)$. С этой целью в общую формулу

$$f(x+i) = f(x) + pi + qi^2 + ri^3 + \ \ldots$$

вместо i подставляется $i + o$, что дает, если выписать только первые два члена каждой степени двучлена,

$$f(x+i+o) = \\ = f(x) + pi + qi^2 + ri^3 + si^1 + \ldots + po + 2qio + 3\ ri^2o + 4\ si^3o + \ldots$$

Затем в ту же формулу вместо x подставляется $x + o$, причем первые два члена разложений функций f, p, q, r, ... по степеням o пишутся в виде $f(x+o) = f(x) + f'(x)\,o + \ldots$, $p(x+o) = p + p'o + \ldots$ и т. д., так что

$$f(x+o+i) = \\ = f(x) + pi + qi^2 + ri^3 + si^4 + \ldots + f'(x)o + p'io + q'i^2o + r'i^3o + \ldots$$

Сравнение в обоих представлениях $f(x+i+o)$ членов, содержащих множители o, io, i^2o, ..., показывает, что

$$p = f'(x),\ q = p'/2,\ r = q'/3,\ s = r'/4,\ \ldots$$

Если для единообразия обозначить коэффициенты при первой степени приращения аргумента в разложении приращенной первоначальной функции $f(x)$ через $f'(x)$, в разложении функции $f'(x)$ через $f''(x)$, в разложении $f''(x)$ через $f'''(x)$ и т. д., то последние равенства можно переписать в виде:

$$p = f'(x), \qquad q = \frac{f''(x)}{2}, \qquad r = \frac{f'''(x)}{2\cdot 3}, \ldots,$$

а само разложение $f(x)$ примет вид

$$f(x+i) = f(x) + f'(x)\,i + \frac{f''(x)}{2}\,i^2 + \frac{f'''(x)}{2\cdot 3}\,i^3 + \ldots$$ [1]

Функцию $f(x)$ Лагранж, как и в 1772 г., назвал начальной или первообразной (fonction primitive) по отношению к производимым из нее функциям $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, ..., а эти функции — производными (fonctions dérivées), причем сокращенно именовал $f'(x)$ первой функцией, $f''(x)$ второй функцией, $f'''(x)$ третьей функцией и т. д., впоследствии стали говорить о первой, второй, третьей и т. д. производной или о производной соответственного порядка.

Общий прием дифференцирования состоит, таким образом, в нахождении линейного члена ряда Тейлора для данной первообразной функции. Именно так выведены основные формулы производных в III главе «Теории аналитических функций». Считая известными для любого действительного показателя первые два члена биномиального разложения $(x+i)^m = x^m + mx^{m-1}i + \ldots$ (ср. стр. 294), Лагранж получает производную сте-

[1] Аналогично вывел зависимость между коэффициентами ряда Тейлора Кондорсе в рукописи, упомянутой на стр. 283.

пенной функции. Для показательной функции $f(x) = a^x$, $f(x+i) = a^x a^i$, и если положить $a = 1 + b$, то

$$a^i = (1+b)^i = 1 + ib + \frac{i(i-1)}{2} b^2 + \ldots$$

или, располагая по степеням i и обозначая $b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \ldots = A$, $a^i = 1 + Ai + \ldots$, поэтому $f'(x) = Aa^x$. Расходимость ряда, выражающего A, вне промежутка $-1 < b \leqslant 1$, не лишает в глазах Лагранжа вывод законной силы, но он тут же, найдя разложение

$$a^x = 1 + Ax + \frac{A^2x^2}{2} + \ldots,$$

полагает в нем $x = 1/A$, находит, что $a^{1/A} = e$, и затем, перейдя к логарифмам, получает, что A есть гиперболический логарифм a. Дифференцирование синуса и косинуса по формулам Эйлера сводится к рассмотренному выше. Мы покажем для образца еще вывод правила дифференцирования функции от функции. Положим, что $y = f(p)$, где p зависит от x; пусть приращению x на i соответствует приращение p на o. Тогда

$$f(p+o) = f(p) + of'(p) + \frac{o^2}{2} f''(p), + \ldots,$$

$$p + o = p(x+i) = p + ip' + \frac{i^2}{2} p'' + \ldots,$$

так что, подставляя $o = ip' + \frac{i^2}{2} p'' + \ldots$ в выражение для $f(p+o)$, найдем

$$f(p+o) = f(p) + ip'f'(p) + \frac{i^2}{2} [p'^2 f''(p) + p''f'(p)] + \ldots,$$

а следовательно, $y' = f'(p)p'$.

Центральное место в «Теории аналитических функций» занимает VI глава первой части (в «Лекциях об исчислении функций» ей соответствует IX лекция). Здесь Лагранж поставил вопрос об оценке в общей форме точности приближений, доставляемых суммой конечного числа членов ряда Тейлора, и вывел формулу Тейлора с остаточным членом, и, в частности, теорему о конечном приращении («формулу Лагранжа»), причем записал последнюю в виде

$$f(z+x) = f(z) + xf'(z+u),$$

где u — численно неизвестное значение аргумента, заключенное между 0 и x. Мы еще вернемся к этому вопросу (см. стр. 294 и след.), пока же ограничимся замечанием, что в последующем изложении Лагранж многократно применяет именно формулу Тейлора с остаточным членом и теорему о конечном приращении, сообщая исследованию близкий к современному характер и систематически подготовляя почву для развития «математики неравенств». Так он исследует во второй части «Теории» экстремумы функции, так он строит теорию соприкасания кривых или же вычисляет производную площади криволинейной трапеции по абсциссе в декартовых прямоугольных координатах и т. д. Задачу о касательной Лагранж решил, исходя, подобно Маклорену, из определения касательной в данной точке кривой, как прямой, между которой и кривой нельзя провести через

эту точку какую-либо другую прямую. Допустим, что уравнение кривой есть $y = f(x)$ и данная точка $M(x_1, y_1)$, тогда сравнение в соседстве с точкой M разности ординат кривой и прямой $y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1)$ с разностью ординат кривой и какой-либо другой прямой $y - y_1 = k(x - x_1)$ показывает, что если вторая прямая, по предположению, проходит между кривой и первой прямой, то $k = f'(x_1)$, т. е. вторая прямая совпадает с первой, которая и является касательной.

В VI главе второй части рассматриваемого труда привлекает внимание доказательство «общей леммы», которая затем используется при оценке остатка формулы Тейлора и которая гласит, что функция $f(x)$, имеющая всюду на отрезке $(a, b; a < b)$ положительную производную $f'(x)$, на этом отрезке возрастает. По своему характеру это доказательство сходно с теми, какие получили распространение в анализе и теории функций в XIX в.; оно чисто аналитическое и опирается на содержательное рассмотрение свойств функций. Сперва Лагранж доказывает, как сказали бы мы теперь, что функция, производная которой в некоторой точке положительна, в этой точке возрастает: «Обратимся вновь к формуле $f(x + i) = fx + iP$, где P есть функция x и i, которая при $i = 0$ обращается в $f'x$ (парагр. 3, 8); очевидно, что если $f'x$ положительна, то значение P обязательно будет положительным от $i = 0$ до некоторого значения i, которое можно будет взять сколь угодно малым»[1]. Отсюда Лагранж делает вывод, что можно, поскольку $f'(x) > 0$ на всем отрезке, выбрать столь малое положительное i, что разность $f(x + i) - f(x)$ будет положительной для любых значений x. Поэтому полагая $a + (n + 1)\, i = b$, можно взять n столь большим и соответственно i столь малым, чтобы оказались положительными все разности $f(a + i) - f(a)$, $f(a + 2i) - f(i), \ldots, f[a + (n + 1)i] - f(a + ni)$. Сложение этих разностей дает, что $f(b) - f(a) > 0$. Для нас возрастание $f(x)$ в точке x, где $f'(x) > 0$, следует из современного определения производной, для Лагранжа оно являлось следствием из равенства $f(x + i) - f(x) = Pi = pi + i^2Q$, установленного в § 3, на который он ссылается в приведенной цитате. Вторая часть рассуждения, т. е. переход к отрезку, представляет большие трудности, чем это могло казаться во времена Лагранжа, да и позднее: само существование одного определенного числа i, для которого все разности $f(x + i) - f(x) = Pi$ одновременно положительны, подлежит еще доказательству. В наших учебниках теорему о возрастании функции на отрезке доказывают совершенно независимо от теоремы о возрастании функции в точке, именно с помощью формулы конечных приращений (которая у Лагранжа основана на «общей лемме»).

Сочинение такого масштаба, как «Теория аналитических функций», естественно произвело сильное впечатление на современников. Но предложенное Лагранжем новое обоснование анализа не повлекло и не могло повлечь за собой отказа от разработанного на протяжении более чем столетия алгоритма исчисления бесконечно малых. В своей оценке теории Лагранжа Карно особенно подчеркивал это обстоятельство, ссылаясь к тому же на пример самого Лагранжа. В самом деле, в предисловии к новому, сильно переработанному изданию «Аналитической механики» (1788), которое вышло из печати в один год со вторым изданием «Размышлений» Карно (1813), Лагранж писал: «Мы сохранили обычные обозначения дифференциального исчисления, так как они соответствуют системе бесконеч-

[1] *J. L. Lagrange.* Théorie des fonctions analytiques, p. 63.

но малых величин, принятой в настоящем трактате. Если дух этой системы хорошо усвоен и если в точности ее результатов убедились с помощью геометрического метода первых и последних отношений или с помощью аналитического метода производных функций, то бесконечно малые величины можно применять в качестве надежного и удобного средства для сокращения и упрощения доказательств» [1]. Вместе с тем Карно отмечал, что Лагранж не смог обойтись и в самой теории производных функций без величин, которые «в продолжение всего вычисления ... всегда можно сделать сколь угодно малыми» [2], т. е. без величин бесконечно малых, в том смысле, который получал тогда все более широкое распространение.

«Математические начала» да Куньи

Оригинальное изложение анализа дал в конце XVIII в. португальский ученый Жосе Анастасио да Кунья (1744—1787), профессор математики университета в Коимбре, за свободомыслие отстраненный в 1778 г. по требованию инквизиционного трибунала, а затем, после двухлетнего тюремного заключения, директор одного колледжа. Для нужд преподавания да Кунья составил «Математические начала», полностью изданные уже после его смерти (Principios mathematicos, Lisboa, 1790). То был весьма сжато написанный энциклопедический курс элементарной и высшей математики в 21 книге, первые книги которого, по свидетельству ученика автора — Ж. М. де Абреу, выходили отдельными выпусками с 1782 г. Мы знакомы с этим трудом по французскому изданию де Абреу, который сам назвал свой перевод буквальным [3].

Более всего интересовали да Кунью вопросы обоснования математики. Об этом свидетельствуют многие отделы «Математических начал», а также упоминаемые во введении де Абреу к их французскому переводу названия нескольких других сочинений да Куньи, оставшихся, по-видимому, неопубликованными: «Предварительное рассуждение о первых началах геометрии», «О математической бесконечности», «Против метода первых и последних отношений зарождающихся и исчезающих величин Ньютона» [4].

Главные понятия анализа и алгоритм дифференцирования составляют предмет XV книги «Математических начал». Да Кунья выступает здесь как сторонник исчисления бесконечно малых, построенного на понятиях бесконечно малой и дифференциала, хотя употребляет частично и терминологию метода флюксий. Подобно Люилье, конкурсное сочинение которое ему, возможно, не было известно, он определяет бесконечно малую величину (во французском переводе infinitième) как «переменную, значение которой может всегда стать меньше любой данной величины» [5]. Аналогично определяется бесконечно большая величина. Термином предел он вовсе не пользуется. Особенно замечательно определение дифференциала функции $df(x)$, только терминологически отличающееся от его современ-

---

[1] *Ж. Лагранж.* Аналитическая механика, т. I, стр. 10.
[2] *Л. Карно.* Размышления о метафизике исчисления бесконечно малых, стр. 262.
[3] *J. A. da Cunha.* Principes mathématiques, traduits littéralement du portugais par J. M. d'Abreu. Bordeaux, 1811. Фотокопию этой книги нам любезно прислал профессор математики Ж. Г. Теишейра (Лиссабон).
[4] Следует назвать еще изданный посмертно «Опыт о началах механики»: *J. A. da Cunha.* Ensayo sobre os principios de mechanica. London, 1807.
[5] *J. A. da Cunha.* Principes mathématiques..., p. 196.

ного определения, как части приращения $\Delta f(x)$ линейной относительно Δx и обладающей тем свойством, что при бесконечно малом Δx разность $\Delta f(x) - df(x)$ бесконечно мала по сравнению с Δx. Мы приведем это определение, появляющееся у да Куньи впервые, в его собственных словах, предупредив лишь, что дифференциал он называл флюксией, независимую переменную — корнем зависящей от нее функции, а для обозначения функций рекомендовал прописные греческие буквы:

«Если обозначить dx величину, взятую однородной с корнем x, и назвать ее *флюксией* этого корня, то обозначают также $d\Gamma x$ и называют флюксией Γx величину, которая делает отношение $d\Gamma x/dx$ постоянным, а $\frac{\Gamma(x+dx)-\Gamma(x)}{dx} - \frac{d\Gamma x}{dx}$ бесконечно малой или нулем, если dx становится бесконечно малой и если все, что не зависит от dx, остается постоянным» [1]. Производная выступает только как отношение $d\Gamma x/dx$ и особого названия не получает. Всякая величина называется флюентой своей флюксии и вводится знак $\int$; далее определяются вторая, третья и т. д. флюксии (дифференциалы).

При выводе правил дифференцирования да Кунья иногда использовал разложения в бесконечные ряды, которые он получил ранее, в IX книге, и теорему о бесконечной малости многочлена $Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots$ при бесконечно малом x, которую он доказал в случае конечного числа членов, но применял и к бесконечным степенным рядам. Мы приведем полностью исключительно лаконичный вывод дифференциала степенной функции: «$d(x^n) = nx^{n-1}dx$. Ибо, если dx бесконечно мала и то, что не зависит от dx, постоянно, то $\frac{nx^{n-1}dx}{dx}$ $[= nx^{n-1}]$ становится постоянной и $\frac{(x+dx)^n - x^n}{dx} - \frac{nx^{n-1}dx}{dx}\left[= n\frac{n-1}{2}x^{n-2}dx + n\frac{n-1}{2}\frac{n-2}{3}x^{n-3}dx^2 + \text{и т. д.}\right]$ бесконечно малой» [2]. Формулу $d\ln x$ да Кунья немедленно вывел, почленно дифференцируя ряд $x = 1 + \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2 + \frac{1}{6}(\ln x)^3 + \frac{1}{24}(\ln x)^4 + \ldots$ Из остального содержания XV книги мы упомянем еще теорему о непрерывности, как сказали бы мы, дифференцируемой функции (она используется тут же при дифференцировании произведения $x\Gamma x$), а также теоремы о дифференциале площади криволинейной трапеции и о дифференциале длины дуги плоской кривой в декартовых координатах. При формулировке и доказательстве последней теоремы да Кунья устанавливает, что дифференциал функции $f(x)$ геометрически представляется приращением ординаты касательной в соответствующей точке кривой с уравнением $y = f(x)$.

Как видно, при очень малом объеме — всего 12 страниц! — XV книга «Математических начал» да Куньи была насыщена новыми интересными мыслями и подходами, которые получили развитие в ходе реформы анализа XIX в. Да Кунья весьма оригинально построил и теорию показательной функции и логарифма в IX книге (см. стр. 321). Однако ни португальское, ни французское издания его труда не получили известности, какой заслуживали.

---

[1] *J. A. da Cunha.* Principes mathématiques..., p. 197. Как уже отмечалось, термины флюксия и дифференциал нередко употреблялись в XVIII в. один вместо другого. Ср. *Л. Эйлер.* Интегральное исчисление, т. I, стр. 10.

[2] Там же, стр. 198.

Эклектизм Лакруа

Оставляя пока в стороне разработку понятия об интеграле (см. стр. 344), мы можем подвести некоторый итог исследованиям по основаниям анализа, проведенным в рассматриваемую эпоху. На рубеже XVIII и XIX вв. в этой области сложилась довольно пестрая картина. Несколько методов конкурировали между собой, причем каждый, претендуя на совершенную строгость, сохранял право на существование и за другими в качестве более или менее удобного приема изложения и исследования. В глазах одних ученых безупречная строгость была присуща только методу пределов, другие отдавали предпочтение теории производных функций, все признавали практические достоинства исчисления бесконечно малых. Эта ситуация отражалась в преподавании и учебной литературе. Авторы многих курсов пошли по пути электрического соединения различных идей и процедур. Ярким представителем такого «прагматического» направления был, как уже упоминалось, Лакруа. В обширном введении к своему «Трактату» (т. I, изд. 2, 1810) он прежде всего разъясняет общие понятия о функциях и о разложениях в ряды. Отметим, в частности, что он проводит различие между функциональными рядами, которые представляют порождающую их функцию независимо от своей сходимости, и числовыми рядами, которые применимы для приближенного вычисления соответствующих величин лишь при условии их сходимости к последним. В качестве примера исследуется по Даламберу сходимость биномиального ряда (не полностью), а ряд $1 + 1\cdot 2x + 1\cdot 2\cdot 3x^2 + 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4x^3 + \ldots$ иллюстрирует случай степенных рядов, расходящихся для всех ненулевых значений аргумента. Далее несколько страниц отведено методу пределов и доказываются, как важнейшие, две теоремы: о единственности предела и о пределе частного. Рассмотрение «весьма общего выражения»

$$\frac{Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + \ldots}{A'x^{\alpha'} + B'x^{\beta'} + C'x^{\gamma'} + \ldots},$$

в котором показатели α, β, γ, ..., α', β', γ', ... либо возрастают, либо убывают, при неограниченном уменьшении или увеличении x, дает повод к введению терминов бесконечное и бесконечно малое, а также принципа отбрасывания инфинитезимальных величин. Впрочем, элементарные теоремы об операциях с бесконечно малыми отсутствуют, так же как и явное определение бесконечно малой величины. Этим ограничивается собственно теоретическая часть введения и затем следует учение об элементарных функциях, по содержанию в большой мере совпадающее с первым томом «Введения в анализ бесконечных» Эйлера.

«Аналитическое изложение начал дифференциального исчисления» опирается у Лакруа в первую очередь на разложение разности функции по степеням произвольного приращения аргумента

$$u' - u = ph + qh^2 + rh^3 + \ldots,$$

причем функция p выступает и как предел отношения $(u' - u)/h$ и как коэффициент члена первой степени в разложении ph. Дифференциал функции du определяется как первый член разложения разности $u' - u$, так что, очевидным образом, $dx = h$ и, таким образом, функция p оказывается дробью du/dx, которую Лакруа называет дифференциальным коэффициентом (coefficient différentiel). Большинство правил дифференцирования

выводится, так сказать, по Лагранжу с помощью разложений в ряды. Несколько далее общая форма степенного разложения произвольной функции устанавливается с помощью формальных преобразований, по основной идее близких к вычислениям Лагранжа, но несколько видоизмененных в одном пункте, где применяется биномиальное разложение [1]. В символике Лакруа решительно следует за Лейбницем и в отделе первой главы, озаглавленном «Размышления о метафизике дифференциального исчисления и о его обозначениях», подвергает специальной критике обозначения с помощью штрихов и индексов, предложенные Лагранжем [2].

Аналогичное смешение начальных положений методов пределов, бесконечно малых и производных функций с формализмом в применении бесконечных рядов предлагали читателям и другие популярные авторы того времени, например, воспитанники Политехнической школы и затем профессора математики Жан Луи Бушарла (1775—1848) и Луи Бенжамен Франкер (1773—1849), руководства которых, впервые вышедшие в середине 10-х годов, много раз переиздавались во Франции и, подобно курсу Лакруа, получили большое распространение в других странах, в том числе в России [3]. Но уже в это время на смену охарактеризованному эклектизму пришел необходимый синтез столь долго противоборствовавших идей: еще до 1820 г. другой воспитанник той же Политехнической школы О. Коши стал излагать с ее кафедры и вскоре опубликовал реформированную систему анализа. основанную на новой теории пределов и бесконечно малых, получившей затем общее признание.

Ряд Тейлора

Развитие исчисления бесконечно малых и его оснований шло в тесном взаимодействии с разработкой теории бесконечных степенных рядов. Как мы видели, ряд Тейлора явился краеугольным камнем конструкции анализа у Лагранжа. Мы обратимся теперь к общим вопросам теории рядов.

В предыдущем томе говорилось, что ряд Тейлора был, вероятно, известен Дж. Грегори и Ньютону (см. т. II, стр. 166 и 244) и что четверть века спустя Иоганн I Бернулли и Лейбниц пришли к ряду, из которого ряд Тейлора можно вывести с помощью весьма простого преобразования (т. II, стр. 273—274). Недавно д-р Т. Уайтсайд выяснил, что Ньютон действительно владел рядом Тейлора. В XIV предложении неопубликованного первого варианта «Рассуждения о квадратуре кривых», составленного между концом ноября 1691 г. и августом 1692 г., решается задача о выраже-

---

[1] Формула бинома используется примерно так же, как и у Арбогаста (ср. стр. 284), но Лакруа, который при этом ссылается на «весьма остроумные замечания» Пуассона, ограничивается употреблением двух первых членов биномиального ряда, приводя тут же их формальный вывод по Пуассону (цит. соч., стр. 163—164).

[2] В случае двух переменных Лагранж ставил штрихи или индексы сверху знака функции для дифференцирований по x и снизу для дифференцирований по y, вроде $f''(x, y)$, $f_{''}(x, y)$, $f'_{'}(x, y)$ и т. п., а при большем числе переменных указывал еще в скобках после знака функции соответствующие переменные, так что, например, для функции $f(x, y, z)$ производные второго порядка будут $f''(x)$, $f''(y)$, $f''(z)$, $f''(x, y)$, $f''(x, z)$, $f''(y, z)$.

[3] *J. L. Boucharlat.* Eléments de calcul différentiel et de calcul intégral. Paris, 1815; *L. B. Francoeur.* Cours complet des mathématiques pures. Ed. 2. Paris, 1819. См. о них статьи И. И. Лихолетова и С. А. Яновской, а также А. П. Юшкевича, указанные в литературе.

нии с помощью «бесконечного сходящегося ряда» (series interminata convergens) какой-либо из двух флюент y, z, заданных уравнением, которое может содержать, кроме флюент, еще их флюксии. В случае, когда уравнение содержит только флюенты, Ньютон ранее применял свой метод параллелограмма (т. II, стр. 49); он показал также приемы решения отдельных видов дифференциальных уравнений с помощью бесконечных рядов (т. II, стр. 246). В третьем королларии к XIV предложению рукописи, изученной Т. Уайтсайдом, Ньютон устанавливает, что если флюента y, в наших обозначениях являющаяся разностью вида $f(z) - f(0)$, представляется рядом $az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + ez^5 + \ldots$, то коэффициенты ряда определяются равенствами $\dot{y}/\dot{z} = a$, $\ddot{y}/\dot{z}^2 = 2b$, $\dddot{y}/\dot{z}^3 = 6c$, $\ddddot{y}/\dot{z}^4 = 24d$, $\overset{....}{\dot{y}}/\dot{z}^5 = 120e, \ldots$. Содержание четвертого королларии можно аналогично записать формулой

$$y\,[= \varphi(\omega + x) - \varphi(\omega)] = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}\,x + \frac{1}{2}\,\frac{\ddot{y}}{\dot{x}^2}\,x^2 + \frac{1}{6}\,\frac{\dddot{y}}{\dot{x}^3}\,x^3 + \ldots$$

Ньютон применил найденную формулу степенного разложения к исследованию кривизны линий в косоугольных декартовых координатах. Можно думать, что дифференциальные свойства коэффициентов разложения функции в степенной ряд были ясны Ньютону еще ранее. В самом деле, в первом примере к X предложению второй книги «Математических начал натуральной философии» (1686) он раскладывает ординату некоторой полуокружности в точке с абсциссой $x + \alpha$ по степеням приращения абсциссы α и поясняет, что первый член ряда представляет собой ординату точки с абсциссой x, коэффициент второго члена дает наклон касательной в этой точке, коэффициент третьего члена определяет кривизну кривой в той же точке, а следующие коэффициенты определяют соответственно изменяемость кривизны, изменяемость этой изменяемости и т. д.[1] Читатель внесет необходимые поправки в сказанное нами по этому вопросу на стр. 244—245 второго тома[2].

Термин «ряд Тейлора» является, таким образом, исторически мало оправданным, хотя Тейлор, который пришел к нему самостоятельно, первым опубликовал его в VII теореме «Прямого и обратного метода приращений» (1715), а еще раньше сообщил о нем в письме к Дж. Мечину от 26 июля 1712 г. В пятой главе говорилось, что Тейлор вывел этот ряд из интерполяционной формулы Ньютона, полагая в ней приращения аргумента и функции исчезающими (см. стр. 225). Мы приведем собственную формулировку Тейлора, которую он дал, по отдельности для возрастающего и убывающего аргумента, во втором королларии к VII теореме: «В то самое время, как z при равномерном течении становится $z + v$, x становится $x + \dot{x}\frac{v}{1\cdot\dot{z}} + \ddot{x}\frac{v^2}{1\cdot2\cdot\dot{z}^2} + \dddot{x}\frac{v^3}{1\cdot2\cdot3\cdot\dot{z}^3}$ и т. д.», а «в то самое время, как z, убывая, становится $z - v$, x, убывая, становится $x - \dot{x}\frac{v}{1\cdot\dot{z}} + \ddot{x}\frac{v^2}{1\cdot2\cdot\dot{z}^2} - \dddot{x}\frac{v^3}{1\cdot2\cdot3\cdot\dot{z}^3}$ и т. д.»[3].

В «Прямом и обратном методе приращений» Тейлор использовал свою формулу при решении некоторых дифференциальных уравнений. Кроме

---

[1] *И. Ньютон.* Математические начала натуральной философии. Перевод А. Н. Крылова. М.—Л., 1936, стр. 346.

[2] Всеми этими сведениями мы обязаны д-ру Уайтсайду, любезно сообщившему их в письме от 24 марта 1971 г. Рукопись будет издана во второй части шестого тома «The mathematical papers of I. Newton».

[3] *B. Taylor.* Methodus incrementorum directa et inversa. London, 1715, p. 23.

того, он применил ее к приближенному вычислению корней уравнений (Philos. Trans. 1717). Если известно приближенное значение x корня уравнения $f(z) = 0$, а истинное значение корня $z = x + h$, где h — малое число, то h приближенно вычисляется путем приравнивания нулю суммы первых трех членов разложения

$$f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1} h + \frac{f''(x)}{2} h^2 + \ldots = 0,$$

после чего, если угодно, процесс повторяется. В сущности так поступал при решении численных алгебраических уравнений еще Галлей (1694), раскладывая многочлен $f(a + e)$, где a — приближенное значение корня уравнения $f(x) = 0$ и e — искомая поправка, по степеням e:

$$0 = f(a+e) = f(a) + se + te^2 + \ldots$$

и находя e из квадратного уравнения (см. т. II, стр. 49). По-видимому, как раз этот прием Галлея послужил отправным пунктом размышлений, которые привели Тейлора к открытию его ряда. В XI теореме «Прямого и обратного метода приращений» дан новый вывод ряда Лейбница — Бернулли, впрочем без ссылки на опубликованную Бернулли статью; связь между этим рядом и рядом Тейлора не отмечена.

Тейлор не мог еще оценить всей важности своего открытия, которое Кондорсе в 1784 г. назвал «теоремой Тейлора» и С. Люилье в 1786 г. «рядом Тейлора»; его значение раскрывалось постепенно на протяжении XVIII в.

Новый вывод предложил К. Маклорен во втором томе своего «Трактата о флюксиях» (1742). Предполагая, что величина y представима рядом по степеням z, а также молчаливо допуская возможность почленного дифференцирования такого ряда, Маклорен сперва записал разложение с неопределенными коэффициентами

$$y = A + Bz + Cz^2 + DZ^3 + \text{и т. д.},$$

а затем нашел A, B, C, D, ... путем последовательных подстановок $z = 0$ и дифференцирований. Результат, который мы теперь называем рядом Маклорена (сам он указывал на принадлежность теоремы Тейлору) [1], он записал в виде

$$y = E + \frac{\dot{E}z}{\dot{z}} + \frac{\ddot{E}z^2}{1 \times 2\dot{z}^2} + \frac{\dddot{E}z^3}{1 \times 2 \times 3\dot{z}^3} + \frac{\ddddot{E}z^4}{1 \times 2 \times 3 \times 4\dot{z}^4} + \text{ и т. д.},$$

где E, $\dot{E}$, $\ddot{E}$, ... суть значения y, $\dot{y}$, $\ddot{y}$, ... при $z = 0$. Тем самым Маклорен показал, что степенной ряд, выражающий аналитическую функцию, есть ее ряд Тейлора, другими словами, что такое разложение функции единственное. Мимоходом Маклорен указал, что в отдельных случаях, когда какой-либо коэффициент становится бесконечным, разложение невозможно. Вместе с тем он отметил, что ряд Тейлора также применим, когда функция y определяется неявным уравнением (affected equation), а во многих случаях и дифференциальным уравнением (fluxional equation). Примерами разложений служат показательная функция, синус, косинус, тангенс и секанс. Биномиальное разложение Маклорен вывел по методу неопределенных коэффициентов еще до общей формулы, предполагая известным

[1] *C. Maclaurin.* A treatise of fluxions, v. II, p. 611.

правило дифференцирования степенной функции с целым положительным показателем. Этот результат он тотчас распространил на любой (в том числе бесконечный) целый многочлен, сославшись на Муавра, который сообщил эту теорему (с выводом для случая натуральных показателей) в «Philosophical Transactions» за 1697 г. [1] Связь между рядами Тейлора и Бернулли была Маклорену ясна.

В более привычной нам форме разложение какой-либо функции по степеням приращения аргумента a

$$y + \frac{ady}{1\cdot dx} + \frac{a^2d^2y}{1\cdot 2\cdot dx^2} + \frac{a^3d^3y}{1\cdot 2\cdot 3\, dx^3} + \ldots$$

привел, со ссылкой на Тейлора, Эйлер в работе, посвященной выводу формулы суммирования (Commentarii (1736) 1741; ср. стр. 306); с помощью формальных преобразований он получил отсюда и ряд Бернулли. В «Дифференциальном исчислении» (1755) мы встречаем и запись Δy в виде

$$dy + \frac{1}{2}d^2y + \frac{1}{6}d^3y + \ldots$$

(ср. стр. 270). В III главе второй части этого сочинения разложение в степенной ряд выведено так же, как у самого Тейлора.

Иначе — именно повторным интегрированием — вывел ряд Тейлора Даламбер в VIII главе первой части «Исследований о различных важных вопросах системы мира» (Recherches sur les différents points importants du système du monde. 1[e] partie. Paris. 1754). Собственные обозначения Даламбера были малоудобны. Например, он обозначал последовательные производные рассматриваемой функции различными буквами (греческого алфавита); он не указывал пределы, в которых фактически интегрировал. В нашей символике выкладки Даламбера можно передать так. Допустим, что аргумент функции $f(x)$ получает малое приращение h, и положим $f(x+h) = f(x) + u$. Дифференцирование по h дает $f'(x+h)dh = du$, а после почленного интегрирования в пределах от 0 до h получается равенство $f(x+h) = f(x) + \int f'(x+h)\,dh$. Аналогично $f'(x+h) = f'(x) + \int f''(x+h)\,dh$, $f''(x+h) = f''(x) + \int f'''(x+h)\,dh$ и т. д. Последовательная подстановка выражений $f'(x+h)$, $f''(x+h)$, ... в предыдущие равенства приводит к разложению

$$f(x+h) = f(x) + \int f'(x)\,dh + \int dh \int f''(x)\,dh + \int dh \int dh \int f'''(x)\,dh + \ldots$$

или

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2f''(x)}{2} + \frac{h^3f'''(x)}{2\cdot 3} + \ldots$$

Здесь всюду возникает формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме, который можно записать в виде $\int\limits_0^h\int\limits_0^h \ldots \int\limits_0^h f^{(n)}(x+h)\,dh^n$ или же $\frac{1}{(n-1)!}\int\limits_0^h f^{(n)}(x+h-t)\,t^{n-1}\,dt$. Даламбер, однако, прошел мимо

[1] Само открытие Муавра относится к 1695 г. В том же году Лейбниц письменно известил И. Бернулли, что знает правило образования коэффициентов любой целой положительной степени любого многочлена (ср. стр. 98).

этого обстоятельства; его целью было разложение функции в бесконечный ряд по степеням малого приращения аргумента. Сходимость такого ряда к данной функции $f(x)$ казалась очевидной, а оценка точности приближения производилась, когда требовалось, без общих формул, применительно к случаю.

Вопрос об оценке точности приближений, доставляемых частными суммами членов ряда Тейлора, впервые общим образом поставил и решил Лагранж. Мы уже писали, что Лагранж впервые вывел формулу Тейлора с остаточным членом (см. стр. 289). Эту «новую и замечательную по своей простоте и общности теорему» Лагранж сформулировал в выражениях: «Если u обозначает неизвестную величину, заключенную в границах между 0 и x, то всякую функцию x и каких-либо других величин можно последовательно разложить по степеням x таким образом:

$$\begin{aligned} fx &= f_. + xf'u, \\ &= f_. + xf'_. + \frac{x^2}{2} f''u, \\ &= f_. + xf'_. + \frac{x^2}{2} f''_. + \frac{x^3}{2\cdot 3} f''' \quad \text{и т. д.,} \end{aligned}$$

где величины $f_.$, $f'_.$, $f''_.$ и т. д. суть значения функции fx и ее производных $f'x$, $f''x$ и т. д. при $x = 0$»[1], а также в виде:

$$\begin{aligned} f(z + x) &= fz + xf'(z + u), \\ &= fz + xf'z + \frac{x^2}{2} f''(z + u), \\ &= fz + xf'z + \frac{x^2}{2} f''z + \frac{x^3}{2\cdot 3} f'''(z + u) \quad \text{и т. д.} \end{aligned}$$

За этой формой остаточного члена сохранилось имя Лагранжа. «Совершенство методов приближения, в которых применяются ряды,— писал он,— зависит не только от сходимости рядов, но еще от возможности оценить ошибку, происходящую от членов, которыми пренебрегают; и можно сказать, что в этом отношении почти все приближенные методы, употребляемые в геометрических и механических задачах, еще очень несовершенны. Предыдущая теорема во многих случаях сможет сообщить этим методам недостающее им совершенство, без чего их часто бывает опасно применять»[2].

Остаточный член формулы Тейлора был в глазах Лагранжа только средством оценки приближений, доставляемых рядом Тейлора, когда в нем отбрасываются члены, начиная с некоторого. Как мы знаем, в том, что ряд Тейлора какой-либо функции к ней, вообще говоря, сходится, Лагранж не сомневался. Он и теорему об остаточном члене формулировал для «всякой функции» и для любой частной суммы ряда. Допущение разложимости в ряд Тейлора лежало в самом начале вывода теоремы об остаточном члене, как и вообще в основе определения последовательности производных функций. Схема доказательства теоремы такова. Разложение

$$f(x + i) = f(x) + if'(x) + \frac{i^2}{2} f''(x) + \ldots$$

---

[1] *J. L. Lagrange.* Théorie des fonctions analytiques, p. 67—68.
[2] Там же, стр. 69.

подстановкой $x - i$ вместо x преобразуется в

$$f(x) = f(x-i) + if'(x-i) + \frac{i^2}{2} f''(x-i) + \ldots,$$

а это последнее подстановкой xz вместо i в

$$f(x) = f(x-xz) + xzf'(x-xz) + \frac{x^2z^2}{2} f''(x-xz) + \ldots,$$

при $z = 1$ только что записанный ряд будет рядом Маклорена. Далее, чтобы вывести формулу остатка для какого-либо определенного числа членов ряда, скажем для трех, Лагранж заменяет совокупность всех остальных членов выражением $x^3 R$, так что

$$f(x) = f(x-xz) + xzf'(x-xz) + \frac{x^2z^2}{2} f''(x-xz) + x^3R,$$

где R есть функция z, обращающаяся в нуль при $z = 0$. Дифференцирование по z приводит к равенству

$$R' = \frac{z^2}{2} f'''(x-xz),$$

и дело сводится к определению или оценке функции R по ее производной и условию, что она равна нулю при $z = 0$. Если обозначить наибольшее значение $\frac{f'''(x-xz)}{2}$ для всех значений z от 0 до 1 буквой M, а наименьшее — N, то лемма о возрастании функции с положительной производной (ср. стр. 290) позволяет установить, что значение R при $z = 1$ заключено между $N/3$ и $M/3$. Наконец, из соображений непрерывности Лагранж находит, что (при $z = 1$) $R = \frac{1}{2\cdot 3} f'''(u)$, где u — некоторое число между 0 и x; следовательно,

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \frac{1}{2\cdot 3} f'''(u).$$

Некоторые элементы приведенных рассуждений Лагранжа сохранились и в современных доказательствах [1]. Но в целом наш подход к проблеме принципиально отличается от подхода Лагранжа. Мы сперва доказываем, при тех или иных допущениях относительно дифференциальных свойств функции $f(x)$, формулу Маклорена (или Тейлора) с остаточным членом $f(x) = s_n(x) + r_n(x)$, где $s_n(x) = \sum \frac{f^m(0)}{m!} x^m$. Если $r_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$, то функция $f(x)$ представима (и притом единственным образом) своим рядом Маклорена (или Тейлора). По выражению А. И. Маркушевича, для Лагранжа первичным был ряд Тейлора, вторичным — формула Тейлора [2]; в нашем построении анализа ряд и формула поменялись местами. Таким изменением порядка мы обязаны Коши, который на конкретном примере показал, что ни существование производных любого порядка данной функции, ни даже сходимость ее ряда Тейлора еще не обеспечивают его сходи-

[1] В «Лекциях об исчислении функций» (1806) Лагранж видоизменил свой вывод; на этом мы останавливаться не будем.

[2] *А. И. Маркушевич.* Очерки по истории теории аналитических функций. М.—Л., 1951, стр. 44.

мости именно к данной функции. Этот пример, опубликованный в «Резюме лекций по исчислению бесконечно малых» (1823), был направлен непосредственно против концепции Лагранжа.

Функция Коши, определяемая для действительных значений аргумента условиями:

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0), \end{cases}$$

имеет производные любого порядка, причем $\varphi^{(n)}(0) = 0$ при любом n. Рассматривая вопрос о значении дроби, числитель и знаменатель которой при некотором $x = a$ одновременно обращаются в нуль, Лагранж заявил, что случай. когда какая-либо функция $f(x)$ и все ее производные при $x = a$ обращаются в нуль, невозможен (если функция не есть тождественно нуль). В самом деле, писал он, такая функция в силу равенства $f(a + i) = f(a) + if'(a) + i^2/2\, f''(a) + \ldots$ была бы нулем для всех i, а это невозможно. Подобного рода утверждение встречается и у Эйлера (ср. стр. 271). Функция Коши опровергала это мнение; для нее все члены ряда Маклорена суть нули, т. е. ряд Маклорена сходится к нулю, а не к функции; остаточный же член всегда остается равным e^{-1/x^2}. Можно построить сколько угодно функций, ряд Маклорена которых имеет сумму, от них отличную: такой будет, например, функция $F(x) = \psi(x) + \varphi(x)$, где $\psi(x)$ — любая функция, которая разлагается в степенной ряд. В издании «Теории аналитических функций» 1813 г. Лагранж упомянул, что «некоторые геометры», видимо, допускают существование функций, которые вместе со всеми производными равны нулю при одном и том же значении аргумента [1]: не принадлежал ли к числу этих геометров Коши?

Проблемы сходимости рядов

Математики XVIII в., как и их предшественники в XVII в. отличали сходящиеся ряды $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$, частные суммы которых $s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ при $n \to \infty$ стремятся к конечному пределу s, от расходящихся. Более четкая формулировка этого различия и создание соответствующей терминологии связаны были, как это нередко случалось, с дискуссиями, развернувшимися вокруг одного парадокса. Профессор философии и затем математики Пизанского университета Гвидо Гранди (1671—1742) в «Геометрически изложенной квадратуре круга и гиперболы при помощи бесчисленных квадрируемых гипербол и парабол» (Quadratura circuli et hyperbolae per infinitas hyperbolas et parabolas quadrabiles geometrice exposita. Pisis, 1703), указал, что из разложения путем деления $1/(1 + x)$ в ряд $1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$ при подстановке $x = 1$ возникает равенство $^1/_2 = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ Группируя члены справа попарно, он пришел к равенству $0 + 0 + 0 + 0 + \ldots = {}^1/_2$ и истолковал его, как символ творения мира из ничего. Это вызвало оживленную полемику в печати и переписке, в которой приняли участие сам Гранди, Лейбниц, Вариньон, Николай I Бернулли и другие ученые. Лейбниц, отметив, что сумма ряда $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ была бы нулем, если бы бесконечное чи-

[1] *J. L. Lagrange.* Théorie des fonctions analytiques, p. 49.

сло членов было четным, и единицей, если нечетным, указывал, что нет разумных оснований предпочтительно считать это число четным или же нечетным, и вместе с тем утверждал, что сумму следует принять равной $^1/_2$, как арифметической средней между 0 и 1 (Acta Eruditorum, 1712 и письма). В пользу такого решения он приводил аналогию с теорией вероятностей, которая учит принимать в расчет среднее арифметическое равнодостижимых величин; и в данном случае, говорил он, действует присущий природе вещей закон справедливости. Лейбниц сам называл такого рода аргументацию более метафизической, чем математической, но считал ее вполне убедительной. Вариньон, разбирая вопрос о биномиальном выражении для любых целых отрицательных показателей, высказал мнение о недопустимости рядов, которые мы называем расходящимися (Acta Eruditorum, 1712; Mém. Ac. Paris, 1715). Николай I Бернулли занял сходную позицию и в письме к Лейбницу от 7 апреля 1713 г. подчеркнул, правда, в недостаточно четкой форме, что следует учитывать остаток ряда, который он обозначил буквой R, от слова residuum [1]. В этом же письме, рассматривая примеры биномиальных разложений с дробным показателем, Николай I Бернулли употребил выражение «расходящийся ряд» (series divergens), не дав, впрочем, ему отчетливого определения [2]. В ответном письме от 28 июня Лейбниц применил выражение сходящийся ряд (series advergens) в современном смысле и дал ему пояснение: такой ряд, «который можно настолько продолжить, чтобы он отличался от какой-либо возможной (т. е. действительной.— *Ред.*) конечной величины на величину, меньшую заданной» [3]. Впоследствии в употребление вошел, впрочем, не термин advergens, а имеющий тот же смысл convergens, который в 1677 г. применил к последовательностям Дж. Грегори (см. т. II, стр. 151) [4] и затем употреблял Ньютон.

Таким образом, уже Лейбниц явно высказал определение сходящегося ряда и его суммы, которое в терминах теории пределов сформулировал Коши (1821). Аналогичное определение, правда в применении к знакоположительным рядам, мы находим у Маклорена, который писал: «Подобно тому, как прямая линия или фигура может непрерывно расти, никогда не достигая данной линии или площади, так существуют и ряды дробей, которые могут быть продолжены произвольно, но сумма членов которых всегда оказывается меньше некоторого конечного числа. Если разность между их суммой и этим числом убывает так, что при продолжении ряда может стать меньше любой сколь угодно малой данной дроби, это число есть *предел суммы ряда* и есть то, что понимают под значением ряда (the value of the progression) в предположении, что он продолжается бесконечно» [5].

---

[1] Тот же пример, что у Гранди, был разобран еще в третьей части «Арифметических предложений о бесконечных рядах и их конечной сумме» (1696) Я. Бернулли (ср. т. II, стр. 159). Поделив l на $m+n$ и приняв затем $m=n$, он получил $\frac{l}{2m}=\frac{l}{m}-\frac{l}{m}+\frac{l}{m}-\ldots$ Здесь, писал он, возникает не лишенный изящества парадокс, который объясняется тем, что остаток при делении в этом случае не уменьшается, а остается все время равным $+l$ или $-l$.

[2] *G. W. Leibniz.* Mathematische Schriften, Bd. III. Halle, 1858, S. 982—984.

[3] Там же, стр. 985.

[4] Впрочем, математики XVIII в., в том числе Эйлер, иногда называли сходящимися ряды, члены которых по абсолютной величине неограниченно убывают. Мы пользуемся далее этим термином в нашем обычном смысле.

[5] *C. Maclaurin.* A treatise of fluxions, v. I, p. 289.

Такое же определение затем встречается в применении к убывающей геометрической прогрессии в статье «Предел» (Limite) в IX томе «Энциклопедии» (1765), написанной Даламбером и аббатом ла Шаппелем.

Маклорен не ограничился определением понятия суммы ряда и тотчас применил его к выводу известного признака сходимости знакопостоянного ряда, который мы, вслед за Коши, выражаем чисто аналитически: ряд $\sum_{n=m}^{\infty} f(n)$ и интеграл $\int_{m}^{\infty} f(x)\,dx$ либо оба сходятся, либо оба расходятся. Сам Маклорен выразил этот «интегральный признак» геометрически, сравнивая площадь между кривой $y = f(x)$ и ее асимптотой с площадью вписанной и описанной ступенчатой фигуры, соответствующей сумме членов ряда $\sum_{m}^{\infty} f(n)$. Этот критерий Маклорен применил к доказательству расходимости гармонического ряда и сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} = \zeta(k)$ при $k > 1$. Отправляясь от этого, он исследует также ряд с общим членом

$$\frac{Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots}{ax^n + bx^{n-1} + \ldots},$$

где $x = 1, 2, 3, \ldots$, в зависимости от того, какое из условий $n - m \gtreqless 1$ имеет место. Кажется, это первый случай в литературе XVIII в., когда было рассмотрено большое число примеров на сходимость или расходимость рядов (мы привели только немногие).

Даламбер рассмотрел вопрос об условиях сходимости знакоположительного ряда, изучая разложение $(1 + \mu)^m$ при произвольном m («Математические сочинения». Opuscules mathématiques. Paris, v. II, 1768). Современный термин «признак сходимости Даламбера» исторически, повидимому, не оправдан, Даламбер называет здесь ряд сходящимся (расходящимся), начиная с некоторого места, если члены его далее монотонно убывают (возрастают). Так, в случае разложения $\left(1 + \frac{200}{199}\right)^{1/2}$ вначале имеет место сходимость, расходимость же наступает с 300-го члена. При этом Даламбер указал, что ряд дает верные результаты только если он, начиная с некоторого члена и до бесконечности, сходится (в его смысле слова); в частности, биномиальный ряд сходится (также и в нашем смысле), когда $-1 < \mu < 1$. Вполне корректно высказал критерий сходимости, о котором идет речь, Варинг в «Аналитических размышлениях» (Meditationes analyticae, Ed. 1, Cantabrigae, 1776; Ed. 2, 1781): ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится (сходится), если отношение $u_n : u_{n+1}$ при бесконечно большом n меньше (больше) единицы. Формулировка этого критерия в терминах теории пределов принадлежит Коши (1821).

Эйлер, занимаясь исследованием гармонических рядов, привел необходимый критерий сходимости знакопостоянного ряда $\lim_{n\to\infty} (s_{kn} - s_n) = 0$, где k есть какое-либо фиксированное натуральное число, большее

единицы, а s_n — n-я частная сумма ряда (Commentarii, (1734—1735) 1740; ср. стр. 339). Впрочем, соответствующее высказывание Эйлера неясно и иногда его толкуют в том смысле, что Эйлер высказал для знакопостоянного ряда необходимое и достаточное условие сходимости:

$$\lim_{n \to \infty} (s_{kn} - s_n) = 0,$$

где k принимает последовательно все натуральные значения $2, 3, 4, \ldots$ [1]

Что касается знакопеременных рядов, то, как уже говорилось (см. II, стр. 255), Лейбниц высказал носящий его имя признак сходимости ряда с чередующимися знаками в письме к И. Бернулли от 10 января 1714 г., опубликованном в их переписке тридцать лет спустя. Еще ранее тот же признак был сообщен в письме Лейбница к Я. Герману от 26 июня 1705 г. Заслуживает упоминания наблюдение, сделанное Гольдбахом: члены последовательности $1, {}^1/_2, {}^1/_3, {}^1/_4, \ldots$ можно так соединить знаками $+$ и $-$, чтобы сумма возникшего ряда оказалась равной любому действительному числу. Об этом Гольдбах дважды писал Эйлеру, 1 октября 1742 г. и летом 1752 г. [2] Риман в 1853 г. доказал теорему о возможности так переставить члены условно сходящегося ряда, чтобы новый ряд приобрел любую сумму или же расходился (опубл. 1867). Возможно, что ход мыслей в обоих случаях был одинаков.

Но если математики XVIII в. отличали сходящиеся ряды от расходящихся, если они установили несколько критериев сходимости и область сходимости отдельных разложений, все же в целом их подход к бесконечным рядам резко отличался от современного. Исходя из предполагаемого единства основных законов алгебры и анализа, математики XVIII в. формально переносили свойства конечных целых многочленов на бесконечные. Они могли быть различного мнения в вопросе о допустимости расходящихся рядов, но были единодушны в том, что любые ряды можно подвергать любым преобразованиям и действиям — умножению, делению, обращению, дифференцированию, интегрированию и т. д., — так же как целые рациональные функции. В правомерности такой практики сомневались столь же мало, как в представимости функций анализа степенными рядами. В разработке общей теории не было потребности; ни один автор не счел нужным собрать воедино уже известные общие теоремы и обосновать повседневно применяемые средства исследования. Подавляющее большинство результатов было при этом верным: от ошибок предохраняло либо то обстоятельство, что не выходили за рамки, в которых соответствующие операции действительно возможны, либо чутье. Впрочем, иногда математики XVIII в. испытывали неудовлетворенность и искали все новые и новые доказательства некоторых важных теорем. Так, большое число доказательств было посвящено теореме о биноме; один Эйлер предложил несколько ее выводов, из которых первый, основанный на рассмотрении функционального уравнения $f(a)\,f(b) = f(a + b)$, очевидно, выполняющегося в случае целого положительного показателя (Novi Commentarii, (1774)1775), был восполнен Коши (1821). В другом доказательстве (Nova Acta, (1787)1789) Эйлер отправлялся от допущения, что

[1] Такое истолкование дал впервые Г. Энештрём в 1879 г. См. *И. Ю. Тимченко*. Основания теории аналитических функций, ч. I. Одесса, 1899, стр. 411—412; см. также статью Г. Фабера в книге: *L. Euler*. Opera omnia, Series I, v. XVI, sectio altera. Basileae, 1935, p. XIV.

[2] *L. Euler* und *Chr. Goldbach*. Briefwechsel, 1729—1764, S. 123, 350.

$(1+x)^n$ представим при любом действительном n рядом $1 + Ax + Bx^2 + \ldots$ С. Е. Гурьев в неопубликованной части своего «Опыта о усовершении елементов геометрии» (1798) справедливо указал, что недостатком данного доказательства является допущение заранее такого равенства. Это равенство в точности выполняется при целом положительном n, но в других случаях оно «может иметь место..., только если к ряду прибавить член Px^n, природа которого весьма отличается от природы количеств A, B, ...» и т. д. и который «является скрытым и нам вовсе неизвестным» [1]. Правда, в собственной работе, представленной Петербургской академии наук в 1799 г., Гурьев также не дал вывод теоремы о биноме, удовлетворяющий нашим требованиям (Nova Acta, (1797—1798) 1805). Первое глубокое исследование сходимости степенного разложения произвел Гаусс в работе о гипергеометрическом ряде

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\gamma(\gamma+1)}x^2 + \ldots$$

(1812), частным случаем которого является биномиальный: $(1+x)^n = F(-n, \beta, \beta, -x)$. Коши в 1821 г. рассмотрел сходимость биномиального разложения для комплексных x и действительных n, Абель в 1826 г. распространил исследование на комплексные показатели. Но мы увидим, что еще в конце XVIII в. да Кунья, в отличие от почти всех современников, стремившийся оперировать степенными рядами только в области их сходимости, дал замечательный вывод «бинома Ньютона», исходя из своей теории показательной функции (см. стр. 322).

Улучшение сходимости рядов

Многие числовые ряды, например известный ряд Лейбница для $\pi/4$ или ряд Меркатора для $\ln 2$, сходятся очень медленно, так что для непосредственного отыскания их сумм с удовлетворительным приближением требуется складывать чрезвычайно большое число их членов. Естественно, что внимание математиков привлекла проблема улучшения сходимости, первое успешное решение которой дали математики Индии на рубеже XV и XVI вв. (ср. т. I, стр. 202). Один из ранних приемов, найденных вновь в Европе, встречается в пятой части «Арифметических предложений о бесконечных рядах и их конечной сумме» (1704) Я. Бернулли, который преобразовал ряд для $\ln(1+x)$ подстановкой $x = y/(1-y)$ в ряд для $\ln\frac{1}{1-y}$, что при $x=1$, $y=1/2$, позволило заменить вычисление $\ln 2 = \ln(1+1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ вычислением

$$\ln 2 = \ln\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 2^2} + \frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1}{4\cdot 2^4} + \ldots$$

В том же году женевский инженер Жан Кристоф Фатио де Дюилье (1656—1720) [2] письменно сообщил Я. Герману, что ряд Лейбница можно

---

[1] Дело С. Е. Гурьева. Архив АН СССР, ф. 1, оп. 2, § 84. (Цитаты взяты из отзыва о работе Гурьева, написанного С. Я. Румовским на французском языке).

[2] Не следует смешивать с его братом математиком Николаем Фатио де Дюилье (1664—1753), принявшим энергичное участие в споре о приоритете между Ньютоном и Лейбницем на стороне первого.

преобразовать в быстрее сходящийся

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \frac{4}{5\cdot 7\cdot 9} + \frac{4\cdot 5}{5\cdot 7\cdot 9\cdot 11} + \ldots$$

Я. Герман в письме к Лейбницу от 21 января 1705 г. пояснил это следующими выкладками, основанными на раздвоении и группировке членов:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) +$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) - \ldots = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 5}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3\cdot 5} - \frac{1}{5\cdot 7}\right) +$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5\cdot 7} - \frac{1}{7\cdot 9}\right) - \ldots = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{2}\,\frac{1\cdot 2}{3\cdot 5} + \frac{1}{2}\left(\frac{1\cdot 2}{1\cdot 3\cdot 5} - \frac{1\cdot 2}{3\cdot 5\cdot 7}\right) -$$
$$- \frac{1}{2}\left(\frac{1\cdot 2}{3\cdot 5\cdot 7} - \frac{1\cdot 2}{5\cdot 7\cdot 9}\right) + \ldots = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1\cdot 2}{3\cdot 5} + \frac{1\cdot 2\cdot 3}{3\cdot 5\cdot 7} + \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9} + \ldots\right)$$

и аналогичный прием использовал для вывода уже найденного по-другому Я. Бернулли разложения $\ln 2$.

Наиболее значительные результаты в этом направлении принадлежат Эйлеру. Свой метод улучшения сходимости рядов он изложил в статье «О расходящихся рядах», представленной Берлинской академии наук 27 октября 1746 г., но напечатанной много позднее (De seriebus divergentibus, Novi Commentarii, (1754—1755)1760), уже после того, как он был обнародован в «Дифференциальном исчислении» (1755). Данный знакочередующийся ряд $ax - bx^2 + cx^3 - dx^4 + \ldots$ подстановкой $x = \frac{y}{1-y}$ преобразуется в ряд

$$ay - \Delta a\cdot y^2 + \Delta^2 a\cdot y^3 - \Delta^3 a\cdot y^4 + \ldots,$$

где $y = \frac{x}{1+x}$, а $\Delta a = b - a$, $\Delta^2 a = c - 2b + a$, $\Delta^3 a = d - 3c + 3b - a$ суть разности последовательности чисел $a, b, c, d\ldots$, При $x = 1$, т. е. $y = 1/2$, ряд $a - b + c - d + \ldots$ преобразуется в

$$\frac{1}{2}a - \frac{1}{2^2}\Delta a + \frac{1}{2^3}\Delta^2 a - \frac{1}{2^4}\Delta^3 a + \ldots$$

Этот прием [1] позволяет преобразовывать одни сходящиеся ряды в другие с той же суммой, но сходящиеся быстрее. Среди примеров Эйлера имеются только что приведенные ряды для $\ln 2$ и $\pi/4$. Тот же прием Эйлер применяет к расходящимся рядам, получая для них в ряде случаев конечные суммы (ср. стр. 309). Вообще расходящиеся ряды находили в XVIII в. довольно широкие применения. Обратимся к этому вопросу.

Ряд Эйлера — Маклорена

В отношении к расходящимся рядам среди математиков рассматриваемого времени не было единодушия. Многие отвергали расходящиеся ряды. К названным несколько ранее Вариньону и Николаю I Бернулли примыкали в этом вопросе Д. Бернулли (в молодости), Даламбер, Лагранж

[1] Этот метод был известен еще Ньютону; см. The mathematical papers of I. Newton, v. 4, 1971 (Примечание при корректуре.— *Ред.*)

в более поздние годы жизни), С. Е. Гурьев и другие. С их точки зрения, суммой бесконечного ряда было естественно считать лишь результат сложения взятых подряд членов, если такой результат, т. е. предел частных сумм, существует. Имелись, однако, математики, державшиеся иной точки зрения. Лейбниц стремился как-либо обосновать странное, казалось бы, равенство $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = 1/2$ (см. стр. 301). Сторонником употребления расходящихся рядов выступил в переписке 1724 г. с Д. Бернулли Гольдбах, пытавшийся объяснить смысл равенств вроде $1 - 2 + 4 - 8 + + \ldots = \frac{1}{1+2}$ или $1 + 2 + 4 + \ldots = \frac{1}{1-2}$ тем, что здесь следует различать выражение $\frac{1}{1+2}$ от $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{1-2}$ от -1. В этих замечаниях Гольдбаха можно усмотреть неясные проблески идей, которые впоследствии развил Эйлер.

Постановка и решение целого ряда вопросов, относящихся к расходящимся рядам, оказались связанными с конкретными исследованиями, убеждавшими в их ценности, несмотря на возникавшие при этом трудности и парадоксы. Речь идет об асимптотических представлениях функций, которые еще в 1669—1671 гг. Ньютон применил к вычислению частных сумм гармонических рядов (см. т. II, стр. 164—165) и которые были вновь введены в гораздо более широком масштабе в 30-е годы XVIII в. Стирлинг в 1730 г. опубликовал разложение в асимптотический ряд суммы десятичных логарифмов $\sum_{k=1}^{n} \lg(x + kd)$, а Муавр — асимптотическое выражение для $n!$ при больших значениях n (см. стр. 229). Вскоре за тем Эйлер и, независимо от него, Маклорен открыли общий прием суммирования, примерами которого являются результаты Ньютона и Стирлинга и который выражает частную сумму бесконечного ряда $s_n = \sum_{k=1}^{n} u(k)$ через другой ряд, члены которого содержат общий член $u(n)$, его интеграл и производные. Впервые Эйлер привел формулу суммирования без доказательства и примеров употребления в работе 1732 г. «Общий метод суммирования рядов» (Methodus generalis summandi progressiones. Commentarii, (1732—1733) 1738), вывод ее дан в статье «Отыскание суммы ряда по данному общему члену», представленной Петербургской академии в 1735 г. (Inventio summae cujusque seriei ex dato termino generali. Commentarii, (1736)1741). Мы упоминали эту статью в связи с тем, что в ней ряд Тейлора записан в дифференциальных обозначениях. Обозначая общий член ряда X и сумму его x членов S, Эйлер разложил $S(x - 1)$ в ряд Тейлора, а X в ряд

$$X = S(x) - S(x-1) = \frac{dS}{dx} - \frac{1}{2}\frac{d^2S}{dx^2} + \frac{1}{2\cdot 3}\frac{d^3S}{dx^3} - \ldots,$$

из которого затем получил выражение S через X и его производные. Для этого он представил dS/dx рядом с неопределенными коэффициентами вида

$$\frac{dS}{dx} = \alpha X + \beta\frac{dX}{dx} + \gamma\frac{d^2X}{dx^2} + \delta\frac{d^3X}{dx^3} + \varepsilon\frac{d^4X}{dx^4} + \ldots,$$

так что

$$S = \alpha\int X dx + \beta X + \gamma\frac{dX}{dx} + \delta\frac{d^2X}{dx^2} + \varepsilon\frac{d^3X}{dx^3} + \ldots$$

(постоянная интегрирования удовлетворяет тому условию, что при $x = 0$ также $X = 0$ и $S = 0$). Далее он дифференцированием нашел выражения для d^2S/dx^2, d^3S/dx^3 и т. д. и подставил их, вместе с выражением для dS/dx, в разложение функции X, после чего, применяя метод неопределенных коэффициентов, получил уравнения, определяющие каждое из чисел α, β, γ, δ, ε.... через все предшествующие (считая после первого α); это позволяет последовательно вычислить $\alpha = 1$, $\beta = {}^1/_2$, $\gamma = {}^1/_{12}$, $\delta = 0$, $\varepsilon = {}^{-1}/_{720}$ и т. д. Окончательный результат имел вид

$$S = \int X dx + \frac{X}{2} + \frac{1}{12}\frac{dX}{dx} - \frac{1}{720}\frac{d^3X}{dx^3} + \frac{1}{30\,240}\frac{d^5X}{dx^5} - \ldots$$

В этой же статье Эйлер вывел с помощью формулы суммирования первые 16 многочленов Я. Бернулли, выражающих суммы $\sum_{k=1}^{m} k^n$ до $n = 16$ (см. т. II, стр. 85—86), но он еще не обнаружил тогда зависимость между коэффициентами своей формулы и числами Бернулли; более того, возможность выразить общий член последовательности α, β, γ,... казалась ему в то время сомнительной. Другим примером употребления формулы суммирования явилось асимптотическое представление частной суммы гармонического ряда

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{x} = \gamma + \ln x + \frac{1}{2x} - \frac{1}{12x^2} + \frac{1}{120x^4} - \ldots,$$

с помощью которого Эйлер вычислил постоянную γ с 16 верными десятичными знаками (ср. стр. 339). Для этого он выбрал $x = 10$ и просуммировал надлежащее число членов стоящего справа ряда. Наконец, он применил формулу суммирования к приближенному вычислению сумм обратных рядов $\zeta(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}$ для $n = 2, 3, 4$. Таким образом, он продемонстрировал пользу формулы суммирования в приближенных вычислениях. Вместе с тем из одного замечания Эйлера о ряде, выражающем сумму $\sum_{k=1}^{x} \frac{1}{k}$, следует, что ему была ясна расходимость этого ряда.

19 июня 1736 г. Эйлер сообщил формулу суммирования Стирлингу, который 27 апреля 1738 г. ответил, что его собственная теорема о суммах логарифмов есть ее частный случай, а также что совершенно такая же общая формула есть в печатающейся книге Маклорена. Через год после выхода только что рассмотренной статьи Эйлера формула суммирования была опубликована в IV главе второй книги «Трактата о флюксиях» Маклорена (1742) с новым выводом, который, впрочем, также опирается на применение ряда Тейлора. Среди примеров Маклорена, кроме тех же многочленов Бернулли, фигурируют вычисления ln 2, формула Стирлинга для суммы логарифмов членов арифметической прогрессии и еще целый ряд других.

Подчеркивая значение формулы суммирования в вычислениях, в которых обычно употребляемые ряды сходятся слишком медленно, Маклорен, однако, нигде не упоминает о расходимости бесконечного ряда, входящего в формулу. Замкнутое выражение коэффициентов формулы так и осталось ему, по-видимому, неизвестным. Такое выражение в конце концов нашел Эйлер, опубликовавший его в V главе второй части «Дифференциального

исчисления». Здесь формула суммирования записана в виде

$$Sz = \int z dx + \frac{\alpha dz}{1\cdot 2\cdot 3dx} - \frac{\beta d^3 z}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5dx^3} + \frac{\gamma d^5 z}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7dx^5} - \ldots,$$

причем показано, что числа α, β, γ,... выражаются через числа $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, «которые по имени открывшего их Якова Бернулли называют бернуллиевыми» [1], следующим образом:

$$\frac{\alpha}{3} = \mathfrak{A}, \qquad \frac{\beta}{5} = \mathfrak{B}, \qquad \frac{\gamma}{7} = \mathfrak{C}, \ldots$$

Заметим, что числа $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$,... связаны с числами B_m, порождаемыми символической формулой

$$(B+1)^m - B^m = m \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots;\ B_0 = 1)$$

(см. т. II, стр. 86), соотношениями:

$$\mathfrak{A} = B_2 = \frac{1}{6}, \qquad \mathfrak{B} = -B_4 = \frac{1}{30}, \qquad \mathfrak{C} = B_6 = \frac{1}{42}, \ldots$$

Еще раньше Эйлер обнаружил, что отношение двух последовательных чисел Бернулли $B_{2n+2} : B_{2n}$ с ростом индекса неограниченно возрастает по абсолютной величине (Commentarii, (1739) 1750). Поэтому бесконечный ряд Эйлера — Маклорена, вообще говоря, расходится. Тем не менее формула суммирования может доставлять превосходные приближения, если ограничиваться частными суммами ряда с надлежащим числом членов. В только что упомянутой статье Эйлер дал новый способ вычисления π, исходя из равенства $\operatorname{arctg} t = \int_0^t \frac{du}{1+u^2}$, приближенной замены интеграла на сумму $S = \sum_{k=1}^{n} \frac{nt}{n^2+k^2t^2}$ и оценки разности $\operatorname{arctg} t - S$ по формуле суммирования. Полагая $t = 1$, Эйлер получил

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} + \frac{1}{4n} + \frac{1}{6}\,\frac{1}{2\cdot 2n^2} - \frac{1}{42}\,\frac{1}{2^3\cdot 6n^6} + \ldots - \frac{854\,513}{6\cdot 23}\,\frac{1}{2^{11}\cdot 22n}$$

и при $n = 5$ подсчитал 12 верных десятичных знаков. Особенности поведения ряда он охарактеризовал при этом исчерпывающим образом и указал, что для приближенного вычисления следует взять сумму тех первых членов ряда, которые убывают до наименьшего включительно. Он даже сделал попытку оценить в данном случае степень приближения по числу использованных членов и первому отброшенному члену, но приведенную им оценку не обосновал.

Асимптотические ряды получили важные применения также у Лагранжа, Лапласа, Лежандра, который назвал эти ряды полусходящимися (séries demi-convergentes), и других ученых. Впоследствии их изучали Коши, Пуассон, которые дали первые выражения остаточного члена, Якоби, Лобачевский, Остроградский и т. д. В широком плане к построе-

---

[1] *Л. Эйлер.* Дифференциальное исчисление, стр. 289—290. Термин «бернуллиевы числа» впервые употребил Муавр (1730).

нию теории асимптотических разложений приступил А. Пуанкаре (1886). Сама формула суммирования Эйлера — Маклорена является теперь одной из основных в теории конечных разностей и ее приложениях.

Суммирование расходящихся рядов

И другие расходящиеся ряды, не только асимптотические, оказывались полезным средством анализа, — если не приближенных вычислений, то различных преобразований. Сошлемся для примера на вычисления Эйлера, связанные с получением и проверкой функционального уравнения дзета-функции (ср. стр. 338). Здесь Эйлеру пришлось иметь дело с рядом

$$1 - 2^{n-1} + 3^{n-1} - 4^{n-1} + \ldots,$$

который при $n \geqslant 1$ расходится. По существу Эйлер находил суммы таких расходящихся рядов для различных значений n как

$$\lim_{x \to 1-0} (1 - 2^{n-1}x + 3^{n-1}x^2 - 4^{n-1}x^3 + \ldots),$$

что дает

$$1 - 2^{n-1} + 3^{n-1} - 4^{n-1} + \ldots = \frac{2^n - 1}{n} B_n$$

и, в частности,

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = \frac{1}{2},$$

$$1 - 2^{2k} + 3^{2k} - 4^{2k} + \ldots = 0,$$

$$1 - 2^{2k-1} + 3^{2k-1} - 4^{2k-1} + \ldots = \frac{2^{2k} - 1}{2k} B_{2k}.$$

Многие современники считали такие выкладки и их результаты бессмысленными. Ведь, скажем, частные суммы ряда $1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots$, меняя поочередно знак, неограниченно возрастают по (абсолютной) величине; как же может быть, чтобы сумма ряда была равна нулю? Эйлер обосновывал законность употребления расходящихся рядов, обобщая понятие суммы ряда. В самом подходе к проблеме он занял позицию, которую не сумели оценить его оппоненты. Он не спрашивал, что́ есть сумма расходящегося ряда, как если бы понятие суммы было заранее дано вместе с самим рядом, а стремился выяснить, как целесообразно распространить понятие суммы на случай расходимости. Эта установка гораздо ближе к современной, чем мнение тех, кто отвергал употребление расходящихся рядов потому, что априорно считал единственно возможным толкование суммы ряда как предела частных сумм.

Свою концепцию Эйлер изложил и пояснил примерами как в переписке с Николаем I Бернулли (1743—1745) и Гольдбахом (1745), так и в печати — в «Дифференциальном исчислении» и в статье о расходящихся рядах 1746 г., напечатанной в 1760 г. (см. стр. 305). Напомним, что описанный нами выше метод улучшения сходимости рядов, примененный Эйлером в обоих этих трудах (см. стр. 305), может служить для преобразования расходящихся рядов в сходящиеся. В «Дифференциальном исчислении» среди таких примеров имеются ряд Лейбница, а также знакочередующиеся ряды квадратов и четвертых степеней натуральных чисел, о которых только что шла речь.

В III главе первой части «Дифференциального исчисления» Эйлер подробно исследует ряд, возникающий при делении $1 : (1 - x)$, выписывая результат с остаточным членом

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

Если $-1 < x < 1$, остаток при $n \to \infty$ стремится к нулю и сумма бесконечного ряда $1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$ в обычном смысле слова есть $\frac{1}{1-x}$. Из того, что при всех значениях x вне промежутка $(-1, +1)$ частные суммы не стремятся к какому-либо конечному пределу, некоторые заключают, что при этом ряд вовсе не имеет суммы. Однако отказ от расходящихся рядов лишил бы математику многих замечательных открытий, которые удается произвести с их помощью. Кроме того, непонятно, как с помощью таких сумм, если они ложны, неизменно получаются верные результаты. Этот узел, который Эйлер называет труднейшим, и кажущееся противоречие он разрешает следующим образом: «...мы припишем слову „сумма" значение, отличное от обычного. А именно: мы скажем, что сумма некоторого бесконечного ряда есть конечное выражение, из разложения которого возникает этот ряд. В этом смысле у бесконечного ряда $1 + x + x^2 + x^3 +$ и т. д. истинная его сумма будет равна $\frac{1}{1-x}$, ибо этот ряд происходит из разложения этой дроби, какое бы число ни подставлять вместо x. При этом соглашении если ряд будет сходящимся, то новое определение слова сумма совпадет с обычным. а так как расходящиеся ряды не имеют никакой суммы в собственном смысле слова, то из этого нового наименования не проистечет никаких неудобств. Приняв это определение, мы сможем сохранить выгоды пользования расходящимися рядами и в то же время защититься от всяческих обвинений» [1].

Как теперь говорят, Эйлер наложил на понятие обобщенной суммы ряда условие регулярности; обобщенная сумма ряда должна в случае сходимости совпадать с обыкновенной суммой. Оба описанных нами приема суммирования, предложенные Эйлером, регулярны. С определением суммы ряда как конечного выражения, порождающего этот ряд, связана трудность, на которую указал в переписке с Эйлером Николай I Бернулли: не может ли один и тот же расходящийся ряд возникнуть при разложении двух существенно различных выражений, сообщающих ему два разных значения? Примеров такого рода Бернулли не привел, и Эйлер был уверен, что такие случаи невозможны, так что каждый ряд, сходящийся или расходящийся, имеет единственную сумму. Некоторые, казалось бы, противоречащие этому утверждению примеры были предложены в конце XVIII в., но Лагранж показал, что противоречие является лишь кажущимся. «И в действительности, — писал Г. Харди, — утверждение Эйлера, если его надлежащим образом истолковать, верно, ибо сходящийся степенной ряд обладает единственной порождающей его фунцией» [2]. Однако за пределами степенных рядов положение дел осложняется и утверждение Эйлера, вообще говоря, утрачивает силу.

---

[1] *Л. Эйлер.* Дифференциальное исчисление, стр. 101. См. также статью Эйлера «О расходящихся рядах» (Novi Commentarii (1754—1755) 1760).

[2] *Г. Харди.* Расходящиеся ряды. Перевод Д. А. Райкова. М., 1951, стр. 29.

Следует добавить, что Эйлер отдавал себе отчет в недостаточной обоснованности своих методов суммирования. В статье «Аналитические этюды» (Exercitationes analyticae. Novi Commentarii, (1772)1773) он, вычислив $1 - \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{4} + \ldots = 0{,}380\ldots$, писал, что не может с полной уверенностью приписать таким равенствам абсолютную истинность. Еще ранее, в работе о функциональном уравнении дзета-функции, он, приведя еще одно найденное им важное уравнение

$$\frac{1 - 3^{n-1} + 5^{n-1} - \ldots}{1 - 3^{-n} + 5^{-n} - \ldots} = \frac{\Gamma(n)\,2^n}{\pi^n} \sin \frac{n\pi}{2}$$

(вновь открытое К. Мальмстеном в 1842 г. и в третий раз О. Шлёмильхом в 1849 г.), выражал надежду, что поиски его полного доказательства прольют много света на массу исследований этого рода.

Вероятно, под влиянием Эйлера переменил отношение к расходящимся рядам Д. Бернулли, изложивший свои взгляды и результаты в статье «О суммированиях парадоксально правильных рядов и их истолковании и применении» (De summationibus serierum quarundam incongrue veris earumque interpretatione atque usu. Novi Commentarii, (1771) 1772). В несколько метафизическом плане Д. Бернулли приводит соображения в пользу употребления расходящихся рядов и их сумм, которые хотя и неверны взятые конкретно (in concreto), но вовсе не нелепы взятые отвлеченно (in abstracto). Такие парадоксальные суммы полезны как промежуточные звенья вычислений, и они приводят к правильным заключениям, подобно тому как употребление мнимых количеств приводит к правильным действительным значениям. В качестве одного из примеров Д. Бернулли рассматривает ряд $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$ при $x = 1$. Он подчеркивает, что почленное интегрирование и последующая подстановка $x = 1$ в этом случае дают правильное значение $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$, а ведь правильный результат нельзя было бы вывести законным путем из ложного. Но более всего интересен новый метод суммирования, который Д. Бернулли приложил к периодическим колеблющимся рядам $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k$, где при некотором p и любом n имеет место $u_{n+p} = u_p$, причем $u_0 + u_1 + \ldots + u_{p-1} = 0$. Обобщенная сумма такого рекуррентного ряда вычисляется как предел среднего арифметического частных сумм, т. е. $\lim \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_{n-1}}{n}$. Именно этот прием, в сущности, применил Лейбниц к ряду $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$; Д. Бернулли замечает, что к рассматриваемому типу относятся ряды по синусам и косинусам кратных дуг при частных значениях дуги.

Д. Бернулли признавал, что не может доказать общим образом свой метод, но он и не усматривал в нем, как мы теперь, определения суммы расходящегося ряда. Э. Чезаро (1890) вновь пришел к этому регулярному методу суммирования, изучая вопрос об умножении рядов; Л. Фейер применил метод Бернулли — Чезаро в теории тригонометрических рядов (1904).

Выяснение условий, в которых правомерны обобщенные методы суммирования, представляло задачу, превосходившую возможности XVIII в. Между тем манипуляции с расходящимися рядами не всегда

производились с должной осторожностью, и даже Эйлер иногда формулировал неверные результаты. Так, в статье о вычислении π с помощью асимптотического разложения, проведенном с такой тонкостью, Эйлер приписал любой геометрической прогрессии, продолженной в обе стороны, сумму, равную нулю:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x^k = \sum_{k=-\infty}^{-1} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{1-x}$$

(Commentarii, (1739) 1750; ср. выше, стр. 308).

В первой половине XIX в., когда Больцано, Коши, Абель и другие начали построение теории сходимости рядов, многие математики заняли по отношению к расходящимся рядам резко отрицательную позицию. Однако полностью эта область анализа никогда не оставалась заброшенной. И как раз на основе теории сходимости, а также теории аналитических функций стали возможными новые успехи теории суммирования. Существенным явилось здесь учение Вейерштрасса об аналитическом продолжении. Если функция $f(z)$ — аналитическая в области g и существует $F(z)$, аналитическая в более широкой области G и в g совпадающая с $f(z)$, то $F(z)$ называют аналитическим продолжением $f(z)$. Аналитическое продолжение является единственным, и естественно $F(z)$ обозначить также $f(z)$. Областью g может служить и промежуток действительной оси x. Так степенной ряд $1 + x + x^2 + \ldots$, сходящийся к $f(x) = \frac{1}{1-x}$ в промежутке $(-1, +1)$ и вне этого интервала на оси x расходящийся, имеет своим аналитическим продолжением на всю плоскость комплексного переменного, исключая точку $z = 1$, функцию $f(z) = \frac{1}{1-z}$, совпадающую с $f(x)$ в промежутке $(-1, +1)$. Таким образом, сумма данного ряда, обобщенная в смысле Эйлера, есть аналитическое продолжение его суммы в промежутке $(-1, +1)$. Другим примером аналитического продолжения в XVIII в. может служить одно преобразование степенного ряда, предложенное Гольдбахом (Commentarii, (1727) 1729). «В этот золотой век,— писал Ж. Адамар,— математики часто пользовались в принципе идеей аналитического продолжения, тогда как для того, чтобы получить общее его определение, пришлось дожидаться Коши и Вейрштрасса» [1].

Начала общей теории суммирования расходящихся рядов были положены на рубеже XIX и XX вв. Э. Чезаро, Э. Борелем, Л. Фейером, Г. Ф. Вороным и другими учеными. Это привело к пересмотру преобладавшей до того в течение нескольких десятилетий отрицательной оценки идей Эйлера. Вместе с тем методы суммирования Эйлера и Д. Бернулли получили в новой теории строгое и надежное обоснование.

Тригонометрические ряды

В письме к Гольдбаху от 4 июля 1744 г. Эйлер сообщал: «Я работаю сейчас над трактатом по дифференциальному исчислению, в котором сделал различные любопытные открытия касательно рядов» [2],— и, среди других

[1] См. Труды Первого Всесоюзного съезда математиков (1930). М.—Л., 1936, стр. 120.
[2] *L. Euler* und *Chr. Goldbach*. Briefwechsel, 1729—1764, S. 195.

результатов, указал два следующих:

$$\frac{x}{2}+\sin x+\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+\cdots=\frac{\pi}{2}, \tag{1}$$

$$1+\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cdots=\frac{1}{2}. \tag{2}$$

Ряд (1) представлял собой первое в истории математики разложение алгебраической рациональной функции, в данном случае $\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}$, в бесконечный ряд Фурье (оно справедливо при $0<x<2\pi$); второе разложение расходится для всех x. Эйлер ни здесь, ни в других случаях не затрагивает вопрос о сходимости тригонометрического ряда [1].

Обе приведенные формулы Эйлер включил в «Дифференциальное исчисление» (1755), причем первую он вывел с помощью довольно сложных преобразований, отправляясь от ряда Тейлора для $\operatorname{arctg} x$, а вторую — дифференцированием первой. Другой способ изложен в статье «Средства вычисления синусов», представленной Эйлером Берлинской академии наук 9 марта 1752 г. и Петербургской — год спустя (Subsidium calculi sinuum. Novi Commentarii, (1754—1755) 1760). В этой статье Эйлер с помощью формул Муавра выразил $\sin^m x$, $\cos^n x$ и их произведения суммами синусов и косинусов кратных дуг, причем формально перенес свои результаты на случай отрицательных показателей, когда возникают расходящиеся ряды. Здесь же он изложил оригинальный прием разложения функций в тригонометрические ряды, который употреблял и позднее (Novi Commentarii, (1773) 1774; Nova Acta, (1789) 1793). Именно: если известна сумма ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n = f(z)$ с действительными коэффициентами a_n и комплексным аргументом $z=r(\cos x+i\sin x)$, то отделение действительной и мнимой частей дает суммы рядов $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\cos nx$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\sin nx$. В случае геометрической прогрессии $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a^n z^n=\frac{1}{1-az}$ Эйлер получил таким образом разложения:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n\cos nx=\frac{1-a\cos x}{1-2a\cos x+a^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a^n\sin nx=\frac{a\sin x}{1-2a\cos x+a^2},$$

которые, впрочем, вывел еще в главе о рекуррентных рядах «Введения в анализ бесконечных» (1748) при помощи фактического деления числителей обеих дробей на их знаменатели. Интегрируя вторую формулу, Д. Бернулли впоследствии нашел при $a=1$ тригонометрический ряд для $\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2(1-\cos x)}$ (см. стр. 317). Эйлер же получил из первой формулы при

[1] Следует указать, что при всех $x\neq 0$ число $-1/2$ есть предел среднего арифметического частных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos nx$. Говорят, что этот ряд суммируется к значению $-1/2$ процессом средних арифметических всюду, исключая $x=0$.

$a = 1$ уже встретившееся разложение

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cdots = -\frac{1}{2}$$

и при $a = -1$ другое, также расходящееся всюду,

$$\cos x - \cos 2x + \cos 3x - \cdots = \frac{1}{2}.$$

Интегрируя почленно последнее, Эйлер пришел к новому разложению (сходящемуся при $-\pi < x < \pi$)

$$\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \cdots = \frac{x}{2}$$

и, интегрируя вторично, к

$$\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \cdots = \frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4}.$$

Постоянная интегрирования определяется в последнем случае при $x = 0$ из равенства $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \cdots = \frac{\pi^2}{12}$ (стр. 338), в этом разложении $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

В те же годы тригонометрические ряды получили применение в работах Эйлера, Д. Бернулли, Даламбера и Клеро по механике и математической физике. Чрезвычайно плодотворной была идея Д. Бернулли представить в форме ряда по синусам кратных дуг общее решение уравнения в частных производных, выражающего малые колебания струны. Мы еще обратимся к задаче о струне и возбужденным ею спорам (см. стр. 412 и след.), здесь же отметим немногое. Д. Бернулли заявил, что тригонометрический ряд вида

$$\alpha \sin \frac{\pi x}{a} + \beta \sin \frac{2\pi x}{a} + \gamma \sin \frac{3\pi x}{a} + \cdots$$

может служить для изображения любой функции, любой кривой, для этого нужно только выбрать подходящим образом коэффициенты α, β, γ, подобно тому как это делают в случае степенного ряда. Эйлер на это возразил, что такой ряд представляет собой периодическую и к тому же нечетную функцию и, следовательно, не может выражать функции непериодические и, в частности, четные. Одной из причин спора была неясность в вопросе о промежутке, в котором ряд может или должен выразить данную функцию. Бернулли был прав, думая, что произвольная (в некотором смысле) функция представима рядом по синусам на любом конечном промежутке; однако такое представление, вообще говоря, невозможно для всех значений аргумента. Эйлер, со своей стороны, был прав, говоря, что произвольная (в том же смысле) функция не представима рядом по синусам для всех значений аргумента; однако такое представление возможно на всяком конечном промежутке. Вместе с тем Эйлер полагал, что функция, разрывная в его понимании, т. е. заданная на некотором участке двумя разными аналитическими выражениями, не может быть аналитически представлена одной формулой, а Бернулли не мог показать, что такое представление возможно (ср. стр. 253). Наконец, оба они не знали общего приема вычисления коэффициентов тригонометрического ряда для данной функции.

В конце концов позиции как Эйлера, так и Д. Бернулли не были жесткими и претерпевали некоторые изменения. 24 мая 1764 г. Эйлер писал Иоганну III Бернулли, что не собирается полностью отвергать возможность представить рядом синусов любую кривую, но считает определение бесконечного числа коэффициентов разложения крайне трудным и даже невыполнимым делом. А 25 июля 1765 г. Д. Бернулли тому же адресату заявлял: «Мой метод мне все более и более представляется общим, но лишь *потенциально*, ибо я согласен, что определение моих коэффициентов чаще всего окажется вне анализа, или, лучше, вне его возможностей» [1]

Однако в то время, когда Д. Бернулли писал эти строки, задача определения коэффициентов, которые мы теперь называем по имени Фурье, была в сущности решена дважды. Удивительным образом к этим формулам Фурье математики пришли затем еще два раза.

В работах по теории планетных движений Эйлер, Клеро, Даламбер встретились с разложением функции вида $(1 - a\cos x)^{-m}$ в ряды по косинусам кратных значений угла x. Случай $m = {}^3/_2$ рассмотрел Эйлер в премированных Парижской академией «Исследованиях по вопросу о неравенствах в движении Сатурна и Юпитера» (Recherches sur la question des inégalités du mouvement de Saturne et de Jupiter. Paris, 1749), но он ограничился нахождением численных коэффициентов первых пяти членов, которые давали радиус-вектор и долготу обеих планет с достаточным для его целей приближением. Даламбер во втором томе «Исследований о различных важных вопросах системы мира» (Recherches sur les différents points du système du monde. Paris, 1754) представил два первых коэффициента разложения указанной функции в виде интегралов, для чего сперва почленно проинтегрировал обе части разложения, а затем их произведение на $\cos x$. Несколько спустя общий результат был получен Клеро в работе «О видимой орбите Солнца вокруг Земли с учетом возмущений, вызываемых действием Луны и главных планет» (Sur l'orbite apparente du soleil autour de la terre, en ayant égard aux perturbations produites par les actions de la lune et des planètes principales. Mém. Ac. Paris, (1754) 1759). Отправляясь от определения тригонометрического многочлена по косинусам кратных углов, принимающего данные значения для n данных равноотстоящих значений аргумента, он с помощью предельного перехода перешел к разложению произвольной функции $f(x)$ на отрезке $(0, 2\pi)$ в бесконечный ряд вида

$$f(x) = A_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx, \qquad \text{где } A_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx.$$

Очень близко подошел к тому же результату Лагранж в первой своей работе о колебании струны — «Исследованиях о природе и распространении звука» (Recherches sur la nature et la propagation du son. Miscellanea Taurinensia, 1759). Он построил тригонометрический многочлен с n членами, соответствующий кривой, проходящей через данные n точек с равноотстоящими абсциссами, в форме, от которой путем некоторого предельного перехода, при $n \to \infty$, можно было бы прийти к тригонометрическому ряду Фурье. Однако Лагранж не пошел далее интерполяционного многочлена, так как не считал возможным выразить тригонометрическим рядом произвольную функцию.

[1] *C. Truesdell.* The rational mechanics of flexible or elastic bodies, 1638—1788. Turici, 1960, p. 278. Письма, о которых идет речь, еще не опубликованы.

После некоторого перерыва к тем же проблемам вновь обратился Эйлер. Весной 1777 г. он представил Петербургской академии одну за другой статьи: «Легкий метод отыскания расположенных по синусам или косинусам кратных углов рядов, имеющих широчайшее применение в общей астрономической теории» и «Дальнейшее исследование рядов, расположенных по кратным какого-либо угла» (Methodus facilis inveniendi series per sinus cosinusve angulorum multiplorum procedentes, quarum usus in universa theoria astronomiae est amplissimus; Disquisitio ulterior super seriebus secundum multiplae cujusdam anguli progredientibus. Nova Acta, (1793) 1798). В первой статье коэффициенты разложения данной на отрезке $(0, \pi)$ функции $f(x)$ в ряд по косинусам

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx$$

выражаются приближенно. Если $\pi = n\Delta x$, где n — натуральное число, то формулы Эйлера можно записать в виде

$$a_0 + a_n + a_{2n} + a_{3n} + \cdots =$$
$$= \frac{1}{n}\left\{\frac{1}{2} f(0) + f(\Delta x) + f(2\Delta x) + \cdots + f[(n-1)\Delta x] + \frac{1}{2} f(\pi)\right\}$$

и при $k = 1, 2, 3, \ldots, n-1$

$$a_k + a_{2n-k} + a_{2n+k} + a_{4n-k} + a_{4n+k} + \cdots =$$
$$= \frac{2}{n}\left\{\frac{1}{2} f(0) + \cos k\Delta x f(\Delta x) + \cdots + \cos(n-1)\Delta x f[(n-1)\Delta x] + \frac{1}{2}\cos k\pi f(\pi)\right\}.$$

При достаточно большом n и быстрой сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ (это Эйлер специально указывает) отсюда получаются достаточно точные приближения для a_k $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$. Предельный переход при $n \to \infty$ мог бы дать и интегральные формулы коэффициентов, но их Эйлер вычисляет во второй работе иначе. Предполагая, что разложение $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx$ имеет место, он умножает обе части на $\cos mx$, где $m = 1, 2, 3, \ldots$, и, применяя известные равенства:

$$\int_0^{\pi} \cos mx\, dx = 0, \qquad \int_0^{\pi} \cos mx \cos nx\, dx = \begin{cases} 0\ (m \neq n), \\ \frac{\pi}{2}\ (m = n), \end{cases}$$

почленным интегрированием находит, что

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\, dx, \qquad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \cos nx\, dx.$$

Формулы коэффициентов в разложении по синусам Эйлер не привел, ограничившись замечанием, что сказанное легко переносится и на этот случай.

В обеих рассмотренных работах Эйлера речь шла о разложении в тригонометрический ряд функции, заданной только на конечном участке. Это, казалось бы, позволило по-новому подойти к тем трудностям, которые обнаружились в дискуссиях 50—60-х годов. Но Эйлер не вернулся к старому спору, а результаты его увидели свет только в 1798 г. Зато еще ранее, чем были представлены эти статьи Эйлера, Д. Бернулли, исследуя поведение тригонометрического ряда в целом, показал, что такой ряд, вообще говоря, представляет данную функцию только на определенном конечном промежутке; попутно он нашел новые интересные разложения. Речь идет о его статье «Об особенности бесконечных рядов, образуемых синусами или косинусами углов, следующих в арифметической прогрессии, и об их суммировании и употреблении» (De indole singulari serierum infinitarum quas sinus vel cosinus angulorum arithmetice progredientium formant, earumque summatione et usu. Novi Commentarii, (1772) 1773). О разложении

$$\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \cdots = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}$$

(ср. стр. 313) Бернулли пишет, что оно справедливо только в промежутке от 0 до 2π. Совершенно правильно отмечен также скачок суммы ряда от значения $-\pi/2$ к значению $\pi/2$ при переходе через значение аргумента $x = 2\pi$. Далее, интегрируя ряд почленно, Д. Бернулли находит сумму

$$\cos x + \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \cdots = C - \frac{\pi x}{2} + \frac{x^2}{4},$$

где постоянная C определяется путем подстановки $x = \pi/2$ и $x = \pi$, а затем сравнения первого результата со вторым, поделенным на четыре, что дает $C = \pi^2/6$. На этом же пути Д. Бернулли суммирует ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^4} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^5}.$$

Упомянем еще, что он вывел разложение

$$\cos x + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} + \cdots = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2(1 - \cos x)},$$

справедливое при $0 < x < 2\pi$ (см. стр. 313).

Последние статьи Эйлера и Д. Бернулли по тригонометрическим рядам остались, по-видимому, незамеченными. Во всяком случае в начале XIX в. Фурье вновь нашел формулы коэффициентов, носящие его имя, притом как для разложений в неполные ряды по синусам или косинусам, так и для разложения вида

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

При этом он впервые показал, что и разрывная в смысле Эйлера функция, заданная на определенном участке несколькими аналитическими выражениями, может быть представлена рядом Фурье. Риман, основываясь на

устном рассказе Дирихле, писал: «Когда Фурье в одной из своих первых работ по теории тепла, предложенной им Французской академии (21 декабря 1807 г.), впервые сформулировал теорему о том, что совершенно произвольно (графически) заданная функция может быть представлена тригонометрическим рядом, то это утверждение для маститого Лагранжа было столь неожиданным, что он выступил с самыми решительными возражениями»[1]. Фурье же предпринял первую попытку доказать теорему о разложимости произвольной функции в «ряд Фурье», сделал первые шаги в изучении поведения коэффицентов a_n, b_n при $n \to \infty$ (проблема, на которую обратили внимание уже Эйлер и его современники) и успешно применил тригонометрические ряды к решению уравнений математической физики, тем самым конкретно претворив в жизнь общие идеи Д. Бернулли. Результаты своих исследований Фурье изложил в «Аналитической теории тепла» (1822), выход которой в свет открыл новую эпоху в теории тригонометрических рядов, отмеченную прежде всего строгим установлением различного вида условий, достаточных для разложимости функции в ряд Фурье (Лежен-Дирихле, 1829—1837; Лобачевский, 1834—1836). С дальнейшей разработкой теории тригонометрических рядов, в которой участвовали Риман, Г. Кантор и другие крупнейшие математики, были связаны многие успехи анализа, как в его основаниях — теории множеств и теории функций, так и в приложениях к естествознанию и технике. В XX в. значительный вклад внесли в эту теорию Н. Н. Лузин, Д. Е. Меньшов и другие представители Московской математической школы.

Мы обратимся теперь к отдельным исследованиям более специального характера и прежде всего к тем, которые в то время, да и позднее, относились к введению в анализ.

Показательная и логарифмическая функции

Значительные успехи были достигнуты в изучении наиболее употребительных классов функций, частью известных ранее, частью введенных в рассматриваемое время. При этом понятие аналитической функции, «бессознательно», по выражению Ж. Адамара, принятое математиками XVIII в. и первой половины XIX в., «как тонкий и безошибочный инстинкт руководило ими при исследовании классических трансцендентных»[2]. Мы начнем с элементарных функций, круг которых был окончательно установлен к началу второй трети XVIII в. Следует сказать, что учение об элементарных функциях вплоть до Эйлера далеко еще не приняло современный вид. Некоторые отделы строились геометрически, как, например, теоремы о разложении на множители двучленов вида $x^n \pm a^n$ у Коутса (см. стр. 61). В некоторых вопросах не была достигнута еще ясность; это относится, в частности, к знакам тригонометрических функций. Так, Ф. Х. Майер, автор интересных работ по тригонометрии (см. стр. 207), принимал синус и тангенс тупого угла положительными, а косинус и котангенс — отрицательными (Commentarii, (1727) 1729).

Систематическое изложение учения об элементарных функциях в чисто аналитической форме впервые дал Эйлер в первом томе «Введения в

[1] *Б. Риман.* Сочинения. Перевод под редакцией и со статьей В. Л. Гончарова. М.—Л., 1948, стр. 230.
[2] См. Труды Первого Всесоюзного съезда математиков, стр. 120.

анализ бесконечных» (1748), включив в него как творчески переработанные открытия своих предшественников, так и многие собственные результаты. При этом многие функции он рассмотрел не только в действительной, но и комплексной области.

О вкладе Эйлера в теорию целых рациональных функций говорилось во второй главе. Теперь мы коротко остановимся на его трактовке показательной, логарифмической и основных тригонометрических функций. Рассмотрев в VI главе простейшие свойства показательной функции a^x, $a > 0$, и логарифмической функции, впервые ясно определенной как обратной для показательной, Эйлер в VII главе переходит к их разложениям в степенные ряды, применяя, как это отметил еще Лагранж (1797), метод, впервые использованный Галлеем в 1695 г. и основанный на формуле бинома Ньютона (см. т. II, стр. 162—163). Приняв показатель ω «бесконечно малым, т. е. столь малой дробью, что она только-только не равна нулю» [1], он пишет a^ω в виде $1 + \psi$, где ψ — бесконечно малая, и допускает, что $\psi = k\omega$, где k — постоянная, зависящая от выбора числа a. Тогда, если конечное число z представить в виде произведения $n\omega$, где в силу бесконечной малости ω величина n бесконечно большая, будет

$$a^z = \left(1 + \frac{kz}{n}\right)^n$$

и, по правилу бинома, которое предполагается известным,

$$a^z = 1 + \frac{1}{1} kz + \frac{1\,(n-1)}{1\cdot 2\cdot n} k^2z^2 + \frac{1\,(n-1)\,(n-2)}{1\cdot 2n\cdot 3n} k^3z^3 + \cdots$$

Наконец, «если n станет больше всякого заданного числа, то дробь $\frac{n-1}{n}$ станет равна единице» [2], и точно так же $\frac{n-2}{n} = 1$, $\frac{n-3}{n} = 1$ и т. д. Поэтому

$$a^z = 1 + \frac{kz}{1} + \frac{k^2z^2}{1\cdot 2} + \frac{k^3z^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots,$$

а отсюда при $z = 1$ находится соотношение между a и k

$$a = 1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{1\cdot 2} + \frac{k^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots$$

В частности, при $k = 1$ получается основание натуральных логарифмов

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots,$$

которое Эйлер вычисляет тут же с 24 верными знаками.

Здесь следует привести несколько исторических справок. Впервые число e как $\lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ввел Д. Бернулли в письме к Гольдбаху от 30 января (ст. ст.) 1729 г. Он получил его в качестве значения x, при котором достигает максимума функция $x^{1/x}$, причем тут же выразил e в форме

---

[1] *Л. Эйлер.* Введение в анализ бесконечных, т. I, стр. 101. Число a Эйлер сперва принимает бо́льшим 1.

[2] *Л. Эйлер.* Введение в анализ бесконечных, т. I, стр. 102. Эйлер обозначает здесь бесконечную величину буквой i (от infinitum), мы заменили ее везде на n.

только что приведенного ряда[1]. Сам Д. Бернулли, разумеется, не пользовался знаком предела, он писал, что $x = \left(\frac{A+1}{A}\right)^A$, где $A = \infty$. Не было у него и символа e, который употребил для обозначения основания натуральных логарифмов впервые Эйлер, сперва в письме к Гольдбаху от 25 ноября (ст. ст.) 1731 г., затем во втором томе «Механики» (1736) и других сочинениях. Функцию e^z как предел $\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$ при $n \to \infty$ Эйлер рассмотрел еще в «Miscellanea Berolinensia» за 1743 г.

Приведенный вывод отчетливо характеризует формальную манеру инфинитезимальных операций, преобладавшую в XVIII в. Столь же свободно обращается Эйлер с бесконечными величинами и предельными переходами и в других случаях, прежде всего при выводе логарифмического ряда, исходя из равенства

$$\log(1+x) = \frac{n(1+x)^{1/n} - n}{k},$$

в котором $n = \infty$. Отметим одну подробность. Если в ряде

$$\log(1+x) = \frac{1}{k}\left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots\right)$$

взять $1 + x = a$, то для k получается

$$k = \frac{a-1}{1} - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \cdots$$

Но тогда при $a = 10$ значение k, равное приблизительно 2,30258, выражается рядом

$$2{,}30258 = \frac{9}{1} - \frac{9^2}{2} + \frac{9^3}{3} - \cdots$$

Эйлер пишет, что «трудно понять», как это может быть, ибо, взяв даже много членов данного (расходящегося) ряда, «нельзя получить суммы, близкой к истинной». Для «устранения этого неудобства» он тотчас переходит к ряду $\log\frac{1+x}{1-x}$ и при $\frac{1+x}{1-x} = a$, т. е. $x = \frac{a-1}{a+1}$, получает для k (сходящееся) разложение

$$k = 2\left[\frac{a-1}{a+1} + \frac{(a-1)^3}{3(a+1)^3} + \cdots\right],$$

члены которого при $a = 10$ «заметно убывают и поэтому скоро дают для k достаточно близкое значение»[2]. Этими замечаниями по поводу парадоксального равенства $2{,}30258 = \frac{9}{1} - \frac{9^2}{2} + \frac{9^3}{3} - \cdots$ Эйлер здесь ограничивается.

В III главе первой части «Теории аналитических функций» (1797) Лагранж довольно близко последовал при разложении показательной и логарифмической функций за Галлеем и Эйлером (см. стр. 289), метод ко-

---

[1] «Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII[e] siècle», publiée par P.—H. Fuss, t. II, p. 246—247.

[2] *Л. Эйлер.* Введение в анализ бесконечных, т. I, стр. 104—105.

торых считал «допустимым в анализе», хотя он и «не обладает ни очевидностью, ни строгостью, которых нужно желать в началах какой-либо науки»[1]. В следующей главе Лагранж предложил другой вывод, «освобожденный от рассмотрения бесконечности»[2]; этот вывод, однако, также основан на формальном и некритическом употреблении биномиального разложения.

Оригинальным путем пошел да Кунья. В IX главе своих «Математических начал» (1790) он прежде всего определяет сходящийся ряд как ряд, в котором, взяв «данное число первых членов, можно пренебречь остальными без приметной ошибки»[3]. Такое определение предполагает, однако, известным, что означает выражение «сумма тех членов, которыми пренебрегают». Затем доказывается сходимость бесконечной убывающей прогрессии и, как следствие, сходимость при всех значениях a ряда

$$1 + a + \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{2 \cdot 3} + \frac{a^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots$$

Для этого остаток ряда, имеющий вид

$$c + \frac{ac}{b+1} + \frac{a^2c}{(b+1)(b+2)} + \frac{a^3c}{(b+1)(b+2)(b+3)} + \cdots,$$

где $c = a^b/b!$ и $b + 1 > |a|$, почленно сравнивается с убывающей прогрессией

$$c + \frac{ac}{b+1} + \frac{a^2c}{(b+1)^2} + \frac{a^3c}{(b+1)^3} + \cdots$$

В другом следствии утверждается сходимость ряда

$$a + \frac{a^3}{3} + \frac{a^5}{5} + \cdots$$

при всех $a < 1$ (разумеется, речь идет здесь об абсолютных значениях величин). Наконец, любая действительная степень какого-либо положительного числа a^b определяется — в духе современной теории аналитических функций — как сумма ряда

$$1 + bc + \frac{b^2c^2}{2} + \frac{b^3c^3}{2 \cdot 3} + \frac{b^4c^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots,$$

где c — число, для которого

$$1 + c + \frac{c^2}{2} + \frac{c^3}{2 \cdot 3} + \frac{c^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots = a,$$

а возможность такого представления любого $a > 0$ обосновывается следующим образом. Да Кунья полагает

$$c = 2\left\{\frac{a-1}{a+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^5 + \cdots\right\},$$

где (логарифмический) ряд справа сходится при любом a, после чего, обозначив $\frac{a-1}{a+1} = k$, так что $a = \frac{1+k}{1-k}$, он выражает a сходящимся (в силу

[1] *J. L. Lagrange.* Théorie des fonctions analytiques, p. 31.
[2] Там же.
[3] *J. A. da Cunha.* Principes mathématiques, p. 117.

$k < 1$) бесконечным рядом $1 + 2k + 2k^2 + 2k^3 + \ldots$. Подстановка в ряд $1 + c + \frac{c^2}{2} + \frac{c^3}{2 \cdot 3} + \cdots$ вместо c ряда $2\left(k + \frac{k^3}{3} + \frac{k^5}{5} + \cdots\right)$, где $k < 1$, основанная на возведении последнего в целые положительные степени, и перегруппировка членов получившегося выражения приводят к тому же ряду $1 + 2k + 2k^2 + 2k^3 + \ldots$, сумма которого равна a, так что $1 + c + \frac{c^2}{2} + \frac{c^3}{2 \cdot 3} + \cdots = a$. Далее перемножением рядов доказывается основное свойство показательной функции $a^m a^n = a^{m+n}$ при любых m, n.

Мы отмечали уже различные попытки обосновать формулу биномиального разложения (см. стр. 304). Да Кунья выводит ее с помощью только что описанных приемов из экспоненциального ряда. Положив

$$m = 2\left\{\frac{Q}{2+Q} + \frac{1}{3}\left(\frac{Q}{2+Q}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{Q}{2+Q}\right)^5 + \cdots\right\},$$

так что, по доказанному,

$$1 + Q = 1 + m + \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{2 \cdot 3} + \cdots$$

и

$$(1 + Q)^n = 1 + mn + \frac{m^2 n^2}{2} + \frac{m^3 n^3}{2 \cdot 3} + \ldots,$$

он с помощью разложения

$$\frac{Q}{2+Q} = \frac{Q/2}{1 + \frac{Q}{2}} = \frac{Q}{2} - \frac{Q^2}{4} + \frac{Q^3}{8} - \ldots$$

и подстановки этого ряда в ряд для m получает

$$m = Q - \frac{Q^2}{2} + \frac{Q^3}{3} - \frac{Q^4}{4} + \ldots;$$

этот (логарифмический) ряд сходится при $Q < 1$. Вслед за тем подстановка найденного выражения m в предыдущий ряд для $(1 + Q)^n$ дает, после группировки и приведения членов, биномиальное разложение

$$(1 + Q)^n = 1 + nQ + n\frac{n-1}{2}Q^2 + n\frac{n-1}{2}\,\frac{n-2}{3}Q^3 + \ldots,$$

сходящееся в случае произвольного показателя при $Q < 1$. В конце главы да Кунья вводит понятие логарифма и доказывает его свойства [1]. Таково было первое, насколько мы знаем, изложение теории показательной и логарифмической функций, а также исследование формулы бинома, основанное исключительно на применении сходящихся рядов. Вопрос об умножении рядов и перестановке членов да Кунья, естественно, не исследовал. Добавим, что он оперировал со знакоположительными рядами, считая, по-видимому, что знакопеременный ряд сходится, если сходится соответствующий знакопостоянный ряд.

---

[1] В XXI книге «Математических начал» да Кунья возвращается к логарифмической функции и выводит разложение для $\ln(1 + x)$ по методу неопределенных коэффициентов, исходя из свойств $\lg a + \lg b = \lg(ab)$ и допущения разложимости $\ln(1 + x)$ в степенной ряд.

Тригонометрические функции

В VIII главе «Введения в анализ бесконечных» Эйлер переходит к тригонометрическим функциям, которые он называл общим термином «трансцендентных количеств, получающихся из круга»,— наш термин был введен в 1770 г. С. Клюгелем (см. стр. 208). Прежде всего Эйлер с помощью формул приведения для $\sin\left(k\frac{\pi}{2}+z\right)$ и $\cos\left(k\frac{\pi}{2}+z\right)$ при произвольном целом k вносит окончательную ясность в вопрос о знаках тригонометрических функций любой дуги; о том, что эти функции он рассматривал как безразмерные числовые количества, мы говорили ранее (см. стр. 207). Затем на основе теорем о синусе и косинусе суммы или разности чрезвычайно просто выводятся формулы Муавра (для натурального показателя) в привычной нам записи

$$(\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z)^n = \cos nz \pm \sqrt{-1}\sin nz,$$

а из них формулы:

$$\cos nz = \frac{(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^n + (\cos z - \sqrt{-1}\sin z)^n}{2},$$

$$\sin nz = \frac{(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^n - (\cos z - \sqrt{-1}\sin z)^n}{2\sqrt{-1}},$$

которые Эйлер применяет для последующих преобразований [1]. Именно из этих последних формул получаются разложения

$$\cos nz = (\cos z)^n - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}(\cos z)^{n-2}(\sin z)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}(\cos z)^{n-4}(\sin z)^4 - \cdots,$$

$$\sin nz = \frac{n}{1}(\cos z)^{n-1}\sin z - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(\cos z)^{n-3}(\sin z)^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}(\cos z)^{n-5}(\sin z)^5 - \cdots,$$

которые без доказательства привел И. Бернулли в «Acta Eruditorum» за 1701 г., не знавший, по-видимому, о ньютоновском разложении $\sin nz$ по степеням $\sin z$ (стр. 57) и его доказательства Муавром в «Philosophical Transactions» за 1698 г. Из этих двух разложений, принимая z бесконечно малым и n бесконечно большим при условии, что $nz = v$ сохраняет какое-либо конечное значение, а также полагая $\sin z = z = v/n$ и $\cos z = 1$, Эйлер по-новому выводит бесконечные ряды:

$$\cos v = 1 - \frac{v^2}{1\cdot 2} + \frac{v^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \ldots,$$

$$\sin v = v - \frac{v^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{v^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \ldots$$

---

[1] Формулу для $\sin nz$ открыл гораздо ранее Николай I Бернулли, сообщивший ее письменно в 1728 г. Даниилу, который опубликовал ее, сославшись на письмо своего двоюродного брата, в «Commentarii», (1728) 1732.

Далее следует главный результат, а именно: Эйлер доказывает, что, как он предупредил в начале главы, синусы, косинусы и дуги «выводятся из самих логарифмов и показательных величин, когда те содержат мнимые количества» [1].

Формулы Эйлера и спор о логарифмах

Те же формулы Муавра для $\cos nz$ и $\sin nz$ при бесконечно малом z, бесконечном n и фиксированном $nz = v$ тотчас приводят, поскольку $\left(1 \pm \frac{v\sqrt{-1}}{n}\right)^n$ при $n \to \infty$ есть $e^{\pm v\sqrt{-1}}$, к знаменитым формулам Эйлера, связывающим в комплексной области основные тригонометрические и показательную функции:

$$\cos v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}}}{2}, \qquad \sin v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}} - e^{-v\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},$$

или, что то же,

$$e^{+v\sqrt{-1}} = \cos v + \sqrt{-1}\sin v,$$
$$e^{-v\sqrt{-1}} = \cos v - \sqrt{-1}\sin v.$$

К этому Эйлер добавляет формулу для дуги

$$z = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \ln \frac{1 + \sqrt{-1}\,\mathrm{tg}\, z}{1 - \sqrt{-1}\,\mathrm{tg}\, z}.$$

Этими основоположными результатами, которые уже Лагранж справедливо рассматривал как «одно из наиболее прекрасных аналитических открытий, сделанных в настоящем веке» [2], Эйлер владел по меньшей мере за десять лет до выхода «Введения в анализ бесконечных». Равенства, равносильные формулам Эйлера, имелись в одной статье, представленной Петербургской академии осенью 1739 г. (Commentarii, (1740) 1750), а сами эти формулы были обнародованы во второй статье Эйлера о суммировании рядов вида $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$, помещенной в «Miscellanea Berolinensia» в 1743 г.,— об этой работе нам придется еще говорить. О найденных им формулах Эйлер неоднократно сообщал в те годы и своим корреспондентам — И. Бернулли в 1740 г., Гольдбаху, которому 9 декабря 1741 г. он писал об «удивительном парадоксе», состоящем в том, что $\frac{2^{+\sqrt{-1}} + 2^{-\sqrt{-1}}}{2} = \cos 0{,}6931471805599\ldots$ (т. е. $\cos \ln 2$), а 6 марта 1742 г. и о периодичности показательной функции в комплексной области, наконец — Николаю I Бернулли в начале 1742 г. В письме к И. Бернулли от 29 октября 1740 г. Эйлер отметил, что $2\cos x$ и $e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}$ раскладываются в один и тот же ряд и потому представляют собой одно и то же решение некоторого линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

[1] *Л. Эйлер.* Введение в анализ бесконечных, т. I, стр. 109.
[2] *J. L. Lagrange.* Leçon sur le calcul des fonctions. Nouv. éd. Paris, 1806, p. 114.

Впрочем, к формулам Эйлера математики подходили или даже находили их еще ранее, но либо останавливались перед решающим шагом, либо не придавали своим результатам большого значения. В статье об интегрировании рациональных дробей (Mém. Ac. Paris, (1702) 1704) И. Бернулли установил, что дифференциал действительного кругового сектора $\frac{dz}{1+z^2}$ подстановкой $z=\frac{t-1}{t+1}\sqrt{-1}$ преобразуется в дифференциал «мнимого логарифма» (logarithme imaginaire). С другой стороны, отмечал он, $\frac{dz}{1+z^2}=\frac{1}{2}\frac{dz}{1+z\sqrt{-1}}+\frac{1}{2}\frac{dz}{1-z\sqrt{-1}}$, т. е. сумме дифференциалов мнимых логарифмов. Из всего этого он заключил, что мнимые логарифмы заменяют собой действительные круговые секторы, и в пояснение добавил, что сумма делается действительной, так как при сложении мнимости уничтожаются.

В дифференциальных соотношениях, обнаруженных И. Бернулли, неявно содержалась зависимость между арктангенсом и логарифмом, которую мы только что привели в начале параграфа. Достаточно было эти соотношения формально проинтегрировать, чтобы зависимость выступила в явной форме. Но этого И. Бернулли не сделал, как не проинтегрировал и дифференциальное уравнение, которое получил в той же работе между арксинусом и некоторым «мнимым логарифмом». Этот вопрос остался в стороне и в другом исследовании И. Бернулли (Acta Eruditorum, 1712), в котором он произвел интегрирование рациональной дроби с мнимым знаменателем. Здесь именно он проинтегрировал, предварительно разложив на такие дроби, уравнение

$$\frac{ndx}{x^2+1}=\frac{dy}{y^2+1},$$

где $x=\operatorname{tg}A$, $y=\operatorname{tg}nA$, и таким образом получил равенство

$$(x-\sqrt{-1})^n(y+\sqrt{-1})=(x+\sqrt{-1})^n(y-\sqrt{-1}),$$

давшее ему представление $\operatorname{tg}nx$ как рациональной функции $\operatorname{tg}x$, ранее без доказательства приведенное Я. Германом (Acta Eruditorum, 1706). Заметим, что указанное выше равенство Бернулли элементарно преобразуется в формулу Муавра.

Заслуги И. Бернулли в первом применении функций комплексного переменного, как и Лейбница, с которым он вел переписку по всему рассматриваемому кругу вопросов, весьма значительны. Продвинуться вперед им обоим воспрепятствовали неясности, присущие в то время понятию логарифма. Об этом свидетельствует дискуссия между Лейбницем и И. Бернулли о природе логарифмов отрицательных чисел. В 1712 г. Лейбниц выступил в «Acta Eruditorum» со статьей, в которой по поводу парадокса Арно о пропорции $\frac{1}{-1}=\frac{-1}{1}$ высказал мнение, что подобного рода пропорции хотя и полезны в вычислениях, но состоят из мнимых отношений, ибо один из их членов меньше, чем ничто. Такие отношения Лейбниц назвал здесь «терпимо истинными». О мнимости отрицательных отношений свидетельствовало, как полагал Лейбниц, и то, что им не соответствуют какие-либо логарифмы, так как положительным логарифмам отвечают числа, большие единицы, а отрицательным — правильные положительные дроби. Таким образом, логарифм числа — 1 не истинный, а

мнимый (imaginarius). Кроме того, если бы логарифм — 1 был действительный, то его половина, т. е. логарифм мнимого числа $\sqrt{-1}$, также была бы действительной, а это бессмысленно. И. Бернулли не согласился с доводами Лейбница, и с весны 1712 г. до лета 1713 г. они вели между собою письменный спор. Бернулли полагал, что логарифмы отрицательных чисел действительны и притом $\log(-a) = \log a$, так что логарифм —1 есть нуль. Ведь из тождества $\frac{d(-x)}{-x} = \frac{dx}{x}$ следует $d\log(-x) = d\log x$ и потому $\log(-x) = \log x$. И. Бернулли выдвигал и другие аргументы, например, что интегральные кривые уравнения $dx = dy/y^n$ при нечетном n, вообще говоря, симметричны относительно оси абцисс и, значит, так же должно обстоять дело при $n = 1$, поэтому логарифмическая кривая состоит из двух симметричных ветвей $x = \log y$ и $x = \log(-y)$, причем $\log(-y) = \log y$. Кроме того, $\log(-a)^2 = \log(+a)^2$ и, следовательно, $2\log(-a) = 2\log(+a)$, т. е. $\log(-a) = \log(+a)$.

Позиция И. Бернулли не изменилась и позднее, при письменном обсуждении с Эйлером в 1727—1728 гг. вопроса о графике функции $y = (-1)^x$ и в связи с этим о логарифмах отрицательных чисел. Эйлер 21 декабря 1728 г. сделал важное возражение против аргументации своего учителя. Из дифференциального равенства $d\log(-x) = d\log x$ следует только, что $\log(-x) = \log x + C$, где $C = \log(-1)$, но допущение $\log(-1) = \log 1 = 0$ приводит к противоречиям. Последовательно применяя метод самого И. Бернулли, изложенный в «Записках» Парижской академии за 1702 г., Эйлер получил — в иных обозначениях — формулу

$$x = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \ln \frac{\cos x + \sqrt{-1}\sin x}{\cos x - \sqrt{-1}\sin x},$$

а из нее при $x = \pi/2$ вывел, что $\ln(-1) = \pi\sqrt{-1}$. Последующие рассуждения И. Бернулли, стремившегося согласовать свою точку зрения со следствиями, извлеченными из его собственного метода Эйлером, были неясными, и корреспонденты, в конце концов, перешли к обсуждению других проблем.

Все эти споры были неминуемы, пока понятие о логарифме и его свойствах долгое время было столь же нечетким, как понятие мнимой величины. Логарифм выступал то как показатель некоторой прогрессии, то как гиперболическая площадь, то в чисто аналитической форме как интеграл или как функция, заданная степенным рядом,— полагая в разложении $\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$ значение $x = -2$, Лейбниц вновь заключал, что логарифм —1 не может быть нулем. Связи между этими различными подходами и границы применимости каждого были изучены недостаточно; кроме того, как и в других случаях, свойства одной категории величин механически переносились на другие, в данном случае с логарифмов положительных чисел на отрицательные. Когда Лейбниц утверждал, что логарифмы отрицательных чисел мнимы, он, в известном смысле, был прав, но сам термин «мнимые» был при этом еще более неопределенным, чем в применении к корням алгебраических уравнений.

Мы не знаем, как смотрел на природу логарифмов отрицательных чисел Р. Коутс, который первым высказал в геометрической форме предложение, носящее теперь название формулы Эйлера (1717). Во всяком случае мы уже писали, что в творчестве Коутса это открытие осталось случай-

ным эпизодом (см. стр. 61), между тем как у Эйлера, несомненно не знакомого с этим результатом Коутса, формулы $e^{\pm v\sqrt{-1}} = \cos v \pm \sqrt{-1}\sin v$ стали органической частью анализа.

В 1745 г. спор Лейбница с И. Бернулли о логарифмах стал широко известен благодаря изданию их переписки Крамером. Вскоре затем дискуссия возобновилась в переписке Даламбера с Эйлером за 1747 и 1748 гг. В исследовании комплексных величин эти два великих ученых шли параллельно, и часто их исследования переплетались, но в вопросе о логарифмах отрицательных чисел они разошлись. Даламбер принял сторону И. Бернулли и так до конца не согласился с Эйлером, который, рассеяв туман, окутывавший проблему, построил учение о логарифмической функции в комплексной области. Основные свои положения Эйлер изложил в письме к Даламберу от 15 апреля 1747 г., а 7 сентября он представил Берлинской академии статью «О логарифмах отрицательных и мнимых чисел» (Sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires); включить этот новый материал в уже печатавшееся «Введение в анализ бесконечных» было поздно. Впрочем, названная статья увидела свет лишь при публикации эйлерова научного наследия в 1862 г., а сам он напечатал переработанный вариант ее «О споре между гг. Лейбницем и И. Бернулли о логарифмах отрицательных и мнимых чисел» (De la controverse entre Mrs Leibnitz et Bernoulli sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires. Mém. Ac. Berlin, (1749) 1751). Не касаясь подробного разбора Эйлером самого спора, мы остановимся на его собственной теории. Отправным пунктом ее служит определение логарифма как функции, обратной показательной, так что $y = \ln x$, если $x = e^y$, причем $x \neq 0$. Средством исследования является разложение на действительные множители двучленов $a^n \pm z^n$, впервые данное Коутсом (см. стр. 61) и подробно и притом чисто аналитически рассмотренное в IX главе «Введения в анализ бесконечных». В частности, двучлен $a^n - z^n$ разлагается при нечетном n в произведение $a - z$ и $(n-1)/2$ трехчленов $a^2 - 2az\cos\frac{2k}{n}\pi + z^2$, а при четном n — в произведение $(a-z)(a+z)$ и $(n-2)/2$ такого же вида трехчленов, причем $2k$ принимает значения 2, 4, 6,... в числе, соответствующем показателю n.

Эйлер представляет комплексное число $x = a + b\sqrt{-1}$ в тригонометрической форме $c(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)$ или $e^C(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)$; тогда $\ln x = C + \ln(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)$, в этих выражениях $c = +\sqrt{a^2+b^2}$, $C = \ln c$, $\cos\varphi = a/c$, $\sin\varphi = b/c$. Если обозначить $u = \ln(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)$, то $\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi = e^u$ можно записать (ср. стр. 319) как $(1+u/n)^n$, $n = \infty$; с другой стороны, $\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi = e^{\varphi\sqrt{-1}} = \left(1 + \frac{\varphi\sqrt{-1}}{n}\right)^n$, $n = \infty$. Так получается двучленное уравнение бесконечно высокой степени

$$\left(1 + \frac{u}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{\varphi\sqrt{-1}}{n}\right)^n = 0,$$

левая часть которого раскладывается на бесконечное количество множителей вида $a^2 - 2az\cos\frac{2k}{n}\pi + z^2$, где $a = 1 + \frac{u}{n}$, $z = 1 + \frac{\varphi\sqrt{-1}}{n}$. Приравнивая каждый из этих множителей нулю, разлагая на линейные,

а также учитывая, что $\cos\frac{2k\pi}{n} = 1$ и $\sin\frac{2k\pi}{n} = \frac{2k\pi}{n}$, Эйлер находит, что

$$1 + \frac{u}{n} = \left(1 + \frac{\varphi\sqrt{-1}}{n}\right)\left(1 \pm \frac{2k\pi}{n}\sqrt{-1}\right)$$

и, отбрасывая после перемножения в правой части бесконечно малое слагаемое высшего порядка, что

$$u = \ln(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi) = (\varphi \pm 2k\pi)\sqrt{-1}.$$

Окончательно

$$\ln(a + b\sqrt{-1}) = C + (\varphi \pm 2k\pi)\sqrt{-1},$$

где k — любое натуральное число или нуль, а C и φ имеют ранее указанные значения.

Таким образом, Эйлер подтвердил принципиальную правоту Лейбница, доказав, что логарифмы отрицательных чисел мнимы, но при этом он впервые установил точную математическую форму этой мнимости, а заодно показал, что понятие логарифма распространяется на любые комплексные числа (кроме нуля). Оказалось, что логарифм всякого отличного от нуля числа имеет бесконечно много комплексных значений, причем для положительных чисел одно из этих значений действительное, логарифмы же остальных чисел действительных значений вовсе не имеют.

Теория логарифмов Эйлера произвела сильное впечатление на современников, хотя не все смогли оценить ее по достоинству. Даламбер более чем через десять лет после прекращения письменной полемики с Эйлером выступил с прежними и новыми возражениями в работе, помещенной в первом томе его «Математических сочинений» (Opuscules mathématiques. Paris, 1761), и вновь подтвердил свою точку зрения в статье «Логарифмы» (Logarithmes) в 20 томе «Энциклопедии» (1778). Имелись и другие ученые, сомневавшиеся в теории Эйлера или пытавшиеся эклектически примирить разногласия, но их число было невелико. В конце века Монтюкла писал, что если в математике можно судить по большинству голосов, то взгляды Лейбница и Эйлера взяли верх над воззрениями И. Бернулли и Даламбера и что «наиболее знаменитые геометры Франции приняли точку зрения Эйлера на мнимые логарифмы» [1].

Бесконечные произведения и суммы простейших дробей

Принципиально новым средством выражения и исследования функций явились их разложения в бесконечные произведения и на простейшие дроби. И в этом случае инициатором выступил Эйлер.

Разложение $\sin z$ в бесконечное произведение [2]

$$\sin z = z\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$$

[1] *J. F. Montucla.* Histoire des mathématiques, v. III. Paris, 1802, p. 380.
[2] Знак произведения в форме прописной греческой буквы П ввел, по-видимому, Гаусс в работе о гипергеометрическом ряде (1812).

Эйлер сперва получил, отправляясь от ряда $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots$, а именно: рассматривая правую часть этого равенства как многочлен бесконечно высокой степени, корнями которого служат все значения, обращающие $\sin z$ в нуль. Этот результат был опубликован в первой статье Эйлера о суммировании ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ (Commentarii, (1734—1735) 1740), и здесь же было приведено разложение

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} + 2z \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{z^2 - k^2\pi^2}.$$

Критические замечания И. и Д. Бернулли побудили Эйлера во второй статье, посвященной той же проблеме, вывести бесконечное произведение для $\frac{\sin z}{z}$ по другому методу, образец употребления которого мы показали в предыдущем разделе, а именно: применяя к функции

$$\frac{\left(1 + \frac{z\sqrt{-1}}{n}\right)^n - \left(1 - \frac{z\sqrt{-1}}{n}\right)^n}{2z\sqrt{-1}}$$

разложение на действительные квадратичные множители двучлена $a^n - y^n$ и затем полагая n бесконечно большим (Miscellanea Berolinensia, 1743). В другой работе, напечатанной в том же томе берлинских записок, Эйлер произвел разложение на простейшие дроби $\operatorname{ctg} z$ и еще несколько таких разложений дал в «Commentarii» ((1740) 1750).

Большинство этих результатов сведено в первом томе «Введения», где в IX главе только что указанным методом находятся разложения в бесконечные произведения:

$$\frac{e^z - e^{-z}}{2} = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right),$$

$$\frac{e^z + e^{-z}}{2} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{4z^2}{(2k-1)^2\pi^2}\right),$$

а отсюда, заменяя z на $z\sqrt{-1}$, получаются:

$$\sin z = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right),$$

$$\cos z = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4z^2}{(2k-1)^2\pi^2}\right).$$

В X главе даны разложения в суммы простейших дробей (обозначения Эйлера, с небольшими изменениями):

$$\frac{\pi}{2mn \sin \frac{m\pi}{n}} = \frac{1}{2m^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2n^2 - m^2},$$

$$\frac{\pi}{2mn \operatorname{tg} \frac{m\pi}{n}} = \frac{1}{2m^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2n^2 - m^2}.$$

Трактуя функции e^z, $\cos z$, $\sin z$ как своего рода многочлены бесконечно высокой степени, Эйлер предвосхитил идеи, получившие развитие в том отделе теории аналитических функций, где изучаются так называемые целые трансцендентные функции, являющиеся аналитическими во всей плоскости комплексного переменного. Свойства этого класса функций в некоторой мере сходны со свойствами обыкновенных целых многочленов. Подобно тому, как любой многочлен степени n есть произведение n линейных множителей, каждый из которых имеет один корень, любая целая трансцендентная функция с бесконечным числом корней выражается через произведение бесконечного числа первичных множителей, каждый из которых имеет по одному корню. Эту теорему опубликовал Вейерштрасс в 1876 г. Что касается функций $\frac{1}{\sin z}$, $\operatorname{tg} z$ или $\operatorname{ctg} z$, то они принадлежат к мероморфным, представимым в виде частного двух целых функций («мероморфный» означает «имеющий вид дроби», от μέρος—дробь, часть и μορφή — вид, форма). Мероморфные функции аналитичны во всей плоскости, за исключением конечного или бесконечного числа изолированных точек, в которых они обращаются в бесконечность, так называемых полюсов, и которые соответствуют корням знаменателя. Г. Миттаг-Леффлер в 1877 г. обобщил на трансцендентные мероморфные функции теорему о разложении дробной рациональной функции в сумму простейших дробей, каждая из которых имеет только по одному полюсу.

Во «Введении» приводятся также примеры разложения функций в непрерывные дроби, вроде

$$\frac{\pi}{n}\operatorname{ctg}\frac{m\pi}{n}=\cfrac{1}{m+\cfrac{m^2}{n-2m+\cfrac{(n-m)^2}{2m+\cfrac{(n+m)^2}{n-2m+\cfrac{(2n-m)^2}{2m+\cfrac{(2n+m)^2}{n-2m+\cdots}}}}}}$$

Функции $\frac{e^x+e^{-x}}{2}$, $\frac{e^x-e^{-x}}{2}$, разложенные Эйлером в бесконечные произведения, называются теперь гиперболическими косинусом $\operatorname{ch} x$ и синусом $\operatorname{sh} x$. Как самостоятельный класс функций, сходных по своим свойствам с тригонометрическими, $\operatorname{ch} x$ и $\operatorname{sh} x$ были введены Винченцо Риккати (1707—1775), сыном Дж. Риккати, имя которого известно в теории дифференциальных уравнений (см. стр. 370). В первом томе своих «Сочинений по вопросам физики и математики» (Opusculorum ad res physicas et mathematicas pertinentium tomus primus. Bononiae, 1757) В. Риккати, отправляясь от рассмотрения сектора равносторонней гиперболы с действительной осью $2r$, геометрически определил гиперболические синус и косинус, которые обозначил ch и sh, и вывел основное аналитическое соотношение $\operatorname{ch}^2\varphi-\operatorname{sh}^2\varphi=r^2$, а также теоремы о $\operatorname{ch}(\varphi\pm\psi)$ и $\operatorname{sh}(\varphi\pm\psi)$.

Некоторые приложения гиперболических функций у Риккати (например, к извлечению корней) не имеют особого интереса. Вслед за В. Риккати гиперболическую тригонометрию разрабатывал десять лет спустя И. Г. Ламберт в непосредственно примыкающем к его первой работе об иррациональности e и π (см. стр. 111) «Мемуаре о некоторых замечательных свойствах круговых и логарифмических трансцендентных количеств»

(Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes circulaires et logarithmiques. Mém. Ac. Berlin, (1761)1768). И у Ламберта в центре внимания были аналогии между величинами, связанными с кругом и равносторонней гиперболой. Ламберт применил гиперболические функции к решению задач обыкновенной тригонометрии (Mém. Ac. Berlin, (1768) 1770). Впоследствии гиперболические функции нашли широкое распространение как вспомогательное средство различных преобразований и вычислений.

Приближенное вычисление числа π

Среди разнообразных приложений бесконечных рядов к приближенным вычислениям мы здесь коротко остановимся только на вычислении π, которое и в XVIII в. продолжало интересовать математиков. Оригинальный прием был предложен Джоном Мечином (1680—1751), профессором астрономии в лондонском Грешем колледже. Идея Мечина заключалась в использовании дуги, имеющей рациональный тангенс и вместе с тем такой, что ее некоторое кратное весьма мало отличается от $\pi/4$. Если обозначить $\operatorname{tg}\varphi = p$, $\operatorname{tg} n\varphi = q$, то

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - n\varphi\right) = \frac{1-q}{1+q} \quad \text{и} \quad \frac{\pi}{4} = n\varphi + \operatorname{arctg}\frac{1-q}{1+q}.$$

Взяв $n = 4$, $p = {}^1/_5$, Мечин получил известную под его именем формулу

$$\frac{\pi}{4} = 4\operatorname{arctg}\frac{1}{5} - \operatorname{arctg}\frac{1}{239}$$

и с помощью степенного разложения арктангенса, сходящегося в данном случае весьма быстро, вычислил π со 100 десятичными знаками. Свой результат он опубликовал в «Обзоре достижений математики» (Synopsis palmariorum matheseos, London, 1706) Вильяма Джонса (1675—1749), преподавателя математики, принадлежавшего к окружению Ньютона. В этом вводном курсе математики Джонс впервые употребил знак π, принятый Эйлером (1736).

Ряд тангенса применил для вычисления π и парижский академик Тома Фанте де Ланьи, трудолюбиво определивший на основе равенства $\operatorname{tg} 30° = \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 127 десятичных знаков (Mém. Ac. Paris, (1719) 1721). Правда, 113-й из них, из-за опечатки, неверен, как это показал в 1794 г. Вега, который сам довел вычисление до 140 знаков.

Значение π, найденное Ланьи, привел в VIII главе первого тома «Введения в анализ бесконечных» (1748) Эйлер, который неоднократно возвращался к поискам выгодных средств быстрого вычисления этого числа. Так, в одной статье, представленной Петербургской академии в начале 1738 г. (Commentarii, (1731) 1744), он показал, как, повторно применяя теорему арктангенсов $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$, можно построить сколько угодно формул, аналогичных формуле Мечина, в том числе с бесконечным множеством членов, вроде

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8} + \operatorname{arctg}\frac{1}{18} + \cdots + \operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2} + \cdots,$$

а также привел несколько быстро сходящихся разложений арктангенса. Применяя формулу $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$ последовательно к $\sin\frac{x}{2}$, $\sin\frac{x}{4}$ и т. д., Эйлер здесь же вывел изящное выражение

$$\frac{\sin x}{x} = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}\cos\frac{x}{16}\cdots$$

Вскоре затем Эйлер применил к вычислению π формулу суммирования (см. стр. 308). Наконец, большое число различных представлений числа π, удобных для вычислений, приведено в «Дифференциальном исчислении» (1755).

Добавим, что формулой Мечина воспользовался много позднее У. Шенкс (1812—1882), не пожалевший труда для вычисления π с 707 десятичными знаками (1874); однако позднее (1945) выяснилось, что Шенкс ошибся в 520-м знаке и все последующие цифры неверны. Современные вычислительные машины позволили резко сократить время вычислений и повысить их точность. В 1949 г. за 70 *час* было подсчитано свыше 2000 знаков π, а в 1961 г. по программе, составленной Д. Шенксом (однофамильцем У. Шенкса) и У. Ренчем-младшим, менее чем за 9 *час* было определено 100 625 десятичных знаков. Вычисление нескольких тысяч знаков π нередко служит теперь для проверки новых вычислительных машин и обучения программистов.

Вычисление π привлекло большое внимание ученых Японии. Общие судьбы этой страны отразились на развитии в ней науки. С III в. в нее начали постепенно проникать знания из Китая. Когда в середине XVI в. были установлены торговые связи с португальцами, а в первые годы XVII в. с голландцами, в Японии получило значительное распространение христианство и началось усвоение европейской культуры и науки. В 1639 г. после подавления мощного народного восстания, большинство участников которого было христианами, феодальные властители страны почти полностью прекратили контакты с внешним миром. Европейцы были изгнаны, на христианство и буддизм обрушились жестокие гонения, был наложен запрет на ввоз западной научной литературы. В этих условиях развитие математики приняло в Японии своеобразное направление, причем весьма трудно установить, какую роль могло в нем играть случайное знакомство с открытиями, сделанными в Европе. Около 1600 г. в Японии стали известны китайские приемы численного решения алгебраических уравнений высших степеней. В 1683 г. крупнейший японский математик Кова Секи, совершенствуя китайский алгоритм решения систем линейных уравнений, пришел к методу определителей (см. т. II, стр. 53). Наряду с задачами алгебры, а также теории чисел особый интерес японских математиков вызвало измерение круга и шара. Совокупность созданных с этой целью приемов получила название иенри, что значит правила или теория круга. Одним из приемов приближенной квадратуры круга служило применение вписанных правильных многоугольников. Если Мицуёси Иосида (1598—1672) пользовался в 1627 г. еще приближением, соответствующим в десятичных дробях 3,16, то Мурамацу в 1663 г. с помощью 2^{13}-угольника вычислил π до восьми десятичных знаков. Другой прием представлял собой сочетание метода интегральных сумм с разложениями в ряды. В наших обозначениях дело сводилось к следующему. Если записать уравнение окружности радиуса 1 в виде $x^2 + y^2 = 1$ и разбить круг параллельными оси ординат прямыми на очень узкие полосы, то площадь каж-

дой полосы можно приближенно выразить в виде $2\sqrt{1-x^2}\Delta x$, а элемент дуги в виде $\Delta x/\sqrt{1-x^2}$. Разложение в ряд $(1-x^2)^{\pm 1/2}$ и почленное интегрирование $\left(\text{основанное на нахождении пределов } \lim \frac{\sum_{k=1}^{m} k^n}{m^{n+1}}\right)$ позволяют находить приближенные значения для искомой площади или периметра; при этом фактически производились вычисления, равносильные разложению арксинуса в степенной ряд.

В 1712 г. был посмертно опубликован трактат Кова Секи, в котором дается значение π, верное в 24 десятичных знаках. Ученик Кова Секи Такебе Кенко (1661—1739) с помощью дополнительных остроумных приемов выразил,— если употребить наши обозначения,— квадрат дуги кругового сегмента a в виде

$$a^2 = 4\,dh\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1}(n!)}{(2n+2)!}\left(\frac{h}{d}\right)^n\right],$$

где d — диаметр и h — высота сегмента, и получил 42 десятичных знака (1722). Еще точнее был результат, найденный Иосисукэ Мацунагой (1664—1744) с помощью ряда для $\arcsin {}^1/_2$ и верный в 51-м знаке (1739). Свои приемы Кова Секи и его последователи держали некоторое время в секрете; их частично раскрыл впервые Райдо Арима (1714—1783), который, между прочим, представил некоторые приближения π и π^2 в форме непрерывных дробей, введенных в Японии Такебе.

Японские математики продолжали вносить частные усовершенствования в метод иенри и применять его к измерению некоторых других фигур и в XIX в., вплоть до буржуазной революции 1867—1868 г., после которой в Японии быстрое распространение получили научные знания, накопленные к тому времени в Европе.

Новые трансцендентные функции

К элементарным функциям на протяжении XVIII в. было присоединено большое число новых неэлементарных аналитических функций, частью в связи с интегрированием дифференциальных уравнений, возникавших в различных задачах механики, частью в ходе чисто математических исследований. При этом широкое применение находил и вместе с тем совершенствовался аппарат теории рядов. Одним из первых по времени явилось введение гамма- и бета-функций.

Мы видели во втором томе, что Валлис (1656) применил к квадратуре круга интерполирование некоторой бесконечной последовательности и в результате получил бесконечное произведение $\frac{4}{\pi} = \frac{3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7\cdot9\cdot9\ldots}{2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot8\cdot8\cdot10\ldots}$. Его вычисление было равносильно вычислению значения $1 : \int_0^1 (1-x^{1/p})^q\,dx$ при $p = q = {}^1/_2$, т. е. $1 : ({}^1/_2!)^2$ (см. т. II, стр. 153). В XVIII в. проблема интерполирования последовательностей вновь заинтересовала математиков, в частности благодаря связи, которую они усмотрели в ней с нахождением сумм бесконечных рядов. Сумма бесконечного ряда,

члены которого суть функции своего номера, т. е ряда $u(1)+u(2)+$ $+u(3)+\ldots+(u(n)+\ldots$, рассматривалась как значение суммы его первых членов $\sum_{k=1}^{n} u(k)=f(n)$ при бесконечно большом n. Поэтому знание функции $f(n)$, выражающей общий член (terminus generalis) последовательности частных сумм, сводило задачу суммирования данного ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u(k)$ к вычислению $f(\infty)$. Вообще интерполирование последовательности $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ заключалось в отыскании аналитической функции $f(x)$, последовательно принимающей для всех натуральных n значения $u_1, u_2, u_3, \ldots$ В столь общей постановке задача может быть всякий раз решена множеством способов, от интуиции исследователя зависело найти плодотворное решение. Зная же общий член, можно было интерполировать последовательность, т. е. вычислять $f(x)$ при дробных значениях индекса x.

Первое упоминание об этой задаче в XVIII в. мы находим в письме X. Гольдбаха к Николаю II Бернулли от 2 января 1722 г.[1] Гольдбах утверждал, что может представить в виде бесконечного ряда промежуточные члены любой последовательности, например средний между первым и вторым членами последовательности $1,\ 1\cdot 2,\ 1\cdot 2\cdot 3, \ldots$, т. е. $\frac{3}{2}!$ Метод Гольдбаха, основанный на применении разностей членов последовательности, дал ему для $\frac{3}{2}!$ разложение в расходящийся ряд, но ему удалось найти и конечное значение, выразив $\frac{1}{\frac{3}{2}!}$ сходящимся рядом

$$1-\frac{1}{2!}\frac{1}{2}-\frac{1}{3!}\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{4!}\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}+\frac{19}{5!}\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\cdots$$

Эти результаты были включены в статью Гольдбаха «Об общих членах рядов» (De terminis generalibus seriebus, Commentarii, (1728) 1732). Но еще до выхода этой работы Гольдбах на протяжении 1728—1729 гг., когда он находился в Москве, не раз возвращался к проблеме интерполирования ряда факториалов в переписке с Д. Бернулли. В письме от 17 (6) октября 1729 г.[2] Д. Бернулли предложил для общего члена $x!$ представление $\left(A+\frac{x}{2}\right)^{x-1}\left(\frac{2}{1+x}\frac{3}{2+x}\frac{4}{3+x}\cdots\frac{A}{A-1+x}\right)$, где A бесконечно велико, и вычислил для $^3/_2!$ приближенное значение 1,3005. Однако еще ранее Д. Бернулли поставил вопрос об отыскании «конечного выражения» для $x!$ Это удалось Эйлеру, который, проживая с Бернулли на одной квартире, был в курсе переписки его с Гольдбахом и хорошо изучил «Арифметику бесконечных» Валлиса. В первом же письме к X. Гольдбаху от 24 (13) октября 1729 г., написанном через неделю после только что упомянутого письма Д. Бернулли, Эйлер сообщил результаты, далеко позади оставившие первые неуверенные поиски своих предшественников. В частности, он, подобно Д. Бернулли, представил $n!$ в виде бесконечного про-

---

[1] «Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII[e] siècle», t. II, p. 128.
[2] Там же, стр. 324—325.

изведения $\frac{1\cdot 2^n}{1+n}\frac{2^{1-n}3^n}{2+n}\frac{3^{1-n}4^n}{3+n}\ldots$, а отсюда, сравнивая с произведением Валлиса, получил $\frac{1}{2}!$ в парадоксальной форме $\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{-1}\ln(-1)}$, добавив, что это есть сторона квадрата, равновеликого кругу с диаметром 1, т. е. $\sqrt{\pi}/2$, и привел более точное приближение для $\frac{3}{2}! = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}!\right) = 1{,}3293403$. Через полтора месяца он представил Петербургской академии изложение начал общей теории вопроса в статье «О последовательностях трансцендентных, или же общие члены которых не могут быть выражены алгебраически» (De progressionibus transcendentibus, seu quarum termini generales algebraice dari nequeunt, Commentarii, (1730—1731) 1738). Основная идея заключалась в представлении общего члена последовательности $u_1, u_2, u_n \ldots$ интегралом $\int\limits_0^a p(x, n)\,dx$, при натуральных значениях параметра n совпадающим с u_n. Для последовательности $n!$ Эйлер, исходя из интеграла $\int\limits_0^1 x^p(1-x)^q\,dx$, изучавшегося еще Валлисом и при натуральных p, q равного $\frac{p!\,q!}{(p+q+1)!}$, получил с помощью остроумных преобразований и предельного перехода $\lim\limits_{m\to 0}\frac{z^m-1}{m} = \ln z$, выполненного по «известному правилу» (Бернулли — Лопиталя), интеграл $\int\limits_0^1 (-\ln x)^n\,dx = \Gamma(n+1)$. Этот интеграл, при натуральном n равный $n!$ и обладающий тем свойством, что $\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n)$, и выражает общий член последовательности $n!$ (что n предполагалось > -1, Эйлер указал позднее). Сам Эйлер впоследствии, в 1771 г., обозначил интеграл символом $[n]$. Мы, вслед за Лежандром (1809), называем его гамма-функцией $\Gamma(n+1)$ или эйлеровым интегралом второго рода. Эйлеровым интегралом первого рода Лежандр назвал $\int\limits_0^1 x^p(1-x)^q\,dx$, где $p > -1$, $q > -1$; по предложению Бине (1839) его именуют еще бета-функцией $\mathrm{B}(p+1,\ q+1)$.

К гамма-функции Эйлер обращался неоднократно. В «Механике» (1736) он выразил через нее время падения точки под действием центростремительной силы, обратно пропорциональной расстоянию. Среди многочисленных установленных им свойств укажем зависимость между интегралами обоих родов

$$\mathrm{B}(p, q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

формулу дополнения

$$\Gamma(n)\,\Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin(n\pi)},$$

из которой тотчас следует, что $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ (Novi Commentarii, (1771)

1772), другое весьма употребительное интегральное представление гамма-функции

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}\,dx$$

(1765), опубликованное в Novi Commentarii, (1768) 1769, а затем в одном мемуаре 1781 г. в четвертом томе «Интегрального исчисления» [1] (1794), и, наконец, асимптотическое разложение логарифма гамма-функции (мы заменили здесь, как и Эйлер, n на x)

$$\ln\Gamma(x+1) = \frac{1}{2}\ln 2\pi + \left(x+\frac{1}{2}\right)\ln x - x + \frac{1}{1\cdot 2x} - \\ - \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6x^3} + \frac{1}{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8x^5} - \ldots,$$

которое Эйлер вместе с асимптотическим равенством $\Gamma(x+1) = \frac{x^{x+1/2}\sqrt{2\pi}}{e^x}$ для весьма больших x привел в письме к Гольдбаху от 4 июля 1744 г. и опубликовал, выделив в коэффициентах числа Бернулли (ср. стр. 308), в «Дифференциальном исчислении» (1755). В этой работе Эйлер относит $\Gamma(x)$ к числу «непредставимых функций» [2], которые нельзя выразить не только алгебраически, но и с помощью какого-либо определенного рода трансцендентных функций и общее понятие о которых дает рассмотрение рядов. Впрочем, эти непредставимые (лучше было бы перевести: невыразимые) функции Эйлера таковы лишь в рамках дифференциального исчисления, ибо они выражаются при помощи определенных интегралов. В современной теории гамма-функция оказывается мероморфной функцией, имеющей простые полюсы 0, —1, —2,... Теория гамма-функции интенсивно разрабатывалась и в XIX и XX вв., ибо она находит многочисленные приложения в анализе и теории чисел; с нею связаны другие важные специальные функции, как дзета-функция и цилиндрические, и она входит в выражения сумм многих рядов, бесконечных произведений и определенных интегралов.

Упомянем, что в той же работе «О последовательностях» 1729 г. Эйлер попутно затронул вопрос о дифференциалах дробного порядка, ранее рассмотренный Лейбницем (см. т. II, стр. 273). В случае натурального n имеет место $\frac{d^n z^m}{dz^n} = \frac{m!}{(m-n)!}z^{m-n}$, так что $\frac{d^n z^m}{dz^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)}z^{m-n}$. Эту формулу Эйлер принимает за определение производной при дробном n и, например, при $m = 1$, $n = 1/2$ получает $\frac{d^{1/2}z}{dz^{1/2}} = 2\sqrt{z/\pi}$.

Асимптотическое разложение $\ln\Gamma(n+1)$ и асимптотическое равенство для $\Gamma(n+1)$ в случае натуральных значений n были получены, как об этом подробно рассказано в шестой главе, еще в 1730 г. Стирлингом и Муавром. Но оба ученых не пошли далее и не проникли глубже в природу асимптотических рядов, как это сделал Эйлер (ср. стр. 308).

В петербургских кругах обсуждали и другие проблемы, которые, возникнув в XVII в., теперь повлекли за собой исследования по транс-

[1] При переиздании «Интегрального исчисления» Н. И. Фусс объединил в его четвертом томе ряд статей Эйлера, в том числе 14 еще неопубликованных.
[2] *Л. Эйлер.* Дифференциальное исчисление, стр. 509.

цендентным функциям. Одной из них была задача суммирования обратных квадратов. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ тщетно пытались просуммировать Менголи (1659) и Я. Бернулли, доказавший его сходимость (1689). К нему вновь обратились в своей переписке 1728—1729 гг. Гольдбах и Д. Бернулли, приближенно подсчитавшие его сумму, правда, с точностью, не превосходящей 0,01; Стирлинг (1730) привел ее значение с восемью верными десятичными знаками. Эйлер первоначально также занялся приближенным вычислением $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, которое в поисках какого-либо закона затем распространил и на некоторые другие ряды обратных степеней $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}$. Но уже в статье «О суммах обратных рядов», представленной Петербургской академии в декабре 1735 г. (De summis serierum reciprocarum, Commentarii, 1734—1735) 1740), он проник в свойства функции $\zeta(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}$, которую мы после Б. Римана (1857) называем дзета-функцией, гораздо глубже; а именно: показал, что в случае четного показателя $2n$ отношение $\zeta(2n) : \pi^{2n}$ рационально. Одно из доказательств основывалось на разложении в бесконечное произведение синуса, о котором говорилось ранее (стр. 328):

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \ldots = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\ldots$$

Распространяя на это уравнение бесконечно высокой степени известные зависимости между суммами обратных степеней корней алгебраического уравнения и его коэффициентами, Эйлер здесь последовательно вычислил

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6},$$
$$\zeta(4) = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \ldots = \frac{\pi^4}{90},$$
$$\zeta(6) = 1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \ldots = \frac{\pi^6}{945},$$
. . . .

вплоть до значения $\zeta(12)$. Впоследствии, учитывая критические замечания Иоганна I и Даниила Бернулли [1], Эйлер дал и другие, уточненные обоснования этих результатов. В X главе первого тома «Введения в анализ бесконечных» он привел аналогичные формулы до $2n = 26$, а в «Дифференциальном исчислении» записал их в общем виде с помощью чисел Бернулли (ср. стр. 308):

$$\zeta(2n) = \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n-1} B_{2n}}{(2n)!} \pi^{2n}.$$

Помимо $\zeta(2n)$ Эйлер просуммировал еще и другие родственные ряды, суммы которых находятся в рациональном отношении к соответствующей

[1] «Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII[e] siècle», t. II, p. 477.

степени π. Так, например, сумма знакочередующегося ряда

$$\frac{1}{1^{2n}}-\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}-\frac{1}{4^{2n}}+\ldots=\frac{2^{2n-1}-1}{2^{2n-1}}\zeta(2n)$$

и, в частности,

$$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{12}.$$

Однако ему не удалось аналогично вычислить $\zeta(2n+1)$, и до сих пор арифметическая природа этих сумм остается неизвестной.

В третьей главе упоминалось тождество Эйлера

$$\zeta(n)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^n}=1:\prod^{\infty}\left(1-\frac{1}{p^n}\right),$$

где p принимает все простые значения начиная с 2, которое он впервые установил в «Записках» Петербургской академии, (1737) 1744. В XV главе «Введения в анализ бесконечных» оно используется для определения сумм новых рядов и произведений, в частности, к приближенному вычислению сумм степеней рядов чисел, обратных простым, т. е. $\sum\limits_{p=2}^{\infty}\frac{1}{p^n}$, $n>1$. Что касается ряда $\sum\limits^{\infty}\frac{1}{p}$, то для него Эйлер получил асимптотическое равенство $\sum\limits_{p\leqslant m}\frac{1}{p}\cong\ln\left(\sum\limits_{k=1}^{m}\frac{1}{k}\right)$, откуда заключил, что ряд чисел, обратных простым, расходится. Исследованием рядов, члены которых суть функции простых чисел, занимался затем П. Л. Чебышев.

Используя суммирование расходящихся рядов, Эйлер в 1749 г. обнаружил еще одно замечательное свойство дзета-функции. Оно выражается уравнением

$$\frac{1-2^{n-1}+3^{n-1}-\ldots}{1-2^{-n}+3^{-n}-\ldots}=\frac{-(n-1)!\ 2^n-1)\cos\frac{n\pi}{2}}{(2^{n-1}-1)\pi^n},$$

или в нынешних обозначениях

$$\zeta(1-n)=2^{1-n}\pi^{-n}\cos\frac{n\pi}{2}\Gamma(n)\zeta(n).$$

Ряды, стоящие в числителе и знаменателе левой части первой записи этого уравнения, одновременно сходятся только при $0<n<1$. Вывод Эйлера не был полным, и, с его точки зрения, он лишь проверил его для ряда целых и дробных значений n (ср. стр. 309). Б. Риман вновь открыл это важное функциональное уравнение в 1859 г., через девяносто лет после выхода в свет статьи Эйлера «Заметки о красивом соотношении между рядами как прямых, так и обратных степеней» (Remarques sur un beau rapport entre les séries des puissances tant directes que réciproques. Mém. Ac. Berlin, (1761) 1768). Эта замечательная статья оставалась в полном забвении до 1894 г.

Дзета-функция и тождество Эйлера стали впоследствии важнейшим средством теории распределения простых чисел в натуральном ряде и арифметических прогрессиях, в первую очередь благодаря Чебышеву, применявшему эту функцию при действительных значениях аргумента, больших единицы (1849—1852), и затем — Риману, который определил $\zeta(s)$ как аналитическую функцию комплексного переменного не только для значений, когда ряд $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s}$ сходится (т. е. действительная часть s больше единицы), но и на всей комплексной плоскости, за исключением простого полюса $s = 1$. Изучение свойств дзета-функции продолжается до сих пор. В частности, остается неизвестным, верна ли следующая гипотеза Римана, подтверждение которой позволило бы немедленно решить многие задачи теории чисел (доказанные в допущении ее справедливости): все корни дзета-функции, помимо четных отрицательных чисел, имеют действительную часть, равную $^1/_2$.

К числу «непредставимых» функций Эйлер относил и функцию $f(x) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{x}$. Вычислением и оценками частных сумм гармонического ряда занимались, как мы знаем, еще математики XVII в.. в частности Менголи и Ньютон (см. т. II, стр. 158 и 164). Эта проблема занимала и ученых рассматриваемого времени. Среди многочисленных результатов назовем, по крайней мере, один, принадлежащий Эйлеру. В «Замечаниях о гармонических рядах» (De progressionibus harmonicis observationes. Commentarii, (1734—1735) 1740) он вывел асимптотическое при $n \to \infty$ равенство

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \simeq \ln(n+1) + \gamma,$$

где

$$\gamma = \frac{1}{2}\zeta(2) - \frac{1}{3}\zeta(3) + \frac{1}{4}\zeta(4) - \ldots,$$

и вычислил $\gamma = 0{,}577218$ с точностью до предпоследнего знака. С помощью формулы суммирования Эйлер вскоре вычислил γ с 16 знаками (стр. 307). До сих пор неизвестно, является ли γ рациональным или же иррациональным числом. Постоянная Эйлера γ входит во многие формулы теории специальных функций.

Если новые трансцендентные функции, рассмотренные нами до сих пор, вошли в математику в ходе решения ее собственных задач, то третий важный класс — цилиндрических функций — встретился сперва в задачах механики.

Цилиндрической функцией первого рода порядка n называют ограниченный при $x = 0$ частный интеграл $J_n(x)$ уравнения

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2)\,y = 0;$$

интеграл того же уравнения $Y_n(x)$, неограниченный при $x = 0$, называется цилиндрической функцией второго рода порядка n. Понятие цилиндрической функции распространяется на все целые и дробные значения индекса. Самый термин «цилиндрическая функция» был предложен Э. Гейне (1868), но до сих пор нередко говорят о функциях Бесселя, хотя

этот выдающийся немецкий астроном и математик не был первым ученым, введшим и применившим цилиндрические функции [1].

Функция $J_{1/3}(x)$ встречается еще в одном письме И. Бернулли к Лейбницу 1703 г. Затем $J_0(x)$ мы находим у Д. Бернулли, который под влиянием отца приступил к изучению малых колебаний грузов, связанных с подвешенной в одном конце невесомой гибкой нитью, а также, в предельном случае, малых колебаний однородного тяжелого подвешенного каната (Commentarii. (1732—1733) 1738 и (1734—1735) 1740). Выразив задачу уравнением

$$nx\frac{d^2y}{dx^2} + n\frac{dy}{dx} = -y,$$

где y — отклонение точки каната от вертикального положения равновесия, а $x = l - s$, разность между длиной каната l и длиной его дуги s, считая от точки подвеса, Д. Бернулли нашел решение в форме ряда

$$y = 1 - \frac{x}{n} + \frac{x^2}{4n^2} - \frac{x^3}{4\cdot 9n^3} + \frac{x^4}{4\cdot 9\cdot 16n^4} - \ldots,$$

представляющего цилиндрическую функцию J_0 от аргумента $2\sqrt{\frac{x}{n}}$. Так как в точке подвеса $x = l$, $y = 0$, то $1 - \frac{l}{n} + \frac{l^2}{4n^2} - \frac{l^3}{4\cdot 9n^3} + \ldots = 0$. Это уравнение, как правильно заметил Д. Бернулли, имеет бесчисленное множество действительных корней, из которых он приближенно вычислил первые два. Ранее говорилось о предложенном Д. Бернулли способе вычисления корней алгебраических уравнений (стр. 79), который он распространил и на «бесконечно продолжающиеся уравнения» (Commentarii, (1730—1731) 1738).

Вновь к цилиндрическим функциям пришел Эйлер, занимавшийся с 1759 г. изучением малых поперечных колебаний однородной круглой мембраны, т. е. плоской пленки, не сопротивляющейся изгибу и сдвигу. Уравнение с частными производными, полученное им для смещений, перпендикулярных к плоскости равновесия мембраны, он свел к общему уравнению цилиндрических функций, а решение последнего выразил бесконечным рядом, сумма которого по существу совпадала с цилиндрической функцией первого рода и произвольного порядка $J_n(x)$ (Novi commentarii, (1764) 1766). Об этой задаче подробнее рассказано далее (стр. 428). Вслед за тем во втором томе «Интегрального исчисления» (1769) Эйлер, решая некоторые обыкновенные линейные дифференциальные уравнения второго порядка, построил их общие интегралы при помощи цилиндрических функций обоих родов при $n = 0, 1, 2$. Из других его результатов следовало также, что функция первого рода $J_{n+1/2}(x)$ с полуцелым индексом выражается в конечной форме через алгебраические и тригонометрические функции. Бесконечные ряды, представляющие $J_n(x)$, получил также в исследованиях о движении планет Лагранж (Mém. Ac. Berlin, (1769) 1771). Однако только Бессель (1824; опубл. 1826) ввел цилиндрические функции как таковые, дал им особое обозначение I_k^h, соответствующее нашему $J_h(k)$, и начал систематическую разработку общей теории.

---

[1] Названия «функция первого рода» и «функция второго рода», а также нынешние обозначения были применены тогда же К. Нейманом (1867), Э. Ломмелем (1868) и другими учеными.

В конце XVIII в. Лежандр и Лаплас в трудах по теории потенциала ввели другой весьма важный класс сферических функций — мы к этому еще вернемся в последующем (см. стр. 443 и след.). Список новых трансцендентных функций, открытых в рассматриваемое время, далеко не исчерпывается приведенными здесь. Напомним, что во «Введении в анализ бесконечных» Эйлера были рассмотрены некоторые тета-функции Якоби (стр. 106); к этому можно было бы присоединить и другие примеры.

Некоторые вопросы дифференциального исчисления

Мы дополним теперь те сведения, которые уже были приведены о развитии общей концепции дифференциального исчисления, рядом подробностей. Основные правила дифференцирования были установлены к концу XVII в., но для тригонометрических функций они не были особо сформулированы, пока это не сделал Р. Коутс в упоминавшейся (см. стр. 133) статье «Оценка погрешностей в прикладной математике с помощью изменений элементов плоского и сферического треугольника» (1722). Здесь он геометрически обосновал и высказал правила

$$\frac{d\sin x}{dx}=\cos x, \qquad \frac{d\,\mathrm{tg}\,x}{dx}=\sec^2 x, \qquad \frac{d\sec x}{dx}=\mathrm{tg}\,x\cdot\sec x,$$

первое из них, например, в словах: наименьшее изменение какой-либо круговой дуги относится к наименьшему изменению синуса этой дуги, как радиус к синусу дополнения. Что касается функций, обратных тригонометрическим, то они, как отмечалось ранее, еще и в это время выступали как некоторые площади, и символика для них еще не была создана. Д. Бернулли первым ввел знак арксинуса в форме AS (опубл. 1729); за ним последовал Эйлер, обозначивший арктангенс At (1736); в 70-е годы благодаря Лагранжу, Ламберту и другим ученым входят в употребление привычные нам обозначения, вроде arc.sin (еще с точкой!), с которыми, впрочем, в некоторых странах и сейчас конкурируют символы $\sin^{-1} x$, $\tan^{-1} x$ и т. д., предложенные Джоном Гершелем (1813).

Б. Тейлор (1715, ср. стр. 224) распространил алгоритм дифференцирования на обратные функции и в терминах метода флюксий показал, как выражаются вообще производные x по y через производные данной функции $y=f(x)$ по x.

Полный свод правил дифференцирования, выраженных и выведенных аналитически, дал Эйлер в «Дифференциальном исчислении».

Значительное развитие получило учение о функциях многих переменных. Такие функции встречались и ранее, но систематическое построение этого отдела анализа началось только в XVIII в. В символике единство достигнуто не было. Лейбниц в одном письме 1694 г. к Лопиталю предложил для частных производных $\frac{\partial m}{\partial x}$ и $\frac{\partial m}{\partial y}$ символы δm и ϑm, которые позднее не использовались. Эйлер для частных производных по x, y, z употребил соответственно буквы P, Q, R (1728; опубл. 1732), которые затем иногда заменял на строчные буквы p, q, r; в том же смысле они применяются и теперь. Как общий прием отличения частных производных от обыкновенных Эйлер в «Дифференциальном исчислении» (1755) применил заключение обычных символов в скобки, вроде (dP/dx) и (dQ/dy). Все же многие математики и до того, и позднее обозначали оба рода производных с помощью прямых d; при записи частных и

полных дифференциалов, в которой производные умножаются на дифференциалы аргументов, это недоразумений не вызывало. Нашей современной записью с помощью круглой ∂ мы обязаны Якоби (1841). Правда, такую запись еще раньше применил Лежандр (1786; опубл. 1788) со специальной целью избежать смешения между $\partial v/\partial x$, как коэффициентом при dx в выражении полного дифференциала функции v, и дробью dv/dx; однако в дальнейшем он такую символику не употреблял.

Независимость результата дифференцирования по нескольким переменным от порядка дифференцирований была обнаружена Николаем I Бернулли (Acta Eruditorum, Suppl. VII, 1721), а первые доказательства этой теоремы предложили независимо друг от друга Эйлер в статье «О бесчисленных кривых одного рода...»[1] и «Дополнении..» к ней (De infinitis curvis ejusdem generis..., Additamendum... Commentarii, (1734—1735) 1740) и Клеро в «Исследованиях по интегральному исчислению» (Recherches générales sur le calcul intégral. Mém. Ac. Paris, (1739) 1741). Оба рассмотрели случай функции двух независимых переменных. Вывод Эйлера основан был непосредственно на понятии о частном дифференциале как бесконечно малом приращении функции, вызванном бесконечно малым приращением соответствующего аргумента. Частный дифференциал $F(t, u)$ относительно t есть разность $F(t + dt, u) - F(t, u)$, и поэтому дифференциалом этого дифференциала относительно u является $[F(t + dt, u + du) - F(t, u + du)] - [F(t + dt, u) - F(t, u)]$. С другой стороны, частный дифференциал $F(t, u)$ относительно u есть разность $F(t, u + du) - F(t, u)$, а дифференциал этого дифференциала относительно t есть $[F(t + dt, u + du) - F(t + dt, u)] - (F(t, u + du) - F(t, u)]$, т. е. тот же четырехчлен, что и в предыдущем случае. В наших доказательствах используется с требуемыми ограничениями и уточнениями аналогичная схема. Клеро дал иное обоснование теоремы: он исходил из того, что функция двух независимых переменных x, y разложима в степенной ряд с членами вида $rx^m y^n$, для каждого из которых теорема верна.

Наряду с понятием частного дифференциала естественно появилось и понятие полного дифференциала функции многих переменных. Необходимое условие, при котором выражение $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$ есть полный дифференциал du некоторой функции $u(x, y)$, т. е. условие $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, было установлено в прямой связи с предыдущей теоремой Эйлером и Клеро в только что названных работах. То же условие в 1738 г. нашел парижский академик Алексис Фонтен де Бертен (1704—1771), опубликовавший этот и другие свои результаты лишь много позднее в «Мемуарах, представленных королевской Академии наук и в свое время не напечатанных» (Mémoires donnés à l'Académie royale des sciences, non imprimés dans leur temps. Paris, 1764). В 1740 г. Клеро распространил исследование на функции трех переменных, показав, что если выражение $Pdx + Qdy + Rdz$ есть полный дифференциал то $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$; он рассмотрел и случай n независимых переменных. Эти открытия, о которых Клеро письменно сообщил в 1740 г. Эйлеру, он опубликовал в статье «Об интегрировании или построении дифференциальных уравнений первого порядка» (Sur l'intégration ou la construction des équations différentielles du premier ordre. Mém. Ac. Paris, (1740) 1742). Здесь же Клеро показал,

[1] Именно в этой статье Эйлер впервые применил для обозначения функции букву f (ср. стр. 411).

что необходимые условия полного дифференциала вместе с тем достаточны, проинтегрировав уравнение полного дифференциала (см. стр. 375). Эйлер вывел необходимое условие интегрируемости выражения $Pdx + Qdy + Rdz$ в «Дифференциальном исчислении».

В той же статье «О бесчисленных кривых...» Эйлер доказал известную теорему о дифференцировании однородных функций двух переменных, впервые высказанную им и примененную к некоторым интегрированиям во втором томе «Механики» (1736): если $V(x, y)$ есть однородная функция измерения n и $dV = Pdx + Qdy$, то $Px + Qy = nV$; в «Дифференциальном исчислении» это свойство распространено на функции многих переменных. Фонтен также открыл эту теорему для общего случая (о чем Клеро писал в 1740 г.) и опять-таки сильно опоздал с ее публикацией (1764).

Ко времени создания «Дифференциального исчисления» Эйлера учение о функциях многих переменных выросло в большой отдел анализа; их дифференцированию Эйлер отвел седьмую главу первой части этого труда. Бо́льшая часть ее содержания нами уже изложена. Добавим еще, что здесь выведено общее правило дифференцирования сложной функции нескольких переменных, которые все зависят от одного независимого переменного. В девятой главе Эйлер учит дифференцировать неявные функции.

Важным вкладом в общую теорию явилось обобщение на функции многих переменных ряда Тейлора, данное Лагранжем в уже упоминавшейся работе «О новом роде исчисления», (1772) 1774 (см. стр. 282). Развивая идеи символического исчисления, восходящие к Лейбницу (т. II, стр. 272), Лагранж представил приращение функции нескольких переменных в форме

$$\Delta u = u(x+\xi,\ y+\psi, \ldots) - u(x, y, \ldots) = e^{\frac{du}{dx}\xi + \frac{du}{dy}\psi + \cdots} - 1,$$

где, после разложения в экспоненциальный ряд, каждую степень du^λ следует заменить дифференциалом $d^\lambda u$. Аналогично он выразил $\Delta^\mu u$, принимая при $\mu < 0$, что $d^{-1} = \int$, $\Delta^{-1} = \sum$ и т. д. Эта статья Лагранжа, как и труд о деривациях Арбогаста (см. стр. 284), стала важной вехой в истории операционного исчисления. В «Теории аналитических функций» (1797) Лагранж вывел с помощью уже известных нам принципов (см. стр. 298) соответствующую формулу Тейлора с остаточным членом.

Мы остановимся еще на развитии методов исследования максимумов и минимумов. Прием разыскания экстремума функции в случае обращения в нуль подряд нескольких производных изложил в «Трактате о флюксиях» (1742) Маклорен. Эйлер в «Дифференциальном исчислении» применил к определению экстремумов ряд Тейлора, рассматривая знак разности

$$f(x \pm \alpha) - f(x) = \pm \alpha \frac{dy}{dx} + \frac{\alpha^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2} \pm \ldots$$

в достаточно малой окрестности соответствующего значения аргумента x[1]. Лагранж усовершенствовал этот метод исследования, применив вместо ряда Тейлора формулу с остаточным членом. Маклорен и Эйлер учитывали случаи, когда первая производная в точке экстремума беско-

[1] Напомним, что для частного случая, когда $f(x)$ есть целый многочлен, сходный прием исследования изложил Ферма в одном письме 1643 г., неизвестном Эйлеру (см. т. II, стр. 197).

нечна, а Эйлер рассмотрел также некоторые виды абсолютных граничных экстремумов.

Первую задачу на экстремум функции многих переменных рассмотрел, по-видимому, Маклорен в связи с поисками условия, при котором все корни алгебраического уравнения действительны и одного знака (Philos. Trans., 1729). Мы упоминаем эту задачу из-за ее большой известности; сам Маклорен сформулировал ее в виде предложения: если данное положительное число a разделено на n положительных частей, то их произведение будет наибольшим, когда эти части равны. Маклорен доказал это с помощью простых рассуждений, считая известным, что теорема верна при $n = 2$, и не прибегая к исчислению бесконечно малых. При этом же условии, утверждал Маклорен, сумма каких-либо натуральных степеней частей будет наименьшей.

Эйлер исследовал общую проблему экстремумов функции $f(x,y)$ в XI главе второй части «Дифференциального исчисления». При этом он удивительным образом допустил ошибку, утверждая, что если функция в какой-либо точке имеет максимум (или минимум) относительно каждого из аргументов при постоянстве другого, так что при $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ одновременно $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} < 0$ (или $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} > 0$), то она имеет в этой точке максимум (или минимум). На самом деле эти условия недостаточны для существования максимума (минимума). Эту ошибку Эйлера исправил в «Miscellanea Taurinensia» за 1759 г. и в XI главе второй части «Теории аналитических функций» Лагранж, который показал, что достаточным условием экстремума является выполнение неравенства $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right)^2 > 0$. В отношении случаев $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right)^2 \leqslant 0$ Лагранж ограничился лаконичными и не вполне корректно высказанными замечаниями; затем он кратко разъяснил также, как находятся экстремумы функций трех и большего числа переменных. В конце той же главы Лагранж рассмотрел задачу об условном экстремуме, когда аргументы данной функции связаны какими-либо дополнительными соотношениями, и применил к ее решению метод неопределенных множителей, сохранивший его имя.

Понятие интеграла

Во втором томе говорилось, что для Ньютона первичным было представление об интегрировании как отыскании первообразных функций — обратный метод флюксий восстанавливает по данной флюксии ее флюенту, между тем как для Лейбница интегрирование было прежде всего суммированием бесчисленного множества бесконечно малых дифференциалов. Иоганн Бернулли в своих лекциях по интегральному исчислению 1692 г. (опубл. 1742) последовал за Лейбницем и о квадрировании плоских кривых писал: «Площади рассматривают как разложенные на бесчисленные части, каждую из которых можно считать дифференциалом площади», и «если имеют интеграл этого дифференциала, т. е. сумму этих частей, то отсюда будет известна и искомая квадратура» [1]. Практически Лейбниц и Бернулли сводили по возможности квадратуры и вообще вычисление

---

[1] *Joh. Bernoulli.* Die erste Integralrechnnng, übers. von G. Kowalewsky. Berlin — Leipzig, 1914, S. 11—12.

определенных интегралов к отысканию первообразных, т. е. обращению дифференцирования. Концепция Ньютона, чрезвычайно расширявшая в то время возможности интегрального исчисления, получила в XVIII в. решительный перевес, хотя, как вскоре стало очевидным, весьма важные классы элементарных функций не интегрируются в конечном виде (см. стр. 352). Эйлер в своем определении предмета интегрального исчисления, как и основного объекта дифференциального исчисления, продолжил линию Ньютона.

Интегральное исчисление определяется у Эйлера как «метод, посредством которого по данному соотношению между дифференциалами количеств находят отношение между самими количествами» [1], т. е. метод, включающий и интегрирование дифференциальных уравнений. Выше упоминалось, что именно таково было содержание трехтомного «Интегрального исчисления» (1768—1770) Эйлера и столь же широко понимал свой обратный метод флюксий Ньютон (см. т. II, стр. 237). Интегралом данной функции X Эйлер называет функцию, имеющую своим дифференциалом Xdx. Это определение Эйлер дополнил четким различением между интегралом полным (integrale completum), содержащим произвольную аддитивную постоянную, и частным (particulare), в котором эта постоянная получает численное значение в соответствии с дополнительными условиями, которые в общем сводятся к тому, что $y = b$ при некотором $x = a$. Точно так же определяли интегральное исчисление и понятие интеграла Даламбер, Лагранж, Лакруа и другие математики XVIII в.

У Эйлера имелись свои особые основания отвергать определение интеграла как суммы бесконечного числа дифференциалов, ибо дифференциал являлся в его глазах нулем, а сумма любого числа нулей есть нуль. «Знак $\int$,—писал он,— обычно толкуется как начальная буква слова сумма. Это толкование возникло из мало подходящего представления, согласно которому интеграл рассматривается как сумма всех дифференциалов, и допустить его можно не с большим правом, чем широко распространенное представление, будто линии состоят из точек» [2]. В соответствии с этим «надо считать, что... интеграл мы находим не столько из самого дифференциала Xdx (который при всяких обстоятельствах $=0$), сколько из его отношения к dx» [3]. В рамках такой концепции величина, которую мы называем определенным интегралом, выступала только как значение, принимаемое частным интегралом при каком-либо дополнительном условии.

Однако связь между интегрированием и суммированием была слишком прочной и необходимой, чтобы полностью оставаться в тени. Два обстоятельства были при этом особенно существенны: приближенное интегрирование и учение о специальных определенных интегралах. К этому следует добавить теорию кратных интегралов и проблемы, возникшие при вычислении несобственных интегралов.

В VII главе первого раздела первого тома «Интегрального исчисления» Эйлер приближенно выражает интеграл $\int X\,dx$, при $x = a$ равный b, т. е. $y = \int\limits_a^x X\,dx + b$, суммой

$$y = b + A(a' - a) + A'(a'' - a) + \ldots + {}'X(x - {}'x),$$

[1] *Л. Эйлер.* Интегральное исчисление, т. I, стр. 9.
[2] Там же, стр. 12.
[3] Там же, стр. 12.

где $a, a', a'', \ldots, 'x$ — суть значения аргумента на промежутке (a, x) и $A, A', \ldots, 'X$ — соответственные значения X. При этом предполагается, что X «мало» изменяется при «весьма малом» изменении аргумента x. Приближение тем точнее, чем меньшими берутся разности $a^{(k)} - a^{(k-1)}$, но только если при этом малы разности $A^{(k)} - A^{(k-1)}$. «Если же этого не происходит,— предупреждает Эйлер,— то указанное определение будет крайше ненадежным» [1], и несколько далее он подчеркивает, что вблизи точки, где функция возрастает до бесконечности, такой способ вычисления применять «непозволительно» [2]. Как видно, Эйлер здесь подходил к выделению понятия непрерывной функции в смысле Больцано — Коши и, вместе с тем, видел трудности, связанные с трактовкой интеграла как суммы (или предела суммы) в случае функции с бесконечным разрывом. Далее, предполагая функцию X монотонной на промежутке (a, x), он заключает интеграл $\int X\,dx$ между двумя суммами:

$$b + A(a' - a) + \ldots + 'X(x - 'x),$$
$$b + A'(a' - a) + \ldots + X(x - 'x)$$

и, разбирая один пример, указывает, что обе эти суммы при бесконечном числе делений дают истинное значение интеграла. Таким образом, Эйлер по существу был близок к определению интеграла непрерывной функции как предела интегральных сумм, но от такой формулировки, данной Коши (1823), его удерживало отождествление бесконечно малой и нуля. С известными оговорками Эйлер все же допускает, что интегрирование можно понимать и как суммирование. Но хотя «интегрирование можно получить из суммирования с любою точностью; точно же его нельзя совершить иначе, как положив, что разности являются бесконечно малыми, т. е. нулями» [3].

Многочисленные работы математиков XVIII в. и самого Эйлера по вычислению и теории определенных интегралов (см. стр. 360 и след.) также естественно влекли за собой выделение понятия определенного интеграла как особого объекта исследования; при этом было ясно, что интегрирование или суммирование распространяется от одного значения аргумента до другого. В статьях Эйлера за 70-е годы часто употребляется такая терминология: например, говорится об «интегрировании от значения $x = 0$ до $x = 1$». В одной статье 1775 г., опубликованной посмертно в «Сочинениях по анализу» (Opuscula analytica, т. II. СПб., 1785), приведены основные свойства определенного интеграла, записываемые в наших обозначениях формулами вроде

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \quad \text{или} \quad \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx = 0,$$
$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx.$$

---

[1] *Л. Эйлер.* Интегральное исчисление, т. I, стр. 16?.
[2] Там же, стр. 164.
[3] Там же, стр. 163. Мы не останавливаемся здесь на модификации этого приближенного метода, основанной на применении ряда Тейлора (см. стр. 364).

Здесь же появляются термины terminus a quo (предел, от которого, т. е. нижний предел интегрирования) и terminus ad quem (предел, до которого, т. е. верхний предел). В другой статье того же времени (1776; опубл. Acta (1777: II) 1780) Эйлер ввел для определенного интеграла обозначение

$$\int P\,dx \begin{bmatrix} ab & x=a \\ ad & x=b \end{bmatrix},$$

сходное с таким: $\int dx\{P\}_{x=b}^{x=a}$, предложенным, по-видимому, несколько ранее Лапласом (Mém. pres. par sav. étr., (1773) 1776). Вскоре Лаплас предложил названия «определенный интеграл» — intégrale définie (Mém. Ac. Paris, (1779) 1782) и «пределы интегрирования» — limites d'intégration (Mém. Ac. Paris, (1783) 1786), а термином неопределенный интеграл — intégrale indéfinie мы обязаны, вероятно, Лакруа (1798). Впрочем, еще Эйлер в первом томе «Интегрального исчисления» писал, что всякое интегральное выражение является «само по себе неопределенным», но становится «определенным», если при данном значении аргумента a интеграл получает данное значение b [1].

Благодаря «Трактату по дифференциальному и интегральному исчислению» Лакруа (т. II, изд. 1, 1798; изд. 2, 1814) эти новые выражения получили более широкую известность. Любопытно, что все они приведены в первой главе второго тома «Трактата». Сперва интегральное исчисление определяется как обратное дифференциальному или как исчисление первообразных функций, и тут же интеграл характеризуется как сумма бесконечного числа дифференциалов, т. е. бесконечно малых приращений данной функции. Эта сумматорная концепция получает развитие в предпоследнем отделе главы, посвященном приближенному вычислению интегралов, притом без оговорок, которыми сопровождал ее Эйлер, но в духе (хотя и не в терминологии) метода пределов. И в этом вопросе, как и в других, проявилась характерная общая установка Лакруа, которую он сам выразил словами Лапласа, писавшего ему зимой 1792 г. в ответ на извещение о подготовке «Трактата»: «...сближение методов, которые вы намерены предпринять, служит ко взаимному их объяснению, и то, что в них есть общего, чаще всего составляет их подлинную метафизику, вот почему эта метафизика почти всегда открывается напоследок» [2].

Заключив по методу Эйлера интеграл монотонной функции между нижней и верхней интегральными «суммами Дарбу», Лакруа замечает, что разность последних может быть сделана в данном интервале сколь угодно малой при надлежащем увеличении числа разбиений промежутка интегрирования. Отсюда Лакруа делает вывод о сходимости интегральных сумм и о возможности сколь угодно точного приближения интеграла с их помощью. Этот аналитический факт, который Лакруа четко отделяет от геометрической интерпретации (к ней он обращается далее), «выясняет, в каком смысле нужно понимать, что интеграл $\int X\,dx$, взятый между пределами $x = a$ и $x = a_n$, можно рассматривать как сумму бесконечного числа элементов, равных последовательным значениям, приобретаемым дифференциалом при различных изменениях, испытываемых между

---

[1] *Л. Эйлер.* Интегральное исчисление, т. I, стр. 161.

[2] *S. F. Lacroix.* Traité du calcul différentiel et du calcul intégral, t. I, p. XIX.

этими пределами переменной x» [1]. В сноске добавлено: «Слово *бесконечное* представляется здесь только для замены перифразы, вроде той, которая выражает, *что чем больше будет в данном промежутке число элементов, тем более приблизится их сумма к предложенному интегралу и что разность этих двух величин сможет быть сделана сколь угодно малой*» [2].

Таким образом, Лакруа подходил уже к определению определенного интеграла как предела интегральных сумм и даже к постановке вопроса о существовании самого этого предела. Вместе с тем «сближение» различных концепций интегрального исчисления у Лакруа еще не перешло в их синтез, и в рамках его теории нельзя было бы решить вопросы, которые начали смущать математиков во второй половине XVIII в. и которые до поры до времени обходили стороной. Мы имеем в виду парадоксальные факты, свидетельствовавшие, что представление об интеграле как сумме (или пределе суммы) не всегда согласуется с общим правилом вычисления определенного интеграла через разность первообразных или же с убеждением в единственности значения определенного интеграла. Такие факты были обнаружены в области несобственных интегралов. Первым, по-видимому, обратил на них внимание Даламбер, разбирая вопрос о логарифмах отрицательных чисел и соответственно об интеграле $\int_{-a}^{b} \frac{dy}{y}$, а затем и об интегралах вида $\int_{-a}^{b} \frac{dy}{y^n}$, взятых между пределами различных знаков. В случае четного положительного показателя понимание интеграла как площади или же суммы дает для него бесконечное значение, между тем вычисление по правилу Ньютона — Лейбница дает отрицательное значение $\frac{-1}{n-1}\left(\frac{1}{a^{n-1}} + \frac{1}{b^{n-1}}\right)$. Заметку, в которой изложены эти замечания, Даламбер озаглавил «Об одном геометрическом парадоксе» (Sur un paradoxe géométrique; опубл. в Opuscules mathématiques, t. IV, Paris, 1768). Этот же парадокс указал в другой связи Лагранж в девятой из «Лекций об исчислении функций» (1806), а подробный анализ его, основанный на исследовании интеграла $\int_{-1}^{1} \frac{dz}{z^2}$ в комплексной области, произвел Пуассон (1820). Парадокс иного рода, относящийся к несобственному (и расходящемуся) интегралу другого типа, упомянул в письме к Лагранжу от 23 марта 1775 г. Эйлер. Речь шла о том, что разность интегралов $\int \frac{dy}{y}$ и $\int \frac{dz}{z}$, взятых от 0 до ∞, можно сделать равной любому числу, если в первом интеграле положить $y = az$, ибо тогда $\int \frac{daz}{az} - \int \frac{dz}{z} = \ln a$ [3]. В начале XIX в. аналогичные трудности были обнаружены при вычислении несобственных двойных интегралов Коши (1814; опубл. 1827).

Все эти и другие обстоятельства поставили математиков перед необходимостью исследования проблемы существования определенного интеграла

---

[1] *S. F. Lacroix.* Traité du calcul différentiel et du calcul intégral, t. I, p. 136.
[2] Там же, стр. 136.
[3] *J. L. Lagrange.* Oeuvres, t. XIV. Paris, 1892, p. 243.

с помощью новых аналитических средств. Общепринятое впоследствии определение понятия определенного интеграла непрерывной функции в конечных пределах и его обобщение на простейшие классы разрывных функций и на бесконечные промежутки интегрирования дал Коши в «Резюме лекций... по исчислению бесконечно малых» (1823)[1]. Эти же лекции содействовали распространению нового знака интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, введенного в 1819—1820 гг. и примененного затем в «Аналитической теории тепла» (1822) Фурье.

Кратные интегралы

С необходимостью вычисления двойных и тройных интегральных сумм, распространенных на поверхности или объемы, встретились еще основатели исчисления бесконечно малых. Мы упоминали во втором томе о вычислениях в «Математических началах» Ньютона, равносильных вычислению двойных и тройных интегралов (см. т. II, стр. 224). И Лейбницу были знакомы примеры, как он выразился в 1697 г., «ранее неизвестных двойных суммирований» [2], а позднее с ними не раз имел дело Эйлер, начиная с работ 30-х годов XVIII в. Общие начала теории кратных интегралов были положены в статье Эйлера «О двойных интегралах» (De formulis integralibus duplicatis), представленной Петербургской академии в 1768 г. и напечатанной в «Novi Commentarii», (1769) 1770. Эта статья примечательна и тем, что в ней весьма выпукло представлена была точка зрения на интегрирование как на процесс суммирования.

Статья открывается замечанием, что вычисление объемов или поверхностей тел часто можно производить с помощью двойного интегрирования (per duplicem integrationem) выражений вида $Zdxdy$, где Z зависит от переменных x, y, причем функция Z повторно интегрируется сперва только по одной, а затем только по другой переменной; результат интегрирования обозначается $\iint Z\,dx\,dy$. Сперва Эйлер рассматривает задачу неопределенного интегрирования как отыскания функции, двукратное дифференцирование которой по одной и затем по другой переменной дает $Zdxdy$. Это приводит к выражению двойного интеграла в форме

$$\iint Z\,dx\,dy = V + X + Y,$$

где V зависит от x, y, а X и Y суть произвольные функции, зависящие соответственно от x или y. Отметив, что порядок повторных интегрирований, который отмечается записями $\int dx \int Z\,dy$ и $\int dy \int Z\,dx$, не отражается на результате, и пояснив это примером, Эйлер переходит к применению двойных интегралов в упомянутых геометрических задачах. Общее описание приема вычисления определенного двойного интеграла, взятого по плоской области, иллюстрируется следующим примером.

---

[1] Термином «несобственный интеграл» (uneigentliches Integral) мы обязаны, насколько известно, О. Гёльдеру. См. *O. Hölder*. Beiträge zur Potentialtheorie. Stuttgart, 1885, S. 5.

[2] *G. W. Leibniz*. Mathematische Schriften, B. III. Halle a. S., 1885, S. 453.

Требуется вычислить объем восьмой части шара радиуса a, расположенной над четвертью круга ACB (рис. 28). Область интегрирования разделяется на продольные площадки (areolae) $PpMm$, затем в границах каждой такой площадки — на прямоугольные площадки $Yy = dxdy$, а искомый объем разбивается при этом на элементарные столбики $YZyz$ (columellae elementaris) с высотой $YZ = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ и объемом $\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dx\, dy$. Интеграл $\int \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dy$, «исчезающий при

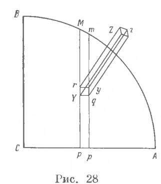


Рис. 28

$y = 0$», т. е. взятый от 0 до y, дает частицу (portiunculam) объема, стоящую над площадкой $PpYq$, именно:

$$\frac{1}{2}\, y \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} + \frac{1}{2}(a^2 - x^2) \arcsin \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Чтобы получить элемент объема, стоящий над всей площадкой $PpMm$, этот интеграл «должен быть распространен на все расстояние PM» (per totam distantiam PM extendi debet). Но если «точку Y продвинуть до M», то y будет равен $\sqrt{a^2 - x^2}$, подстановка же $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ в предыдущее выражение дает для элемента объема над $PpMm$ выражение $\int \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dy = \frac{\pi}{4}(a^2 - x^2)$. Тогда интеграл $\int dx \int \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dy = \frac{\pi}{4} \int (a^2 - x^2)\, dx$, исчезающий при $x = 0$, выражает объем, стоящий над площадью $CBMP$. Наконец, искомый объем получается, если точку P продвинуть до A, т. е. положить $x = a$, так что искомый объем равен $\pi/6\, a^3$ [1].

Эйлер рассмотрел также вопрос о замене переменных и, отправляясь от простейшего интеграла $\iint dx\, dy$, с помощью аналитических преобразований вывел основную формулу: если x, y суть функции новых переменных t, u и

$$dx = R\, dt + S\, du, \qquad dy = T\, dt + V\, du,$$

то

$$\iint Z\, dx\, dy = \pm \iint Z\,(VR - ST)\, dt\, du,$$

где знак + или — выбирается так, чтобы выражение $VR - ST$ было положительным. Прием Эйлера, с некоторыми уточнениями, сохранился в

[1] *L. Euler.* Opera omnia, series I, v. XVII. Lipsiae et Berolini, 1915, p. 293—294.

современной учебной литературе. Геометрического истолкования выражения $\pm (VR - ST)\, dtdu$, которое представляет собой элемент площади в системе криволинейных координат t, u, Эйлер не дал; оно принадлежит М. В. Остроградскому (1836; опубл. 1838).

В конце статьи Эйлер поставил задачу вариационного исчисления: среди всех поверхностей, под которыми на плоскости xOy стоит тело данного объема $\iint Z\, dx\, dy$, найти поверхность с наименьшей площадью. Интеграл, выражающий площадь поверхности, записан в привычной нам форме $\iint \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy$, где p и q суть частные производные аппликаты по абсциссе и ординате.

Тройные интегралы первым применил Лагранж в работе «О притяжении эллиптических сфероидов» (Sur l'attraction des sphéroides elliptiques. Nouv. Mém. Ac. Berlin, (1773) 1775). Выразив силу притяжения (внутренней) точки элементарным параллелепипедом $dx\, dy\, dz$ в прямоугольных декартовых координатах, он распространяет интегрирование на все точки сфероида и дает определение и описание способа вычисления интеграла по объему. Для облегчения вычислений, затруднительных даже в случае, когда притягивающее тело есть шар, Лагранж использует замену переменных. Сумматорная концепция интеграла выражена при этом столь же ясно, как в только что рассмотренной работе Эйлера. «Эту задачу,— писал Лагранж,— очень легко решить, если предположить шар разделенным на бесконечное множество маленьких цилиндров... и найти сперва притяжение, производимое каждым из этих маленьких цилиндров, а затем — сумму всех таких притяжений посредством интегрирования» [1]. Выведя путем формальных преобразований общую формулу замены переменных в тройном интеграле, Лагранж применил ее к случаю сферических координат — углов p, q и радиус-вектора r. В ходе вычислений интегралов по объему Лагранжу приходится оперировать с интегралами по поверхности, причем встречаются и некоторые соотношения между интегралами обоих видов, вроде

$$\iiint \sin^2 p \cos q\, dp\, dq\, dr = \iint (r' + r'') \sin^2 p \cos q\, dp\, dq$$

(так выражается составляющая по оси x силы притяжения единичной точечной массы однородным сфероидом единичной плотности; r' и r'' суть радиус-векторы точек поверхности, лежащих на одной прямой с полюсом). Лагранж не применил для кратных интегралов каких-либо обозначений, но они не замедлили войти в употребление в работах других авторов, например Лапласа (Mém. Ac. Paris, (1782) 1785). На первых порах общее понятие об интеграле по поверхности не было выделено, это произошло в ходе дальнейших исследований по механике и математической физике. В отделе о равновесии несжимаемых жидкостей «Аналитической механики» Лагранжа (изд. 1, 1788; изд. 2, 1813) уже отчетливо говорится об интегрировании, распространенном на всю поверхность некоторой жидкой массы, но еще и здесь нет ни особого названия, ни знака поверхностного интеграла. Гаусс в своей «Теории притяжения однородных сфероидальных эллиптических тел, изложенной новым методом» (Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum ellipticorum homogeneorum methodo novo tractata. Gottingae, 1813) уже систематически оперировал поверх-

[1] *J. L. Lagrange.* Oeuvres, t. III. Paris, 1869, p. 623—624.

ностными интегралами, причем учитывал ориентацию поверхности относительно координатных плоскостей и в некоторых случаях вычислял поверхностные интегралы непосредственно, без сведения к повторным.

Вслед за тем основы общей теории кратных интегралов были заложены С. Д. Пуассоном, М. В. Остроградским и Дж. Грином.

Техника интегрирования

Значительные успехи были достигнуты в XVIII в. в разработке приемов вычисления неопределенных интегралов, выражающихся с помощью элементарных функций. Прежде всего следует указать на изменения, которые произошли в самой постановке проблемы и в терминологии. Занимаясь квадратурой алгебраических кривых, математики XVII в. убедились в том, что она далеко не всегда возможна в алгебраической форме. Когда это удавалось, то говорили,— так поступал, например, Ньютон,— что кривая квадрируется геометрически или же в конечном виде,— при этом он имел в виду, что представляющий искомую площадь ряд обрывается. Если геометрическую квадратуру, или, как стали говорить уже в XVIII в., абсолютное интегрирование, произвести не могли, то стремились свести дело к квадратуре простейших кривых — круга, эллипса, гиперболы, т. е. выразить интеграл, помимо алгебраических функций, в круговых и в логарифмах. Еще в 1729 г. Д. Бернулли писал Гольдбаху, что рациональные дифференциалы «могут быть либо проинтегрированы, либо сведены к квадратурам круга и гиперболы» [1]. Но логарифмические и круговые функции становились все более регулярным средством (и предметом) исследований, получили специальное обозначение, и это естественно привело к их включению в число элементарных функций. В результате интегрируемыми стали называть функции, интегралы которых выражаются, не считая алгебраических функций, с помощью логарифмов и затем круговых функций. По отношению к логарифмам эту мысль впервые высказал и аргументировал, по-видимому, Эйлер в письмах Гольдбаху от 17 октября и 9 ноября 1730 г. [2], а его «Введение в анализ бесконечных» (1748) окончательно закрепило границы области функций, которые до сих пор именуют элементарными.

Математики XVIII в. сумели выразить с помощью элементарных функций и их конечных суперпозиций огромное число интегралов. Мы остановимся лишь на отдельных усовершенствованиях, достигнутых в технике интегрирования.

О первых открытиях Лейбница (опубл. 1702—1703) и Иоганна Бернулли (опубл. 1703—1704 и 1719) в интегрировании рациональных функций говорилось ранее (см. т. II, стр. 276—278). Однако эти работы далеко не исчерпали вопроса. Прежде всего оставалась открытой проблема разложимости целого алгебраического многочлена на действительные линейные и квадратичные множители, и ее окончательное решение дали только в 40-е годы Даламбер и Эйлер (см. стр. 70 и след.). Но и процесс интегрирования рациональной дроби с известными корнями знаменателя не был полностью изучен ни Лейбницем, ни И. Бернулли. Детальной разработкой

---

[1] «Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII siècle», t. II, p. 339.

[2] *L. Euler* und *Chr. Goldbach*. Briefwechsel, 1729—1764, S. 45—48.

приемов разложения рациональной функции на сумму элементарных дробей мы обязаны более всего Эйлеру; последний возвращался к этой задаче несколько раз, начиная с письма к Гольдбаху от 9 ноября 1730 г., в котором он провел окончательный результат интегрирования дроби с данными различными корнями знаменателя, и следующего письма от 25 ноября, где он изложил своему корреспонденту оригинальный прием перехода от случая двух различных корней α, β к двойному корню α, для чего принял $\beta = \alpha + d\alpha$, где $d\alpha$ — бесконечно малая величина [1].

В интегрирование алгебраических иррациональностей значительный вклад внес Ньютон, «Трактат о квадратуре кривых» которого смог получить широкую известность лишь после его издания в 1704 г. Вот примеры ньютоновой трактовки задачи. В I теореме доказывается, что кривая, площадь которой в декартовых координатах выражается функцией $x^m R^p$, где $R = e + fx^n + gx^{2n} + hx^{3n} +$ и т. д., имеет ординату $x^{m-1}R^{p-1}Q$, где Q — также целый многочлен относительно x^n. В III теореме соответственно площадь кривой с ординатой $x^{m-1}R^{p-1}$ $(a + bx^n + cx^{2n} + dx^{3n} +$ и т. д.) представляется в форме $x^m R^p$ $(A + Bx^n + Cx^{2n} + Dx^{3n} +$ и т. д.), где неопределенные сперва коэффициенты $A, B, C, D, \ldots$ последовательно выражаются через постоянные, входящие в выражение ординаты. Вообще говоря, ряд $A + Bx^n + Cx^{2n} + Dx^{3n} + \ldots$ бесконечный, но когда он обрывается, то квадратура — алгебраическая. Например, если ордината есть

$$\frac{3k - lx^2}{x^2 \sqrt{kx - lx^3 + mx^4}} = x^{-5/2}(3k - lx^2)(k - lx^2 + mx^3)^{-1/2},$$

то площадь будет

$$-2x^{-3/2}(k - lx^2 + mx^3)^{1/2} = -2\sqrt{\frac{k - lx^2 + mx^3}{x^3}}.$$

Рассматривая этот класс функций, Ньютон сделал и несколько отрывочных замечаний об интегрировании рациональной дроби. Далее Ньютон, среди прочего, специально рассмотрел большое число примеров интегралов, рациональных относительно x и $\sqrt{e + fx + gx^2}$ (или приводящихся к ним при $x = z^n$), и привел обширные «Таблицы простейших кривых, сравнимых с эллипсом и гиперболой». Все эти результаты были известны Ньютону еще за 30—35 лет до издания «Рассуждения», так же как и случаи алгебраической интегрируемости дифференциального бинома $x^m(a + bx^n)^p\,dx$, которые он в 1676 г. сообщил Лейбницу вместе с несколькими другими только что упомянутыми результатами (см. т. II, стр. 246).

Исследования Ньютона были продолжены Коутсом, в «Гармонии мер» которого (опубл. 1722) рассмотрены другие аналогичные интегралы и предложены таблицы, выражающие их через площади конических сечений. «Видимо, именно эти таблицы,— писал Д. Д. Мордухай-Болтовской,— и вызывают необходимость искать краткие обозначения, а последние приводят к мысли рассматривать выражения для некоторых простейших площадей конических сечений как основные чисто аналитические определения, как элементы построения» [2].

---

[1] *L. Euler* und *Chr. Goldbach.* Briefwechsel, 1729—1764, S. 51.

[2] См. *И. Ньютон.* Математические работы. Перевод, вводная статья и комментарии Д. Д. Мордухай-Болтовского. М.—Л., 1937, стр. 411.— Следует указать, что ряд формул в «Гармонии мер» принадлежит ее издателю Р. Смиту.

Поисками условий интегрируемости дифференциального бинома в элементарных (не только алгебраических) функциях посредством его рационализации занимались многие. В письмах к Д. Бернулли от 1 июня и к Эйлеру от 6 ноября 1730 г. Гольдбах показал,— в несколько иных обозначениях,— что если хотя бы одно из чисел $\frac{m+1}{n}$, или $\frac{m+1}{n}+p$, или p есть целое, то дифференциал преобразуется в рациональный[1]. Результат Гольдбаха высоко оценили Д. Бернулли и Эйлер, который позднее, в первом томе «Интегрального исчисления» (1768), высказал уверенность, что других случаев, допускающих сведение дифференциального бинома к рациональному виду, не существует. Доказал это утверждение для случая рациональных m, n, p П. Л. Чебышев (1853); на случай иррациональных показателей теорему обобщил Д. Д. Мордухай-Болтовской (1926).

Несмотря на эти и другие успехи, изложение техники интегрирования и по форме и по содержанию вплоть до 60-х годов не удовлетворяло самих математиков. Недаром И. Г. Ламберт в то время заявил, что исследования в этой области ведутся несистематически и ощупью, и сделал попытку направить их по более верному пути с помощью некоторой классификации интегралов и дифференциалов (Mém. Ac. Berlin, (1762) 1769). Но еще за год до опубликования мемуара Ламберта вышел первый том «Интегрального исчисления» Эйлера, в котором были практически исчерпаны наиболее важные случаи интегрирования элементарных функций в конечном виде; этот раздел анализа можно, в рамках обычных программ высшей школы, изучать «по Эйлеру» и в наши дни. Прогресс особенно заметен, если сравнить изложение Эйлера с изданным на полтора десятка лет ранее «Трактатом по интегральному исчислению» (Traité de calcul intégral) парижского ученого, позднее академика, Луи Антуана де Бугенвиля, где, в частности, вовсе отсутствуют интегралы тригонометрических функций. Систематически рассматривая один за другим классы интегрируемых функций, Эйлер внес в технику интегрирования многие собственные приемы, вроде различных рекуррентных формул, известного под его именем способа вычисления интегралов от функций, рациональных относительно x и $\sqrt{a+bx+cx^2}$, и т. д. К интегрированию сравнительно сложных иррациональных функций частного вида Эйлер возвращался и позднее, этим занимались и его ученики. Например, петербургский академик Степан Яковлевич Румовский (1734—1812), главные заслуги которого относятся к астрономии и географии и который в последние годы жизни был попечителем Казанского университета, привел к рациональной форме иррациональные выражения вроде $\frac{1}{(3-x^2)\sqrt[3]{1+x^2}}$, $\frac{1}{(1+x)\sqrt[3]{1-x^2}}$, $\frac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)\sqrt[4]{(1+6x^2+x^4)^3}}$ (Nova Acta, (1792) 1797, (1793) 1798; Mém. Ac. St.-Pétersb., 1810).

Эллиптические интегралы

В большую главу анализа выросло учение об эллиптических интегралах, т. е. интегралах вида $\int R(x, \sqrt{P(x)})\,dx$, где R — рациональная функция, а $P(x)$ — многочлен третьей или четвертой степени без кратных корней.

---

[1] «Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVII^{e} siècle», t. II, p. 368—373; *L. Euler* und *Chr. Goldbach.* Briefwechsel, 1729—1764, S. 43—50.



Джулио ди Фаньяно

Эти вопросы встретились во второй половине XVII в. в задачах на спрямление прямых, в частности эллипса, а затем в вопросах механики и теории упругости. Ученые вскоре убедились, что эллиптические интегралы представляют собой новые трансцендентные функции, обладающие интересными свойствами. Первый толчок изучению этих свойств дали Я. Бернулли, установивший равенство между собой длин дуг параболической спирали, которые не удается выразить в известных квадратурах (1691), и затем И. Бернулли, поставивший вопрос о разыскании кривых, сумма или разность дуг которых в точности равна дуге окружности или отрезку прямой линии (1695, 1698). В частности, И. Бернулли показал, что последним свойством обладают некоторые дуги кубической параболы $3a^2y = x^3$ (см. т. II, стр. 231 и 276).

В начале XVIII в. задача И. Бернулли привлекла итальянского любителя, графа Джулио Карло де Тоски ди Фаньяно (1682—1766), который только в возрасте 24 лет под влиянием чтения Мальбранша всерьез принялся за самостоятельное изучение высшей математики, но вскоре достиг ее высот. Замечательные открытия Фаньяно, особенно в области эллиптических интегралов, доставили ему большую известность: он был избран членом Лондонского королевского общества и Берлинской академии наук.

Отправляясь от упомянутого результата И. Бернулли, Фаньяно в 1714 г. публично поставил задачу о разыскании дуг со спрямляемой разностью

на параболе четвертого порядка $4a^3y = x^4$. Год спустя он дал решение более общей задачи, относившейся к кривым $\frac{m+2}{2} a^{\frac{m}{2}} y = x^{\frac{m+2}{2}}$, в статье «Новый метод спрямления разности двух дуг (из которых дана одна) у бесконечных видов неспрямляемых парабол» (Nuovo metodo per rettificare la differenza di due arche (une de quali e dato) in infinite specie de parabole irretifiabili, Giornale de'letterati d'Italia, 1715). Если положить для простоты $a = 1$ и обозначить какую-либо дугу такой кривой s, а отрезок касательной к ней между точкой касания и осью абсцисс t, то $s - t = \frac{m}{m+2}\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^m}}$. Дальнейшие выкладки привели Фаньяно к заключению, что разность двух дуг кривой, абсциссы концов которых обозначены соответственно x_1, x_2 и z_1, z_2, алгебраически спрямляема, когда алгебраически интегрируется дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{\sqrt{1+x^m}} \pm \frac{dz}{\sqrt{1+z^m}} = 0,$$

каждый член которого, вообще говоря, в конечном виде не интегрируем. Фаньяно нашел частные алгебраические решения для $m = 3$, 4 (задача И. Бернулли), 6 (задача самого Фаньяно) и еще нескольких значений. Например, если $m = 4$, то уравнение $\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} \pm \frac{dz}{\sqrt{1+z^4}} = 0$ имеет (частное) решение $xz = \pm 1$.

В следующих работах Фаньяно распространил изыскания на дуги эллипсов, гипербол и циклоид, а для приведенного только что уравнения нашел еще другие алгебраические интегралы (Giornale de'letterati d'Italia, 1716, 1717, 1720). С 1718 г. он занялся также изучением аналогичных свойств лемнискаты $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2 (x^2 - y^2)$, или, в параметрической форме, $x = a\sqrt{u + u^2}$, $y = a\sqrt{u - u^2}$, и открыл алгебраический прием деления четверти дуги на $2 \cdot 2^n$, $3 \cdot 2^n$, $5 \cdot 2^n$ равных частей. В память об этих открытиях на надгробии Фаньяно была изображена лемниската с подписью Deo veritatis gloria (слава Господу истины), подобно тому как на памятной доске в честь Я. Бернулли — логарифмическая спираль.

Замечательные исследования Фаньяно, открывшего первые теоремы сложения эллиптических интегралов, нашли продолжение не сразу. Тем временем математики обратились к другой важной проблеме, которая представлялась естественным следующим этапом после сведения ряда интегралов к круговым и логарифмическим функциям — к сведению различных интегралов иррациональных функций к дугам эллипсов и гипербол. Этому вопросу посвятил особый параграф второй книги «Трактата о флюксиях» (1742) Маклорен, а за ним последовал Даламбер в «Исследованиях об интегральном исчислении», алгебраическое содержание которых было рассмотрено во второй главе (Mém. Ac. Berlin, (1746) 1748, (1748) 1750). Оба они рассмотрели, среди прочего, примеры интегралов, содержащих в знаменателе квадратный корень из многочлена третьей или четвертой степени; Маклорен привлек для той же цели и дуги лемнискаты. Даламбер возвращался к тому же вопросу и позднее.

В начале 50-х годов к исследованию свойств эллиптических интегралов обратился Эйлер. 30 мая 1752 г. он сообщил Гольдбаху, что «недавно встретился с любопытными интегрированиями» [1], а именно, нашел алгеб-

[1] *L. Euler* und *Chr. Goldbach*. Briefwechsel, 1729—1764, S. 347.

раические интегралы дифференциальных уравнений $\frac{dx}{\sqrt{1-x^m}} = \frac{dy}{\sqrt{1-y^m}}$, где $m = 3$ или 4, а отсюда получил теорему: если провести к дуге четверти эллипса AB касательную TV в какой-либо точке M (рис. 29), отложить на ней $TV = CA$ и провести еще VN параллельно CT, то разность дуг $BM - AN = MP$, где P — основание перпендикуляра, опущенного на TV из центра C. Незадолго до того Эйлер познакомился с результатами Фаньяно по изданию сочинений последнего (Produzioni matematiche, 2 v, Pesaro, 1750), присланному автором в Берлинскую академию наук и 23 декабря 1751 г. переданному на заключение Эйлеру [1]. В серии работ,

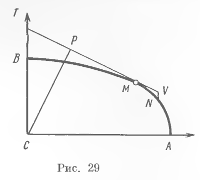


Рис. 29

начиная с «Интегрирования дифференциального уравнения $\frac{m\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{n\,dy}{\sqrt{1-y^4}}$» (Novi Commentarii, (1756—1757) 1761), Эйлер постепенно пришел к общей теореме сложения эллиптических интегралов, которую высказал во втором разделе первого тома «Интегрального исчисления» (1768). Если обозначить интеграл $\int \frac{Q(x)\,dx}{\sqrt{P(x)}}$, в числителе и знаменателе которого стоят многочлены четвертой степени и который обращается в нуль при $x = 0$, через $\Pi(x)$, то теорема может быть записана в виде

$$\Pi(x) \pm \Pi(y) = \Pi(a) + \varphi(x, y, a),$$

где $\varphi(x, y, a)$ — алгебраическая функция, и пределы x, y, a также связаны алгебраическим соотношением $a = \psi(x, y)$ (для некоторых интегралов функция $\varphi(x, y, z)$ — алгебраически-логарифмическая). К своим результатам Эйлер пришел, по его собственному выражению, скорее ощупью или путем догадки, чем руководствуясь каким-либо прямым методом. Последнее удалось Лагранжу (Miscellanea Taurinensia, 1766—1769), прием которого получил очень высокую оценку Эйлера.

Эти исследования Эйлера и Лагранжа принадлежат в большей мере к теории дифференциальных уравнений и будут подробнее освещены в восьмой главе (см. стр. 378), здесь же мы добавим еще немногие замечания. Прежде всего, теорема сложения была распространена в 1826 г. Абелем на

[1] Очевидно, по предложению Эйлера Фаньяно был летом 1752 г. избран иностранным членом Берлинской академии.

так называемые абелевы интегралы $\int\limits_0^u R(x, y)\,dx$, где R — рациональная функция, а x, y связаны любым алгебраическим уравнением $F(x,y)=0$. Сумма таких интегралов с различными пределами не представима, если они не эллиптические, одним интегралом того же вида (не считая алгебраически-логарифмических слагаемых), но она может быть выражена определенным числом p таких интегралов [1]. Тем самым Абель решил вопрос, над которым размышляли Эйлер и Лагранж, пришедшие лишь к выводу, что для гиперэллиптических интегралов обычная теорема сложения неверна.

Эйлер и Лагранж обратили внимание на аналогию между эллиптическими дифференциальными уравнениями и уравнением теории круговых функций

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \pm \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0,$$

интеграл которого можно записать и в алгебраическом виде

$$x\sqrt{1-y^2} \pm y\sqrt{1-x^2} = a,$$

и с помощью арксинусов

$$\arcsin x \pm \arcsin y = \arcsin a.$$

Обращая арксинус

$$u = \arcsin x = \int\limits_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \qquad v = \arcsin y = \int\limits_0^y \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},$$

т. е. переходя к тригонометрическим функциям $x = \sin u$, $y = \sin v$, интегральное равенство можно рассматривать как теорему сложения синусов, алгебраически связывающую $\sin u = \sqrt{1-\cos^2 u}$, $\sin v = \sqrt{1-\cos^2 v}$ и $\sin(n \pm v)$:

$$\sin u \cos v \pm \sin v \cos u = \sin(u \pm v).$$

Однако ни Эйлер, ни Лагранж не произвели обращения эллиптических интегралов $z = \Pi(x) = \int\limits_0^x R(t, \sqrt{P(t)})\,dt$ и не пришли к рассмотрению возникающих при этом функций $x = \varphi(z)$, позднее названных эллиптическими. Это сделали тот же Абель и одновременно Якоби (1827), положившие тем самым начала теории эллиптических функций, ставшей в XIX в. одним из главных отделов теории аналитических функций.

Эйлер продолжил и начатое Маклореном и Даламбером изучение классов иррациональных функций, интегралы которых представимы дугами эллипса и гиперболы. Здесь вставала проблема сравнения между собой

---

[1] Это число, которое Риман обозначил p, а Р. Ф. А. Клебш назвал родом кривой $F(x, y) = 0$, равно $\frac{(n-1)(n-2)}{2} - m$, где n — порядок кривой, а m — число ее двойных точек.

дуг различных конических сечений, т. е. преобразования одних эллиптических интегралов в другие, а также проблема классификации интегралов и выделения немногих кононических форм, к которым приводятся все остальные. Этот круг вопросов Эйлер исследовал в большой работе «О приведении интегральных формул к спрямлению эллипса и гиперболы», представленной Петербургской академии еще в 1760 г. (De reductione formularum integralium ad rectificationem ellipsis ac hyperbolae. Novi Commentarii, (1764) 1766). Он предлагает рассматривать дуги этих кривых как новые функции, равноправные с круговыми дугами и логарифмами, и, приняв за основное коническое сечение $y^2 = 2x - \frac{x^2}{a}$, которое, в зависимости от значений a, может быть эллипсом (в частности, кругом), параболой или гиперболой, обозначает длину его дуги $\Pi x\,[a]$. Преобразовав $\Pi x\,[a]$ к виду $\int \sqrt{\frac{f + gz^2}{h + kz^2}}\,dz$ (которым пользовался и Фаньяно), Эйлер различил 12 его разновидностей, в зависимости от знаков коэффициентов и выполнения того или другого из неравенств $fk \gtrless gh$. Некоторые дополнения к этой работе дал Лексель (Acta, (1778 : I) 1780 и (1778 : II) 1781). Независимо от Эйлера к очень сходным результатам пришел профессор университета в Ферраре Джанфранческо Мальфатти (1731—1807), выступивший, однако, значительно позднее (Mem. mat. fis. soc. sc. It., 1784). Теми же вопросами занимались Даламбер (1780), Лагранж (опубл. 1786) и другие ученые. Упомянем особо работу Дж. Ландена (Philos., Trans., 1775), который выразил произвольную дугу гиперболы через разность дуг двух различных эллипсов и прямой отрезок, применив некоторое преобразование, переводящее друг в друга эллиптические интегралы первого рода с различными модулями.

Значение преобразования Ландена подчеркнул Лежандр во второй из двух статей, напечатанных в «Mém. Ac. Paris» за 1786 г. (1788). В этих статьях Лежандр представил эллиптические дуги в удобной тригонометрической форме и дал их разложения в сходящиеся ряды с целью составления расчетных таблиц. Примененный здесь аппарат он использовал в несколько более позднем «Мемуаре об эллиптических трансцендентных», представленном Парижской академии в 1792 г. и вышедшем в связи с временным ее роспуском отдельным изданием (Mémoire sur les transcendantes elliptiques, Paris, an II, т. е. 1793—1794). Здесь Лежандр показал, что любой эллиптический интеграл может быть приведен к одному из трех родов, не считая элементарной части, а именно — в тригонометрической форме — к интегралам:

I. $F = \int \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$,

II. $G = \int (A + B\sin^2\varphi)\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$, где $\Delta\varphi = \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}$,

III. $H = \int \frac{A + B\sin^2\varphi}{1 + n\sin^2\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$

(подстановкой $t = \sin\varphi$ их можно перевести в алгебраическую форму; положительное число $k < 1$ называется модулем, n — параметром). Дуги эллипсов и гипербол выражаются интегралами второго рода.

Для интегралов первого рода Лежандр вывел теорему сложения

$$F(\varphi) \pm F(\psi) = F(\mu),$$

если

$$\cos\varphi\cos\psi \mp \sin\varphi\sin\psi\Delta\mu = \cos\mu,$$

а отсюда получил формулы сложения, умножения и деления, причем установил, что задача деления на n частей приводит, вообще говоря, к решению уравнения степени n^2. Он рассмотрел различные преобразования всех трех родов интегралов, обобщил преобразование Ландена и показал, как приводятся к эллиптическим некоторые интегралы, содержащие квадратный корень из многочленов шестой и восьмой степени. Он рассмотрел и различные свойства полных эллиптических интегралов, как называют определенные интегралы этого типа, взятые в пределах от 0 до $\pi/2$.

Только что рассмотренный мемуар Лежандра явился высшим достижением и итогом развития теории эллиптических интегралов в XVIII в., предложенная им классификация приобрела значение стандартной. Основное содержание этого труда Лежандр позднее включил в первый том своих «Упражнений по интегральному исчислению» (Exercices de calcul intégral. Paris, 1811), и благодаря этому его открытия получили более широкую известность. Он продолжал исследования и в дальнейшем, окончательно резюмировав их в обширном «Трактате об эллиптических функциях и эйлеровых интегралах» (Traité des fonctions elliptiques et des intégrales euleriennes, 2 v. Paris, 1825—1828). Этот выдающийся труд принадлежит все же по духу своему более XVIII, нежели XIX, в., и под эллиптическими функциями Лежандр понимает здесь интегралы. Еще до окончания издания «Трактата» выступили с первыми публикациями по теории эллиптических функций в нынешнем смысле слова Абель и Якоби. Однако в то время, да и позднее, никто не подозревал, что почти на 30 лет ранее, между 1797 и 1800 гг., глубоко разработал теорию не только эллиптических интегралов, но и эллиптических функций молодой Гаусс, до конца жизни сохранявший при себе результаты своих размышлений в этой области.

Новые специальные интегралы

Мы уже познакомились с некоторыми классами специальных интегралов, введенными в XVIII в., эйлеровыми интегралами обоих родов и эллиптическими. Среди других трансцендентных функций, возникающих при интегрировании, следует назвать еще интеграл $\int_0^x \frac{dz}{\ln z} = \int_{-\infty}^{\ln x} \frac{e^t dt}{t}$, который Эйлер ввел в первом томе «Интегрального исчисления» (1768), представив его бесконечным рядом, возникающим при почленном интегрировании разложения e^t/t. Более подробно изучил эту функцию, названную им гиперлогарифмом, Л. Маскерони в «Замечаниях к интегральному исчислению Эйлера» (Adnotationes ad Calculum integralem Euleri. Pavia, 1790—1792). Маскерони, в частности, показал, что входящая в разложение интеграла постоянная есть известная постоянная Эйлера (см. стр. 339);

$$\int_0^x \frac{dz}{\ln z} = \gamma + \ln(-\ln x) + \frac{\ln x}{1} + \frac{(\ln x)^2}{2\cdot 2!} + \frac{(\ln x)^3}{3\cdot 3!} + \ldots,$$

здесь $0 < x < 1$, при $x > 1$ следует брать главное значение интеграла, т. е.

$\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left(\int\limits_0^{1-\varepsilon}\frac{dz}{\ln z}+\int\limits_{1+\varepsilon}^{x}\frac{dz}{\ln z}\right)$. По предложению И. Зольднера (1809) эту функцию называют теперь интегральным логарифмом и обозначают $\mathrm{li}\, x$. Интегральный логарифм получил важные применения в теории чисел; в частности, количество простых чисел, не превосходящих какого-либо большого числа x, асимптотически представляется разностью $\mathrm{li}\, x - \mathrm{li}\, 2 = \int\limits_2^x \frac{dz}{\ln z}$.
Маскерони ввел еще две специальные функции, родственные интегральному логарифму и также находящие разнообразные приложения,— интегральный синус $\int\limits_0^x \frac{\sin zdz}{z}$ и интегральный косинус — $\int\limits_x^\infty \frac{\cos zdz}{z}$, которые К. Бретшнейдер (1837) обозначил соответственно $\mathrm{si}\,(x)$ и $\mathrm{ci}\,(x)$.

Во второй половине века было вычислено множество специальных определенных интегралов, в том числе несобственных, для случаев, когда интегрирование данной функции в конечном виде невозможно. Для этой цели применялись — по большей части совершенно формально — разнообразные приемы: разложения в ряды, дифференцирование под знаком интеграла, двойные интегралы, комплексные подстановки и т. д. Мы приведем несколько примеров, но сперва скажем несколько слов об истории приема дифференцирования интеграла по параметру. Дифференцирование конечного уравнения однопараметрического семейства кривых по параметру применил впервые Лейбниц в задаче об огибающих (1692; см. т. II, стр. 275). В 1697 г. Лейбниц же, занимаясь задачей об ортогональных траекториях, распространил этот прием на интегралы, зависящие от параметра, и письменно сообщил о своем открытии И. Бернулли. Старший сын последнего, Николай II Бернулли, опубликовал правило Лейбница в большой работе о траекториях, где были изложены, кроме собственных исследований, результаты отца и двоюродного брата Николая I (Acta Eruditorum, 1720 и VII дополнительный том к ним). Наконец, Фонтен в работе 1738 г., увидевшей свет в 1764 г. (ср. стр. 342), впервые привел это правило в обычной тогда символике исчисления бесконечно малых, именно в виде $\frac{d\int \mu dx}{dy}=\int\frac{d\mu}{dy}dx$. Когда Клеро 17 сентября 1740 г. известил Эйлера о приеме дифференцирования Фонтена, Эйлер 30 октября отметил, что прием этот восходит к упомянутым исследованиям об ортогональных траекториях [1]. В это же время дифференцирование интегралов по параметру получило применение при интегрировании уравнения полного дифференциала.

Интересным примером приложения бесконечных рядов явилось вычисление определенных интегралов

$$\int\limits_0^1 \frac{x^{m-1} \pm x^{n-m-1}}{1 \pm x^n}\,dx$$

(Novi Commentarii, (1774) 1775). В первом томе «Интегрального исчисле-

---

[1] Эти письма Клеро и Эйлера хранятся в Архиве АН СССР, ф. 1, оп. 3, № 29, лл. 139—140; ф. 136, оп. 2, № 12, л. 4; ф. 1, оп. 3, № 30, лл. 87—89.

ния» Эйлер представил соответствующие неопределенные интегралы бесконечными рядами

$$\frac{x^m}{m} \pm \frac{x^{n-m}}{n-m} \mp \frac{x^{n+m}}{n+m} - \frac{x^{2n-m}}{2n-m} + \frac{x^{2n+m}}{2n+m} \pm \frac{x^{3n-m}}{3n-m} - \ldots,$$

которые легко получаются почленным интегрированием разложений подынтегральных функций. Подстановка пределов дает затем ряды

$$\frac{1}{m} \pm \frac{2m}{n^2-m^2} - \frac{2m}{4n^2-m^2} \pm \frac{2m}{9n^2-m^2} - \ldots,$$

суммы которых, как это было показано в первом томе «Введения в анализ бесконечных» (ср. стр. 329). соответственно равны $\frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}}$ (в случае верхних знаков) и $\frac{\pi}{n \operatorname{tg} \frac{m\pi}{n}}$ (во втором случае). Но этим Эйлер не ограничился. С помощью замены переменных $m = \lambda - \omega$ и $n = 2\lambda$ и дифференцирования интеграла по параметру он определил еще значение несобственного интеграла $\int\limits_0^1 \frac{x^{\lambda-1} \ln x}{1-x^{2\lambda}} dx = \frac{-\pi^2}{8\lambda^2}$ и, в частности, $\int\limits_0^1 \frac{\ln x dx}{1-x^2} = -\frac{\pi^2}{8}$ (см. также Acta, (1781 : I) 1784).

В «Мемуаре о вероятностях» (Mém. Ac. Paris, (1778) 1781), о котором говорилось в четвертой главе, Лаплас, интегрируя по частям, выразил важный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} t^{2n} e^{-t^2} dt$ через $\int\limits_0^{\infty} e^{-t^2} dt$, а значение последнего нашел, остроумно используя кратное интегрирование. Именно, если двойной интеграл $I = \int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty} e^{-s(1+u^2)} ds du$ вычислить, сперва интегрируя по s и затем по u, то

$$I = \int\limits_0^{\infty} \frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Если же сделать подстановку $u\sqrt{s} = t$ и затем другую $s = v^2$, то

$$I = \int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-s} ds}{\sqrt{s}} \cdot \int\limits_0^{\infty} e^{-t^2} dt = 2\int\limits_0^{\infty} e^{-v^2} dv \cdot \int\limits_0^{\infty} e^{-t^2} dt,$$

следовательно,

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Особое значение имело введение в интегральное исчисление комплексных переменных, к которому изредка прибегали еще Лейбниц и Иоганн I Бернулли. Замечательный прием вычисления несобственных интегралов посредством мнимых подстановок был дан Эйлером в одной статье, представленной Петербургской академии в 1781 г., но увидевшей свет только

во втором издании «Интегрального исчисления» (т. IV, 1794). В интеграле

$$\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx = \Gamma(n)$$

(где n может быть и нецелым) Эйлер произвел подстановку $x = ky$, где $k = p \pm iq = r(\cos\alpha \pm i\sin\alpha)$, после чего сравнение действительной и мнимой частей в равенстве

$$\int_0^\infty y^{n-1}e^{-py}(\cos qy \mp i\sin qy)\,dy = \frac{\Gamma(n)}{r^n}(\cos n\alpha \mp i\sin n\alpha)$$

дает интегралы:

$$\int_0^\infty y^{n-1}e^{-py}\cos qy dy = \frac{\Gamma(n)}{r^n}\cos n\alpha, \qquad \int_0^\infty y^{n-1}e^{-py}\sin qy\,dy = \frac{\Gamma(n)}{r^n}\sin n\alpha.$$

Полагая, в частности, $n = {}^1/_2$, $p = 0$, $q = 1$, т. е. $r = 1$ и $\alpha = \pi/2$, и зная, что $\Gamma({}^1/_2) = \sqrt{\pi}$, Эйлер получил интегралы

$$\int_0^\infty \frac{\cos x dx}{\sqrt{x}} = \int_0^\infty \frac{\sin x dx}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

которые, как и такие же интегралы с переменным верхним пределом, нередко называют по имени О. Ж. Френеля, применившего их сорок лет спустя к решению задач дифракции света. Кроме того, приняв n бесконечно малым, так что $\Gamma(n) = 1/n\,\Gamma(n+1) = \Gamma(1)/n = 1/n$, Эйлер вычислил интеграл

$$\int_0^\infty \frac{e^{-px}\sin qx dx}{x} = \alpha = \operatorname{arctg}\frac{q}{p}$$

(интеграл, содержащий косинус, расходится) и при $p = 0$, $q = 1$ нередко встречающийся интеграл

$$\int_0^\infty \frac{\sin x dx}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

Мы вскоре увидим, что этот прием Эйлера был связан с его весьма общими результатами, относящимися к теории функций комплексного переменного.

Мнимые подстановки нашли применение тогда же и позднее у Лапласа. Не входя более в подробности, упомянем, что в мемуаре «О приближениях для формул, которые являются функциями весьма больших чисел» (Mém. Ac. Paris, (1782—1783) 1785—1786; ср. стр. 150) Лаплас таким образом среди прочего нашел, что

$$\int_0^\infty \frac{(\cos x + x\sin x)\,dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{e}.$$

В заключение остается добавить несколько замечаний о численном интегрировании. Мы уже изложили прием Эйлера, опиравшийся на понимание интеграла как предела интегральных сумм (см. стр. 346). В том же первом томе «Интегрального исчисления» (1768) Эйлер усовершенствовал этот прием с помощью разложения интеграла в степенной ряд Тейлора. Это позволило ему заключить значение интеграла $\int Xdx$, равного b при $x = a$, т. е. интеграла $\int\limits_a^x Xdx + b$, между границами

$$b + \alpha(A' + A'' + \ldots + X) - \frac{\alpha^2}{2}(B' + B'' + \ldots + P) + \\ + \frac{\alpha^3}{6}(C' + C'' + \ldots + Q) - \ldots$$

и

$$b + \alpha(A + A' + \ldots + {}'X) + \frac{\alpha^2}{2}(B + B' + \ldots + {}'P) + \\ + \frac{\alpha^3}{6}(C + C' + \ldots + {}'Q) + \ldots,$$

где $\alpha = (x - a)/n$; A, A',..., $'X$, X суть значения X при x, равном a, $a + \alpha$, ..., $a + (n - 1)\alpha$, $a + n\alpha$; B, B', ..., $'P$, P — соответственные значения dX/dx; C, C',..., $'Q$, Q — значения d^2X/dx^2 и т. д. Можно еще более приблизиться к истинному значению, отмечал Эйлер, если взять среднее арифметическое этих границ. И в отношении «усовершенствованного» метода он предупреждает, что непосредственное применение его невозможно, если в промежутке интегрирования функция X обращается в бесконечность, хотя бы сам интеграл $\int Xdx$ был конечным, как в случае $\int\limits_0^a \frac{dx}{(a - x)^n}$ при $n < 1$. Оставляя в стороне указания Эйлера, как обойти трудности в данном примере, добавим, что свой уточненный метод он в том же томе «Интегрального исчисления» распространил на дифференциальные уравнения первого порядка (см. стр. 393).

Из приемов механических квадратур заслуживает упоминания так называемая формула Симпсона, или же формула парабол, которая была найдена Дж. Грегори в 1668 г. (см. т. II, стр. 157). Для случая трех ординат геометрический эквивалент этой формулы был известен еще ранее Кавальери (1639) и Торричелли (1644); он содержится и в «Гармонии мер» Коутса (опубл. 1722). Более широкую известность формула парабол получила благодаря профессору Военной академии в Вулвиче Томасу Симпсону (1710—1761), который опубликовал ее в своих «Математических рассуждениях на физические и аналитические темы» (Mathematical dissertations on physical and analytical subjects. London, 1743). В наших обозначениях эта формула пишется так:

$$\int\limits_a^b ydx \cong \frac{b-a}{6n} \cdot [y_0 + y_{2n} + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + \ldots + y_{2n-2})].$$

Здесь y_0, y_1,..., y_{2n} суть значения функции y для равностоящих значений аргумента от a до b и $2n$ — число делений. Популярность формулы Симпсона объясняется ее простотой и сравнительно высокой степенью точности.

Элементы теории функций комплексного переменного

В предыдущем изложении мы не раз говорили о работах математиков XVIII в. в области функций комплексного переменного. Уже к середине этого столетия благодаря трудам Лейбница, Иоганна I Бернулли, Коутса Муавра, Даламбера и особенно Эйлера была развита теория элементарных функций комплексного аргумента, включая их разложения в степенные ряды, бесконечные произведения и ряды простейших дробей. Вслед за тем комплексные переменные получили применение в интегральном исчислении. Этим вклад ученых XVIII в. в теорию аналитических функций не ограничился. Хотя они еще не приступили к ее систематической разработке, но выдвинули несколько идей и методов, которые в дальнейшем приобрели фундаментальное значение в создании общей теории. Так, были введены конформные преобразования (стр. 169), высказано свойство единственности аналитических функций (стр. 251). Другим замечательным открытием явилось установление связи между действительной и мнимой частью аналитической функции.

В середине XVIII в. комплексные переменные получили чрезвычайно важные применения к решению уравнений с частными производными. Отправными явились гидродинамические исследования Даламбера и затем Эйлера. Подробнее об этом говорится в девятой главе, здесь же мы остановимся только на обнаруженных попутно свойствах аналитических функций.

Рассматривая в «Опыте новой теории сопротивления жидкостей» (1752; см. стр. 419) один вопрос механики плоского движения идеальной жидкости, Даламбер привел его к определению двух функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ (проекций скорости частицы жидкости на оси координат) по уравнениям:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad (D - E)$$

означающим, что выражения $vdx + udy$ и $udx - vdy$ суть полные дифференциалы. С помощью условия полного дифференциала и несложных преобразований в комплексной области Даламбер представил искомые функции формулами, из которых непосредственно вытекает, с нашей точки зрения, что u и v суть действительная часть и коэффициент при i некоторой произвольной функции комплексного переменного $u + vi$, произвол которой ограничен лишь тем, что она подразумевается аналитической и принимает действительные значения при действительном аргументе.

Впоследствии Даламбер («Математические работы», т. I, 1761) и успешно развивавший его гидромеханические исследования Лагранж (Miscellanea Taurinensia, (1762—1765) 1766) установили, что функции u и v, связанные условиями (D — E), суть решения уравнения второго порядка

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \qquad (E - L)$$

т. е., как говорят теперь, суть гармонические сопряженные функции: все решения этого уравнения Эйлера — Лапласа называются гармоническими функциями, а решения, для которых выполняются еще условия (D — E), — сопряженными гармоническими (о наименовании только что написанного уравнения см. стр. 444).

Тем временем Эйлер в «Общих принципах движения жидкостей» (Principes généraux du mouvement des fluides. Mém. Ac. Berlin, (1755) 1757), решая по методу Даламбера задачу о плоском потенциальном движении идеальной жидкости, вновь пришел к условиям (D — E). Проекции скорости он представил, объединив их в одном комплексном выражении (мы сохранили обозначения Эйлера):

$$u \pm \frac{v}{\sqrt{-1}} = \frac{1}{2}\varphi : (x \pm y\sqrt{-1}) \pm \frac{1}{2\sqrt{-1}}\psi : (x \pm y\sqrt{-1}),$$

где φ и ψ — произвольные функции, подчиненные требованию, что при замене аргумента на комплексно сопряженный аналогично изменяются их значения (т. е. имеющие действительные значения на действительной оси). Предполагая $\varphi(p)$ и $\psi(p)$ разложенными по натуральным степеням аргумента $p = x \pm y\sqrt{-1}$, Эйлер с помощью подстановок $(x \pm y\sqrt{-1})^n = s^n(\cos n\varphi \pm \sqrt{-1}\sin n\varphi)$ выразил обе функции u, v в действительной форме, именно тригонометрическими рядами:

$$u = A + Bs\cos\varphi + Cs^2\cos 2\varphi + \ldots + \mathfrak{B}s\sin\varphi + \mathfrak{C}s^2\sin 2\varphi + \ldots,$$
$$v = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}s\cos\varphi + \mathfrak{C}s^2\cos 2\varphi + \ldots - Bs\sin\varphi - Cs^2\sin 2\varphi + \ldots$$

Отыскание действительных решений уравнения (E — L), первоначально полученных в комплексной форме, имело важное значение, и Эйлер возвратился к этому вопросу в третьем томе «Интегрального исчисления» (1770). Получив решение в виде

$$z = f(x + y\sqrt{-1}) + F(x - y\sqrt{-1}),$$

он замечает, что z при «непрерывности» функций f и F можно записать как сумму

$$z = \frac{1}{2}f(x + y\sqrt{-1}) + \frac{1}{2}f(x - y\sqrt{-1}) + \frac{1}{2\sqrt{-1}}F(x + y\sqrt{-1}) - \frac{1}{2\sqrt{-1}}F(x - y\sqrt{-1}),$$

которая всегда действительная, а затем, приведя указанные подстановки, заключает: «Следовательно, если заданные функции составлены с помощью аналитических операций, т. е. непрерывны, их можно выразить в действительной форме через косинусы и синусы [кратных угла] φ» [1].

Следующий важный шаг сделал опять-таки Эйлер в 1776 г., когда он в возрасте 69 лет начал пионерские исследования о вычислении определенных интегралов с помощью комплексных переменных. Все работы его по этому вопросу были напечатаны уже посмертно. Две из них, содержащие наиболее общие результаты, были представлены ранней весной 1777 г. Это статьи «О весьма замечательных интегрированиях, получающихся с помощью исчисления мнимых» и «Дальнейшее исследование о мнимых интегральных формулах» (De integrationibus maxime memorabilis ex calculo imaginariorum oriundis. Nova Acta, (1789) 1793; Ulterior disquisitio de

---

[1] *Л. Эйлер.* Интегральное исчисление, т. III, стр. 160.— Эйлер рассматривает здесь уравнение $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + a^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$; мы положили $a = 1$.

formulis integralibus imaginariis. Nova Acta, (1792) 1797). Вся теория мнимых, говорил Эйлер во второй статье, которой анализ обязан теперь столькими успехами, основана, главным образом, на том свойстве функций комплексного переменного, что они изменяют свое значение на сопряженное вместе с аргументом. Исходя из этого, Эйлер выводит уравнения (D — E), применяя к комплексным величинам обычные правила интегрирования. Если $z = x + y\sqrt{-1}$ и $Z(z) = M(x, y) + N(x, y)\sqrt{-1}$ — функция, интеграл которой

$$\int Zdz = V(z) = P(x, y) + Q(x, y)\sqrt{-1},$$

то

$$P + Q\sqrt{-1} = \int (M + N\sqrt{-1})(dx + dy\sqrt{-1}) = \\ = \int (Mdx - Ndy) + \sqrt{-1}\int (Ndx + Mdy)$$

и, значит,

$$P - Q\sqrt{-1} = \int (M - N\sqrt{-1})(dx - dy\sqrt{-1}) = \\ = \int (Mdx - Ndy) - \sqrt{-1}\int (Ndx + Mdy),$$

так что

$$P = \int (Mdx - Ndy), \qquad Q = \int (Ndx + Mdy).$$

Поэтому выражения $Mdx - Ndy$ и $Ndx + Mdy$ суть полные дифференциалы функций P и соответственно Q. А в таком случае, согласно условию полного дифференциала,

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial y}, \qquad \frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{\partial N}{\partial x}. \qquad (D - E)$$

Таким образом Эйлер установил, что действительная и мнимая части любой аналитической функции $Z = M + N\sqrt{-1}$ необходимо удовлетворяют тем уравнениям (D — E), которые некогда встречались ему и до него Даламберу при решении дифференциальных уравнений гидромеханики.

Непосредственной целью Эйлера была разработка нового метода интегрирования, который он применил к вычислению целого ряда трудных неопределенных интегралов, преобразуя какой-либо известный интеграл $\int Zdz = V$ подстановкой $z = x + iy = v(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ в другие интегралы. Возникающие при этом интегралы от полных дифференциалов с двумя переменными он приводил к интегралам от функций одного переменного, полагая v или φ постоянными. Другим применением того же метода явилось вычисление несобственных интегралов, когда первообразная не выражается в элементарных функциях (см. стр. 363). Эти интегрирования Эйлера и почти одновременные с ними Лапласа стимулировали исследования Пуассона (с 1813 г.) и Коши (с 1814 г.), которые ввели отчетливое понятие о криволинейном интеграле в комплексной области. Ни у Эйлера, ни у Лапласа идеи интегрирования по пути, лежащему в комплексной плоскости, еще не было, хотя формальные выкладки в мемуарах Эйлера 1777 г. фактически основывались на том, что криволинейный интеграл от полного дифференциала не зависит от пути интегрирования (ср. ин-

тегральную теорему Коши; 1825), а вычисление конкретных интегралов с помощью подстановки $z = v (\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $\varphi = \text{const}$ соответствовало интегрированию вдоль луча, выходящего из начала координат [1].

Уравнения (D — E) до сих пор нередко называют по имени Коши и Римана. Более справедливо именовать их по имени Даламбера и Эйлера, как в последнее время все чаще поступают многие ученые. Но глубокое значение этого свойства аналитических функций, которое сам Эйлер назвал замечательным, стало ясным только в общей теории аналитических функций и особенно после основоположных исследований Римана (1851). У математиков XVIII в. не было точного понятия не только об интеграле в комплексной области, но и о производной функции комплексного переменного. Определение производной и дифференциала в этом случае точно такое же, как для функции действительного переменного, но свойства дифференцируемых функций комплексного переменного во многом отличны от их свойств для функций действительного аргумента и дифференцируемость первых имеет место при гораздо более стеснительных условиях. Здесь и выявляется фундаментальная роль уравнений Даламбера — Эйлера. Именно функция комплексного переменного $w = f(z) = u + vi$ имеет определенную конечную производную в точке $z = x + yi$ (т. е. предел $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$, значение которого не зависит от того, по какому пути Δz стремится по модулю к нулю) только при выполнении условий $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$; с другой стороны, эти же условия достаточны для дифференцируемости функции w, если, сверх того, скажем, функции u и v имеют полные дифференциалы. Можно доказать, что функция, дифференцируемая во всех точках какой-либо области, имеет в них производные любого порядка, а также разлагается в некоторой окрестности каждой точки области в степенной ряд, т. е. аналитична.

Итак, в XVIII в. были, хотя и не строго, выявлены и использованы весьма важные свойства аналитических функций. Это в значительной мере подготовило систематическую разработку общей теории, ставшую возможной лишь после реформы оснований анализа в первой четверти XIX в.

---

[1] Гаусс сформулировал определение интеграла по комплексному переменному и интегральную теорему Коши еще в письме к Бесселю от 18 декабря 1811 г., опубликованном в 1880 г. (*C. F. Gauss.* Werke, B. VIII. Göttingen, 1900, S. 90—92).

ВОСЬМАЯ ГЛАВА

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Первые работы петербургских академиков

В восьмой главе второго тома были кратко рассмотрены методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, разработанные Ньютоном, Лейбницем и братьями Я. и И. Бернулли. В качестве универсального способа решения были использованы разложения интегралов уравнений в бесконечные степенные ряды. Вместе с тем в школе Лейбница была поставлена задача интегрирования в квадратурах и некоторые классы уравнений первого порядка были с помощью подходящих преобразований приведены к разделению переменных.

Исследования в этом направлении были продолжены в первой четверти XVIII в. Для примера мы рассмотрим содержание статей, помещенных в двух первых томах «Записок» (Commentarii) Петербургской академии. Характерно, что из шести математических работ первого тома за 1726 г. (1728) пять относятся к дифференциальным уравнениям.

Статья Я. Германа «Об интегральном исчислении» (De calculo integralium) относится, в основной части, к интегрированию уравнений вида

$$du = R^{\lambda} dK,$$

где R и K суть функции одной или нескольких переменных x, y,... Предполагая, что $u = MR^{\lambda+1}$, Герман сводит дело к интегрированию «канонического уравнения»

$$dK = (\lambda + 1)\ MdR + RdM,$$

аналогично он поступает с уравнениями

$$du = R^{\lambda} S^{\mu} dK \text{ и } du = R^{\lambda} S^{\mu} T^{\nu} dK.$$

В примерах фигурируют уравнения, интегрируемые непосредственно, или уравнения в полных дифференциалах. Так, уравнение

$$du = 3\ a^3y^2dy - 6a^2x^2ydy + 3ax^4dy - 6a^2xy^2dx + 12\ ax^3\ ydx - 6\ x^5dx$$

записывается в виде $du = R^{\lambda}dK$, где $R = x$, $\lambda = 5$, так что $dK = 6Mdx + xdM$, после чего путем довольно долгих выкладок находятся M и $u = (ay - x^2)^3$. Современный прием интегрирования уравнения в полных дифференциалах был предложен несколько позднее Клеро и Эйлером.

Х. Гольдбах в небольшой заметке указал (необоснованно!), что после исследования Лейбницем и И. Бернулли однородного уравнения встает

задача о решении уравнения вида

$$(a + bxy + cx^2y^2 + \ldots)\,dx + (bx^2 + mx^2y^2 + nx^4y^2 + \ldots)\,dy = 0.$$

Однако сам он привел к однородному только уравнение

$$(a + cx + fy)\,dx + (b + ex + gy)\,dy = 0,$$

для чего применил линейные подстановки

$$x = z + \frac{bf - ag}{cg - ef}, \quad y = u + \frac{ae - bc}{cg - ef}.$$

В другой статье того же тома Гольдбах рассмотрел некоторые случаи так называемого уравнения Риккати вида

$$ax^m dx + byx^p\,dx + cy^2 dx = dy.$$

В связи с этим отметим, что итальянский математик Джакопо Риккати (1676—1754) впервые поставил в 1723 г. вопрос: найти значения n, при которых уравнение

$$x^n \frac{du}{dx} + u^2 = nx^{m+2n-1}$$

допускает разделение переменных. Эти значения независимо друг от друга нашли, кроме самого Риккати, Иоганн I, Николай I, Николай II и Даниил Бернулли, ранее других опубликовавший свой результат в «Некоторых математических этюдах» (Exercitationes mathematicae quaedam. Venezia, 1724). Установленные ими случаи оказались единственными, как доказал Ж. Лиувилль (1841), когда «специальное» уравнение Риккати решается в квадратурах. Исследованием этого же уравнения занимался и Эйлер (ср. стр. 377).

Из работ, помещенных в первом томе «Записок» Петербургской академии, упомянем еще «Анализ некоторых дифференциальных уравнений» (Analysis aequationum quarundam differentialium) Николая II Бернулли, где, среди прочего, показано, что уравнение

$$ax^m y^n dx + bx^p y^q dx = dy$$

с помощью подстановки $x^{p+1} = u$ приводится (при сохранении прежних обозначений всех величин) к

$$ax^m y^n dx + by^q dx = dy,$$

частным случаем которого при $q = 1$ является так называемое «уравнение Бернулли». Дальнейшая замена $y^{1-n} = v$ дает более простое уравнение вида

$$ax^m dx + by^q dx = dy,$$

при $q = 1$ оказывающееся линейным. Общее линейное уравнение первого порядка Николай II Бернулли решил с помощью подстановки $y = e^{bx} z$. Впоследствии экспоненциальные подстановки получили широкое применение в работах Эйлера.

В малоизвестной работе Я. Германа «О построении решений дифференциального уравнения первого порядка» (De constructione aequationis dif-

ferentialis primi gradus), помещенной во втором томе «Записок» Петербургской академии за 1727 г. (1729), предметом изучения является уравнение $y = P(z)x + Q(z)$, где $dy = zdx$, т. е. $z = dy/dx$. Другими словами, здесь рассматривается уравнение, которое впоследствии было названо уравнением Даламбера — Лагранжа и которое привлекло еще в 1694 г. внимание И. Бернулли. Решение Герман получил с помощью приема дифференцирования, который был несколько ранее, в 1715 г., применен Б. Тейлором, а затем в 1734 г. Клеро (см. стр. 399). Естественно, что решение было получено в параметрической форме:

$$x = RS, \quad y = PRS + Q,$$

где

$$\ln R = \int \frac{dP}{z - P}, \quad S = \int \frac{dQ}{zR - PR}.$$

Случай $P \equiv z$ Герман не рассмотрел, его впервые исследовал Клеро (см. стр. 400). В виде дополнения указывается возможность перенесения приема на уравнения вида

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0,$$

где коэффициенты — функции $z = dy/dx$, в предположении, что левая часть может быть представлена как произведение двух линейных множителей.

Основное содержание начального периода теории дифференциальных уравнений, продолжавшегося до второй четверти XVIII в., состояло преимущественно в накоплении материала. Найденные результаты имели фрагментарный характер, постановка задач была неотчетлива, преувеличенное значение приписывалось методу разделения переменных. Вместе с этим уже первые исследователи в отдельных случаях затрагивали весьма существенные проблемы теории обыкновенных дифференциальных уравнений, не отдавая себе отчета в их принципиальном значении и чрезвычайной сложности. К концу этого периода еще не могло быть и речи о сколько-нибудь отчетливом формировании главных направлений в этой новой области математического анализа.

Новые задачи естествознания и техники

Со второй четверти XVIII в. начинается новый период в развитии теории обыкновенных дифференциальных уравнений, продолжавшийся около ста лет. Именно в это время совокупность приемов решения отдельных типов уравнений переросла в самостоятельную дисциплину со своим специфическим предметом исследования, системой основных понятий и определившимися методами решения проблем.

Основные направления, в которых происходил этот процесс, были в решающей степени обусловлены запросами стремительного прогресса естествознания и техники. Дальнейшее развитие общей и небесной механики, физики жидкостей и газов, физики упругой среды, не говоря уже о технической механике и гидравлике, — все это определило новые задачи математического анализа.

В небесной механике возникли задачи исключительной сложности. Надлежало прежде всего исследовать явления, которые еще не были удовле-

творительно объяснены на основе закона всемирного тяготения. Здесь требовалось теоретически вывести все особенности наблюдаемых движений небесных тел, прежде всего принадлежащих Солнечной системе, в рамках ньютоновой механики. Изучение взаимодействия между телами Солнечной системы было необходимо, в частности, для решения вопроса о постоянстве существующего взаиморасположения планетных орбит. Напомним, что Ньютон не считал возможным сохранение существующего состояния Солнечной системы без вмешательства время от времени «сил божественного провидения», полагая, что взаимное притяжение тел этой системы должно привести ее в беспорядок. Исследование вопроса об устойчивости планетных орбит приводило к трудной задаче определения этих орбит для больших интервалов времени. Для ее решения требовалось создать совершенно новые математические методы. В первую очередь они были необходимы для дальнейшего развития динамики материальной точки, теории движения твердого тела, динамики несвободной системы.

Чтобы отчетливее представить себе возникавшие трудности, достаточно напомнить, что к началу XVIII в. даже в динамике точки не существовало аналитических методов. Прежними синтетическо-геометрическими построениями Ньютона, требующими видоизменения для каждой новой сколько-нибудь сложной задачи, довольствоваться было уже невозможно, и Эйлер, Даламбер и Лагранж заложили прочные основы аналитической механики. Решающую роль приобрела при этом теория обыкновенных дифференциальных уравнений, к которым приводили задачи динамики точки и динамики систем материальных точек.

Первые же задачи динамики точки при их аналитической трактовке потребовали методов интегрирования нелинейных уравнений второго порядка и их систем. Напомним, что определение по закону всемирного тяготения движения центра тяжести планеты, притягиваемой центром тяжести Солнца, эквивалентно решению задачи с начальными условиями для системы

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} + K\frac{x_i}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{3/2}} = 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ 3),$$

где K — постоянная, определяемая через массу Солнца и абсолютную постоянную, входящую в выражение закона тяготения. Динамические уравнения Эйлера, определяющие движение абсолютно твердого тела, имеющего одну неподвижную точку, представляют нелинейную систему трех уравнений второго порядка (относительно эйлеровских углов ψ, θ, φ как функций времени t). К нелинейным уравнениям приводили задачи о движении точки в сопротивляющейся среде, рассмотренные впервые Ньютоном, как и многие экстремальные задачи механики, физики, геометрии, явившиеся предметом развивающегося вариационного исчисления, в частности, важное для практических приложений нахождение геодезических линий на поверхности. Решение задач статики и динамики механических систем со сложными связями также требовало интегрирования нелинейных уравнений.

Поэтому одним из направлений формировавшейся теории обыкновенных дифференциальных уравнений явилось разыскание методов решения нелинейных уравнений в конечной форме. Вопрос о самой возможности решения в таком виде еще не возникал. Именно в этом плане развивались методы понижения порядка и интегрирующего множителя.

Наряду с этим назрела потребность в создании приемов решения линейных уравнений. Это объясняется тем, что в начале XVIII в. приобретает все большее значение исследование малых колебаний материальных систем с конечным числом степеней свободы, в первую очередь в предположении, что отсутствует сопротивление среды. В связи с конструированием достаточно точных маятниковых часов, необходимых для астрономических наблюдений, и с первыми гравиметрическими проблемами (определение ускорения силы тяжести в зависимости от широты, выяснение сжатия Земли у полюсов) потребовалось дальнейшее развитие аналитической теории математического и физического маятников, начала которой положил ранее Гюйгенс. И если в XVII в. вопрос ограничивался, как правило, изучением изохронного движения одной точки, то теперь в центр внимания встали системы любого конечного числа материальных точек. Отсюда берут начало и первые исследования в области колебательных процессов систем с бесконечным числом степеней свободы, начиная со знаменитой задачи о колебании струны.

Весь этот комплекс вопросов требовал создания теории линейных дифференциальных уравнений и их систем, как с постоянными, так и с переменными коэффициентами.

Третье большое направление было обусловлено в значительной степени нуждами опять-таки небесной механики. Мы имеем в виду численные методы приближенного интегрирования дифференциальных уравнений, без которых невозможным оказалось изучение сложных нелинейных систем, не интегрируемых в конечном виде. Наряду с усовершенствованием метода степенных рядов, успешно применявшихся в предшествующем столетии, уже в середине XVIII в. получают применение тригонометрические ряды. Несколько позже теория дифференциальных уравнений обогащается первым общим методом аппроксимации решения для любых уравнений первого и второго порядков.

Наконец, четвертым направлением теории обыкновенных дифференциальных уравнений было изучение особых решений. Оно определялось главным образом запросами дифференциальной геометрии, например исследованием огибающих и изогональных траекторий семейств кривых (позже семейств поверхностей). Это направление, связанное прежде всего с изучением семейств плоских кривых и, в частности, семейств интегральных линий, играло в XVIII в. меньшую роль, чем три названных ранее. Однако уже в начале второй четверти XIX в. тесно связанная с теорией особых решений проблема единственности решений задач с начальными условиями, а вместе с тем и общая проблема существования решений приобрели в теории обыкновенных дифференциальных уравнений первостепенное значение.

Обзор достижений математики XVIII в. в развитии этих направлений требует более всего анализа работ Эйлера и его самых выдающихся современников — Даламбера и Лагранжа.

Первые методы решения нелинейных уравнений

Интегрирование нелинейных дифференциальных уравнений связано с исключительными трудностями и в настоящее время.

Казалось бы, что в историческом процессе развитие теории должно было начинаться с изучения линейных проблем. Однако история науки дале-

ко не всегда следует пути, «естественному» с точки зрения логического построения современной теории. Полтора десятилетия отделяют первую работу Эйлера о некоторых классах нелинейных дифференциальных уравнений от его первого классического мемуара по теории линейных уравнений. Именно при исследовании отдельных классов нелинейных уравнений постепенно формировались важнейшие понятия теории, уточнялся смысл самой задачи: решить дифференциальное уравнение.

Впервые в печати такие понятия, как «полный интеграл» (в смысле общего интеграла по современной терминологии), частный интеграл, частное решение были введены Эйлером лишь в 1743 г. в его замечательном мемуаре о линейных уравнениях (см. стр. 383). Анализ предшествующих работ Эйлера позволяет заключить, что этими понятиями он владел в конце 30-х годов XVIII в. В первых своих работах он говорит еще не о «решениях» дифференциального уравнения, а о «конечном» или «интегральном» уравнении.

Множество задач динамики, приводящих к уравнениям второго порядка, и отсутствие методов решения последних определили особый интерес Эйлера к уравнениям этого типа. Одним из методов решения явился метод понижения порядка. Интерес к нему объяснялся тем, что отдельные классы уравнений первого порядка, как было показано выше, умели интегрировать предшественники Эйлера. Первая работа Эйлера по теории дифференциальных уравнений «Новый метод сведения бесчисленных дифференциальных уравнений второго порядка к дифференциальным уравнениям первого порядка» (Nova methodus innumerabiles aequationes differentiales secundi gradus reducendi ad aequationes differentiales primi gradus. Commentarii, (1728) 1732) имеет целью изучение четырех видов уравнений второго порядка, допускающих, с помощью замены независимого переменного и неизвестной функции, приведение к уравнениям первого порядка. Определение этих видов основано на обобщении понятия однородности. Для пояснения укажем один из них: уравнение

$$ax^m y^{-m-1} dx^p dy^{2-p} + bx^n y^{-n-1} dx^q dy^{2-q} = d^2y$$

будет однородным, если считать x, y, dx, dy, d^2y имеющими одинаковые измерения.

Содержание первой работы Эйлера в силу новизны подхода воспринималось современниками Эйлера с большим трудом. В частности, в своих письмах к И. Бернулли Эйлер был вынужден трижды разъяснять свое определение однородности уравнения. Эта работа сыграла весьма существенную роль и для теории линейных уравнений, ибо в ней Эйлер применил замену переменных с помощью показательной функции, например для только что приведенного уравнения $x = e^v$, $y = e^v t$, где t — некоторая новая неизвестная функция. Напомним, что экспоненциальной подстановкой пользовался несколько ранее при решении линейного уравнения первого порядка Николай II Бернулли. Характерно, что Эйлер отмечает источник основной идеи нового метода: при любом дифференцировании показательной функции переменный показатель степени сохраняется.

Несколько иначе трактует Эйлер интегрирование обобщенно-однородных уравнений второго порядка в позднейших исследованиях. Так, во втором томе «Интегрального исчисления» (1769) уравнения второго порядка представляются в виде систем двух уравнений первого порядка. С помощью соотношений $dy = pdx$, $dp = qdx$ формулируется следующий крите-

рий однородности: переменные x, y, p, q должны входить в уравнение так, чтобы подстановки $y = ux$, $q = v/x$ исключали из уравнения x.

Поскольку речь идет об уравнениях второго порядка, упомянем, что в случае, когда в них не входит явно искомая функция, Дж. Риккати предложил излагаемый теперь во всех учебниках прием понижения порядка с помощью подстановки $y'' = y' \frac{dy'}{dy}$ (Giorn. de Letterati d'Italia, 1715). К уравнению вида $f(y, y', y'') = 0$ Риккати пришел, решая задачу об определении кривой, радиус кривизны которой есть функция ординаты. Тот же прием был известен задолго до того Я. Бернулли, но соответствующая работа последнего увидела свет только в 1744 г.

В первом и втором томах «Интегрального исчисления» Эйлер изложил и ряд других методов интегрирования отдельных классов нелинейных уравнений. Некоторые из них, в частности параметрическое представление интеграла, применяются и теперь.

Интегрирующий множитель

Особенно много результатов Эйлер получил с помощью метода интегрирующего множителя, который разрабатывал с начала 30-х годов.

Предпосылкой широкого употребления метода интегрирующего множителя, по умножении на который уравнение первого порядка преобразуется в уравнение полного дифференциала, являлось умение интегрировать последнее. В седьмой главе уже говорилось об открытии Эйлером и Клеро необходимых условий, при которых дифференциальные выражения вида $Pdx + Qdy$ или $Pdx + Qdy + Rdz$ могут быть полными дифференциалами. При этом было упомянуто, что в мемуаре «Об интегрировании или построении дифференциальных уравнений первого порядка» (Mém. Ac. Paris, (1740) 1742) Клеро проинтегрировал, как это делают теперь, точные уравнения:

$$Pdx + Qdy = 0 \text{ и } Pdx + Qdy + Rdz = 0.$$

Эти же результаты были получены Эйлером, включившим их в первый (1768) и третий (1770) тома «Интегрального исчисления».

В отдельных случаях, как мы видели (см. т. II, стр. 278), интегрирующим множителем воспользовался еще в XVII в. Иоганн Бернулли, за которым последовал его сын Николай II (Acta Eruditorum, 1720). Систематическую разработку метода интегрирующего множителя предприняли Эйлер и, независимо, но в меньшем объеме, Клеро [1]. С наибольшей полнотой этот метод Эйлер изложил в «Интегральном исчислении». Отыскание множителя для уравнения первого порядка приводит к уравнению в частных производных, и, в соответствии с этой трудностью, Эйлер главное внимание сосредоточил на установлении классов уравнений, обладающих множителем заданного вида. В первом томе вопрос исследуется для уравнений первого порядка, во втором метод распространяется на некоторые случаи уравнений второго порядка и, наконец, в третьем обобщается на уравнения n-го порядка.

[1] Эйлер указал на существование интегрирующих множителей дифференциальных выражений в статье «Общее решение изопериметрической проблемы...» (Commentarii, (1732—1733), 1736; см. стр. 457) и впервые применил их практически в упомянутой ранее работе «О бесконечном числе кривых одного и того же вида...».

В методологическом отношении интересна попытка Эйлера предвидеть дальнейшее развитие теории. Первая глава раздела «Об интегрировании дифференциальных уравнений» в первом томе «Интегрального исчисления» начинается критическими замечаниями в адрес школы Лейбница. Несомненно, что главным образом имеются в виду работы братьев Бернулли, хотя явно об этом не говорится. «Многие строят весь фундамент решения дифференциальных уравнений на разделении переменных... Желателен метод, посредством которого отыскивается требуемая подстановка; однако мы не обладаем уверенными правилами, так как подобные подстановки не основываются на определенном принципе. Поэтому разделение переменных не следует рассматривать как истинный фундамент решений дифференциальных уравнений, особенно потому, что для уравнений второго и высшего порядка оно неприменимо» [1]. Несколько далее, имея в виду метод интегрирующего множителя, Эйлер говорит, что он переходит к другому принципу, применимому и к дифференциальным уравнениям высших порядков, так что «в нем содержится истинный и естественный источник всех интегрирований» [2]. Характерно и предвидение Эйлером трудностей разыскания таких множителей. В дальнейшем развитии теории в XVIII и XIX вв. эти соображения Эйлера полностью оправдались.

Отметим две теоремы, на которых основаны многие применения метода и важность которых Эйлер специально подчеркивал. Первая формулируется так: если M — интегрирующий множитель уравнения $Pdx + Qdy = 0$, то уравнение $M = 0$ представляет частный интеграл, если при этом P и Q не обращаются в бесконечность.

Вторая теорема — следствие попыток Эйлера доказать существование множителя. Уже в одной статье, помещенной в «Novi Commentarii» ((1760/61) 1763) формулируется следующая теорема: если в дифференциальном уравнении $Mdx + Ndy = 0$ условие $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ не выполнено, то всегда имеется множитель, посредством умножения на который выражение $Mdx + Ndy$ становится интегрируемым. Аналогичная формулировка дается в первом томе «Интегрального исчисления» [3]. Однако центральный пункт существования соответствующего решения уравнения с частными производными остался в обоих случаях недоказанным.

В своих приложениях интегрирующего множителя к уравнениям высших порядков Эйлер опирался на критерий, при котором функция вида $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right)$ есть точная производная по x некоторой функции, содержащей производные лишь до порядка, на единицу меньшего. Этот критерий, совпадающий с необходимым условием экстремума интеграла $\int F dx$ (см. стр. 459), Эйлер привел в «Novi Commentarii» за 1764 г. (1766) и доказал в обзоре вариационного исчисления, приложенном к третьему тому «Интегрального исчисления» (1770). К тому же результату пришел довольно сложным путем Кондорсе в сочинении «Об интегральном исчислении» (Du calcul intégral, Paris, 1765), а Лексель изящно вывел его без помощи вариационного исчисления (Novi Commentarii, (1771) 1772).

---

[1] *Л. Эйлер.* Интегральное исчисление, т. I, стр. 227.
[2] Там же, стр. 247.
[3] Там же, стр. 256.

Уравнение Риккати

Отметим еще два результата Эйлера относительно нелинейных уравнений. Первый из них — обобщение приема дифференцирования, предложенного Клеро (1734), для решения уравнений вида

$$p - qx = Q(q), \quad q - rx = R(r),$$

где $p = dy/dx$, $q = dp/dx$, $r = dq/dx$ и т. д. В качестве примера решается уравнение

$$\frac{dy}{dx} - x\frac{d^2y}{dx^2} = a$$

(«Интегральное исчисление», т. IV, 1794).

Предшественником здесь явился Даламбер, который в «Записках» Берлинской академии за 1748 г. (1750) указал возможность перенесения метода Клеро на уравнения:

$$x = y\,\Phi(u) + \Delta(u), \qquad u = y\,\Phi(K) + \Delta(K),$$

где

$$K = \frac{du}{dy}.$$

Второй результат — исследование уравнения Риккати с помощью непрерывных дробей. Попутно отметим, что, сравнивая операции разложения функций в бесконечные ряды, произведения и непрерывные дроби, Эйлер отдавал предпочтение последнему алгоритму. В известной мере и это мнение Эйлера оправдалось: в частности, алгоритм непрерывных дробей успешно используется в современной вычислительной технике.

Уравнение Риккати вызывало интерес у многих исследователей не только потому, что к нему приводит ряд задач механики, но и в силу возможности свести к нему любое линейное уравнение второго порядка.

Выше говорилось (см. стр. 370) о первых работах, посвященных специальному уравнению Риккати. Общим уравнением Риккати [1]

$$\frac{dy}{dx} = P(x)\,y^2 + Q(x)\,y + R(x)$$

занялся еще в 30-е годы Эйлер, более детально изучивший его свойства в статьях, помещенных в «Novi Commentarii» (1760—1761) 1763 и (1762—1763) 1764. В частности, он показал, что, когда известно частное решение этого уравнения, оно подстановкой $y = v + \frac{1}{z}$ может быть приведено к линейному, а если даны два частных решения, то интегрируется квадратурой. Значительную часть своих результатов, относящихся как к специальному, так и к общему уравнению Риккати, Эйлер изложил в двух первых томах «Интегрального исчисления». Однако применение непрерывных дробей к уравнению Риккати содержится в других работах Эйлера, часть которых была опубликована посмертно. Приведем результат, изложенный в статье, представленной Петербургской академии в 1780 г., но появившейся только в VI томе ее «Mémoires» в 1818 г. под названием

[1] Уравнением Риккати назвал это уравнение Даламбер в одном письме к Лагранжу от июня 1769 г.

«Легкий прием решения уравнения Риккати с помощью непрерывных дробей» (Analysis facilis aequationem Riccatianam per fractionem continuam resolvendi). Для уравнения

$$axdz - azdx + z^2dx = x^2dx$$

Эйлер формально получил два решения:

$$z_1 = x\,\frac{e^{x/a} + e^{-x/a}}{e^{x/a} - e^{-x/a}} = a\,\frac{1 + \frac{1}{2}\frac{x^2}{a^2} + \dots}{1 + \frac{1}{6}\frac{x^2}{a^2} + \dots},$$

$$z_2 = a + \cfrac{x^2}{3a + \cfrac{x^2}{5a + \dots}},$$

удовлетворяющие одному и тому же начальному условию $z(0) = a$. На этом основании Эйлер заключает, что эти два решения тождественно совпадают. Записав уравнения в форме двух равенств:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{az + x^2 - z^2}{ax}, \qquad \frac{dx}{dz} = \frac{ax}{az + x^2 - z^2},$$

убеждаемся, что точка $(0, a)$ является особой, а линия $x = 0$ — интегральной. Тем не менее окончательное заключение Эйлера оказывается справедливым. Точка $(0, a)$, как нетрудно убедиться, является седлообразной, а интегральная линия $x = 0$ не должна учитываться в силу самой постановки задачи.

Дифференциальные уравнения и эллиптические интегралы

Как говорилось в седьмой главе (стр. 354 и след.), математики XVIII в. установили, что проблема разыскания спрямляемых сумм или разностей дуг эллипсов, гипербол и лемнискат приводит к разысканию частных алгебраических интегралов специальных эллиптических уравнений, которые нередко называют по имени Эйлера. Действительно, Эйлер первый получил весьма общие результаты, относящиеся к этой области, и многие из них, хотя и не все, содержатся во втором разделе первого тома его «Интегрального исчисления».

Метод выявляется уже в простейших случаях: Эйлер, исходя из заданного алгебраического соотношения как полного интеграла, стремится найти соответствующее дифференциальное уравнение. Рассмотрим первую задачу V главы этого раздела: пусть дано алгебраическое уравнение $\alpha + 2\beta(x + y) + \gamma(x^2 + y^2) + 2\delta xy = 0$. Требуется найти соответствующее ему дифференциальное уравнение. Дифференциал левой части есть

$$(\beta + \gamma x + \delta y)\,dx + (\beta + \gamma y + \delta x)\,dy = 0.$$

Подстановки $p = \beta + \gamma x + \delta y$, $q = \beta + \gamma y + \delta x$ в исходное уравнение дают соотношения:

$$p^2 = \beta^2 - \alpha\gamma + 2\beta(\delta - \gamma)\,y + (\delta^2 - \gamma^2)\,y^2,$$
$$q^2 = \beta^2 - \alpha\gamma + 2\beta(\delta - \gamma)\,x + (\delta^2 - \gamma^2)\,x^2.$$

Дальнейшие подстановки $A = \beta^2 - \alpha\gamma$, $B = \beta(\delta - \gamma)$, $C = \delta^2 - \gamma^2$ позволяют придать уравнению $pdx + qdy = 0$ вид

$$\frac{dx}{\sqrt{A+2Bx+Cx^2}} + \frac{dy}{\sqrt{A+2By+Cy^2}} = 0.$$

В силу исходного соотношения это означает, что полный интеграл этого уравнения есть

$$\beta^2(B^2 - AC) + 2\beta\gamma AB + 2\beta\gamma B^2(x+y) + \gamma^2 B^2(x^2+y^2) + \\ + 2\gamma B(\beta C - \gamma B)xy = 0.$$

Роль произвольного постоянного играет отношение β/γ.

В частном случае $\beta = 0$ Эйлер получает следствие: уравнение

$$\frac{dx}{\sqrt{A+Cx^2}} = \frac{dy}{\sqrt{A+Cy^2}}$$

имеет полным интегралом

$$y = x\sqrt{\frac{A+Cb^2}{A}} + b\sqrt{\frac{A+Cx^2}{A}}.$$

Уже в этом простейшем случае Эйлер получает теорему сложения.

Положим:

$$\Pi(x) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{A+Cx^2}}, \qquad \Pi(y) = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{A+Cy^2}}$$

(у Эйлера обозначения пределов отсутствуют). Тогда дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{\sqrt{A+Cx^2}} = \frac{dy}{\sqrt{A+Cy^2}}$$

имеет полный интеграл [1]

$$\Pi(y) = \Pi(x) + C_1.$$

Но этот же интеграл имеет выражение

$$y = x\sqrt{\frac{A+Cb^2}{A}} + b\sqrt{\frac{A+Cx^2}{A}}.$$

При $x = 0$ отсюда следует $y = b$ и, значит, $C_1 = \Pi(b)$. Итак,

$$\Pi(y) = \Pi(x) + \Pi(b).$$

Тот же результат может быть выражен иначе: для выполнения соотношений

$$\Pi(r) = \Pi(p) \pm \Pi(q)$$

необходимо, чтобы

$$r = p\sqrt{\frac{A+Cq^2}{A}} \pm \sqrt{\frac{A+Cp^2}{A}}.$$

[1] Произвольное постоянное в тексте обозначено также C.

Как частный случай здесь получаются известные формулы сложения круговых дуг. Пусть

$$\Pi(z) = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \arcsin z,$$

тогда при $r = p\sqrt{1-q^2} \pm q\sqrt{1-p^2}$ получим

$$\arcsin z = \arcsin p \pm \arcsin q.$$

Все эти рассуждения Эйлера являлись лишь наводящими для исследования значительно более сложной задачи о нахождении алгебраических интегралов уравнения $\frac{dx}{\sqrt{P_4(x)}} = \frac{dy}{\sqrt{P_4(y)}}$, где $P_4(z)$ — многочлен четвертой степени. На этом пути Эйлер и нашел формулы сложения для эллиптических интегралов всех трех типов.

Приведем лишь один из результатов, содержащихся в VI главе второго раздела первого тома «Интегрального исчисления». Дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{\sqrt{A+2Bx+Cx^2+2Dx^3+Ex^4}} + \frac{dy}{\sqrt{A+2By+Cy^2+2Dy^3+Ey^4}} = 0$$

имеет своим полным интегралом соотношение

$$\alpha + 2\beta(x+y) + \gamma(x^2+y^2) + 2\delta xy + 2\varepsilon xy(x+y) + \xi x^2y^2 = 0,$$

если [1]

$$\beta^2 - \alpha\gamma = Am, \quad \beta\delta - \alpha\varepsilon - \beta\gamma = Bm,$$
$$\delta^2 - 2\beta\varepsilon - \alpha\xi - \gamma^2 = Cm, \quad \delta\varepsilon - \beta\xi - \gamma\varepsilon = Dm,$$
$$\varepsilon^2 - \gamma = Em.$$

Исследования Эйлера сразу же заинтересовали Лагранжа. В работе «Об интегрировании некоторых дифференциальных уравнений, в которых переменные разделены, но члены которых по отдельности не интегрируемы» (Sur l'intégration de quelques équations différentielles dont les indéterminées sont séparées, mais dont chaque membre n'est pas intégrable. Miscell. Taurinensia, 1766—1769). Лагранж рассмотрел уравнение

$$\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4}} = \frac{dy}{\sqrt{\alpha+\beta y+\gamma y^2+\delta y^3+\varepsilon y^4}},$$

несколько упрощая построения Эйлера, хотя и следуя сходному пути. Требуется найти интеграл вида

$$A + B(x+y) + C(x^2+y^2) + D(xy) + E(x^2y+y^2x) + F(x^2y^2) = 0.$$

Дифференцируя это соотношение, Лагранж устанавливает связь между данными коэффициентами $\alpha, \beta, \ldots$ и неопределенными коэффициентами $A, B, \ldots$:

$$\alpha = B^2 - 4AC, \qquad \beta = 2BD - 4(AE + BC),$$
$$\gamma = 2BE + D^2 - 4(AF + C^2 + BE), \quad \delta = 2DE - 4(BF + CE),$$
$$\varepsilon = E^2 - 4CF.$$

[1] Здесь значения пяти отношений шести величин $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \xi$ к одной из них определяются отношением к последней произвольно взятой m.

При этом поясняется, что, поскольку заданных коэффициентов не больше пяти, то из шести неопределенных коэффициентов по крайней мере один будет неопределенным и он будет играть роль произвольного постоянного.

В этой же работе Лагранж стремится развить для уравнений, которые не интегрируются обычными способами, метод дифференцирования. В общей форме схема решения такова. Когда уравнение первого порядка не может быть проинтегрировано, следует его дифференцировать. Затем, комбинируя новое уравнение с предложенным. нужно найти интеграл нового уравнения, который сам будет дифференциальным уравнением первого порядка. После этого надлежит взять разность двух таких интегралов (т. е. дифференциальных уравнений первого порядка), получить алгебраическое соотношение, которое и будет искомым интегралом исходного уравнения.

Проиллюстрируем схему Лагранжа на примере уравнения

$$\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}=\frac{dy}{\sqrt{\alpha+\beta y+\gamma y^2}}.$$

Положив $dt=\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}=\frac{dy}{\sqrt{\alpha+\beta y+\gamma y^2}}$, Лагранж дифференцирует уравнения:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=\alpha+\beta x+\gamma x^2,\quad \left(\frac{dy}{dt}\right)^2=\alpha+\beta y+\gamma y^2,$$

что дает

$$2\frac{d^2x}{dt^2}=\beta+2\gamma x,\quad 2\frac{d^2y}{dt^2}=\beta+2\gamma y.$$

Сложение и замена $x+y=p$ приводят к уравнению $2\frac{d^2p}{dt^2}=2\beta+2\gamma p$, а затем, после умножения на dp и интегрирования, к уравнению

$$\frac{dp}{dt}=\sqrt{k+2\beta p+\gamma p^2}.$$

С другой стороны,

$$\frac{dp}{dt}=\frac{dx+dy}{dt}=\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}+\sqrt{\alpha+\beta y+\gamma y^2}.$$

Приравнивая эти выражения dp/dt, Лагранж для уравнения

$$\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}=\frac{dy}{\sqrt{\alpha+\beta y+\gamma y^2}}$$

получил интеграл

$$\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}+\sqrt{\alpha+\beta y+\gamma y^2}=\sqrt{k+2\gamma(x+y)+\gamma(x+y)^2}$$
$$(k=\mathrm{const}).$$

Если же использовать разность двух уравнений второго порядка. то аналогичные вычисления приводят к интегралу

$$\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}-\sqrt{\alpha+\beta y+\gamma y^2}=\sqrt{H+\beta(x-y)^2},$$

где H — произвольное постоянное.

Этот метод Лагранж применил и к уравнению

$$\frac{dx}{\sqrt{P_4(x)}} = \frac{dy}{\sqrt{P_4(y)}},$$

которое сначала исследовал, как показано выше, по методу Эйлера. Метод дифференцирования приводит к интегралу

$$\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4} + \sqrt{\alpha + \beta y + \gamma y^2 + \delta y^3 + \varepsilon y^4} =$$
$$= (x - y)\sqrt{G^2 + \delta(x + y) + \varepsilon(x + y)^2},$$

где G — произвольное постоянное.

Не ограничиваясь этим, Лагранж предпринял попытку интегрирования более общего уравнения

$$\frac{dx}{\sqrt{X(x)}} = \frac{dy}{\sqrt{Y(y)}},$$

где одинаковые функции X и Y не предполагаются многочленами. Вводя вспомогательные уравнения

$$\frac{dt}{T} = \frac{dy}{\sqrt{Y}}, \qquad \frac{dt}{T} = \frac{dx}{\sqrt{X}},$$

а затем замену

$$x = \frac{p+q}{2}, \qquad y = \frac{p-q}{2},$$

Лагранж пришел, следуя своей схеме, к уравнению

$$\frac{d}{dp}\left(T\frac{dp}{dt}\right)^2 = 2T\frac{d}{dq}\left(\frac{X-Y}{T}\right),$$

неявно предполагая, что dp/dt есть функция только p. Однако дальнейшее исследование проводится лишь для отдельных случаев функции T, в частности, $T = P(p)\,Q(q)$.

Результаты Лагранжа, относящиеся к уравнению $\frac{dx}{\sqrt{P_4(x)}} = \frac{dy}{\sqrt{P_4(y)}}$, вызвали восхищение Эйлера и вновь побудили его к исследованиям этой проблемы. В заключение напомним, что Эйлеру на этом пути удалось получить теорему сложения эллиптических интегралов всех трех родов (см. стр. 357).

Линейные уравнения

Основная заслуга в развитии теории линейных дифференциальных уравнений опять-таки принадлежит Эйлеру, хотя весьма существенные открытия были сделаны в этой области также Д. Бернулли, а затем Даламбером, Лагранжем, Лежандром. Частные результаты получил Лексель.

В работах этого направления ярко проявилась характерная черта творчества Эйлера: единство теории и практики. Исследования линейных задач механики и физики были важнейшим стимулом теории и соответствующие работы Эйлера нередко непосредственно развивали эту теорию. Например, в статьях о распространении колебаний в упругой среде имеются ре-

зультаты, относящиеся к интегрированию линейных систем с постоянными коэффициентами, отсутствующие в сочинениях Эйлера по дифференциальным уравнениям.

Вклад Эйлера и его современников в рассматриваемый отдел теории обыкновенных дифференциальных уравнений столь велик и разнообразен, что мы должны ограничиться анализом лишь его наиболее важной части. При этом, несколько отступая от хронологического порядка и сложного переплетения исследований отдельных типов линейных уравнений, мы начнем с уравнений с постоянными коэффициентами, первые примеры которых, второго порядка, встретились еще в конце XVII в. Однако вновь подчеркнем, что выделение этого класса, как простейшего среди линейных уравнений, потребовало значительного времени. Основополагающим явился уже упоминавшийся мемуар Эйлера «Об интегрировании дифференциальных уравнений высших порядков» (De integratione aequationum differentialium altiorum graduum. Miscellanea Berolinensia, 1743), где был изложен классический прием решения линейного однородного уравнения любого порядка с постоянными коэффициентами; прием, которым Эйлер владел ранее, как это видно из его письма к И. Бернулли от 26 сентября — 3 октября 1739 г. Решению уравнения, записанного в производных

$$Ay + B\frac{dy}{dx} + \ldots + N\frac{d^ny}{dx^n} = 0,$$

т. е. в форме, несомненно более удобной, чем обычная тогда запись с помощью дифференциалов, предпосланы очень важные общие указания. Исходя из мысли, что с помощью одного интегрирования, вводящего одну произвольную постоянную, порядок уравнения понижается на единицу, Эйлер заключает, что «полное интегральное уравнение» (aequatio integralis completa), т. е. наше общее решение, должно содержать n произвольных постоянных. Поэтому в силу линейности общее решение можно составить, зная n частных решений p, q,... (у Эйлера — «частные значения», valores particulares) в форме $\alpha p + \beta q + \ldots$, где α, β,... — произвольные постоянные. Понятие линейной зависимости функций явно выделено еще не было. Очевидно, только что приведенное положение относится к однородным линейным уравнениям как с постоянными, так и с переменными коэффициентами. Для отыскания частных решений рассматриваемого уравнения Эйлер применил экспоненциальную подстановку, как он это уже сделал, вслед за Николаем II Бернулли, еще в работе 1728 г. (см. стр. 374). Положив $y = e^{px}$, где p — постоянное, Эйлер пришел к так называемому теперь характеристическому уравнению n-й степени

$$A + Bp + Cp^2 + Dp^3 + \ldots + Np^n = 0,$$

которое в случае действительных различных корней $p_1, p_2 \ldots p_n$ немедленно дает n частных решений $e^{p_1x}, e^{p_2x},\ldots e^{p_nx}$ и соответственно общее решение. Эйлер подробно разобрал и случаи, когда характеристическое уравнение имеет кратные действительные, а также мнимые корни, причем воспользовался подстановками вида $y = e^{kx}u$.

Значение этого мемуара в теории дифференциальных уравнений трудно переоценить (ср. стр. 373). Следует добавить, что почти одновременно и независимо решением уравнений того же класса занимался Д. Бернулли. В статье о колебании и звучании упругих стержней, помещенной в «За-

писках» Петербургской академии за 1741—1743 гг. (1751), он выразил общее решение уравнения четвертого порядка

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{y}{f^4}$$

(где f — постоянная, зависящая от упругости стержня) как бесконечным степенным рядом, так и в конечном виде. Однако общий метод «абсолютной интеграции» (как он выражался) линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами Бернулли не изложил.

Способ решения неоднородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами Эйлер опубликовал 10 лет спустя в мемуаре «Дальнейшее развитие метода интегрирования дифференциальных уравнений высших порядков» (Methodus aequationes differentiales altiorum graduum integrandi ulterius promota. Novi Commentarii, (1750—1751) 1753). Этот способ, основанный на применении интегрирующего множителя, отличается от общепринятого теперь и приводит к последовательному понижению порядка. Например, уравнение второго порядка

$$X = Ay + B\frac{dy}{dx} + C\frac{d^2y}{dx^2}$$

умножается на $e^{\alpha x}$, а затем принимается, что решение возникающего уравнения первого порядка имеет вид

$$\int Xe^{\alpha x}\,dx = e^{\alpha x}\left(A'y + B'\frac{dy}{dx}\right),$$

где A' и B' — неопределенные коэффициенты. Дифференцирование последнего уравнения и почленное сравнение с данным уравнением позволяет найти значения постоянных A', B' и α, после чего дело сводится к решению линейного уравнения первого порядка.

Другой прием, основанный на сведении неоднородного уравнения к системе линейных уравнений первого порядка, указал, несколько опередив Эйлера в публикации, Даламбер в «Записках» Берлинской академии за 1748 г. (1750). Даламбер же позднее указал, что сумма общего решения однородного уравнения и какого-либо частного решения неоднородного с теми же коэффициентами есть общее решение последнего. Однако вопрос о том, какие линейные комбинации образуют общее решение, теоретически исследован был лишь позже Лагранжем и особенно математиками XIX в.

Что касается излагаемого в теперешних руководствах метода вариации постоянных, то его применил к неоднородному линейному уравнению n-го порядка с переменными коэффициентами Лагранж в «Nouveaux Mémoires de l'Académie de Berlin» за 1775 г. (1777). Впрочем, сам метод вариации неоднократно употребляли и ранее. Эйлер им пользовался по крайней мере с 1739 г. и в «Физическом исследовании причины морских приливов и отливов» (Inquisitio physica in causam fluxus ac refluxus maris, 1741) приложил его к уравнению второго порядка

$$\frac{d^2y}{dx^2} + Ky = X.$$

И в данном случае тем же путем, что и Эйлер, причем независимо от него, пошел, как явствует из переписки, Д. Бернулли. Метод вариации постоянных не раз встречался впоследствии в различных исследованиях Эйлера, Лагранжа, Лапласа и их преемников.

Как видим, создание конкретных приемов решения линейных уравнений было неотделимо связано с установлением общих понятий и теорем о свойствах решений этих уравнений. Вот еще один пример, заслуживающий внимания. Применяя метод интегрирующего множителя к линейному уравнению n-го порядка с переменными коэффициентами

$$Ly + M\frac{dy}{dt} + N\frac{d^2y}{dt^2} + \ldots = T$$

и требуя, чтобы левая часть по умножении на этот множитель z оказалась точной производной по x, Лагранж нашел, что z должен удовлетворять уравнению n-го порядка

$$Lz - \frac{d(Mz)}{dt} + \frac{d^2(Nz)}{dt^2} - \ldots = 0,$$

которое впоследствии получило название сопряженного с однородным уравнением $Ly + M\frac{dy}{dt} + N\frac{d^2y}{dt^2} + \ldots = 0$. Если множитель известен, то для определения y получается таким образом неоднородное уравнение, порядок которого на единицу ниже. Очевидно, что этот прием, изложенный в «Miscellanea Taurinensia» за 1762—1765 гг. (1766). непосредственно примыкал к способу интегрирования, предложенному Эйлером для неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами. Сопряженное уравнение Лагранж использовал при решении уравнения

$$Ay + B(h+kt)\frac{dy}{dt} + C(h+kt)^2\frac{d^2y}{dt^2} + \ldots = T,$$

где A, B, h, k — постоянные, частный случай которого при $h = 0, k = 1$ до того рассмотрел Эйлер. Любопытно, что Эйлер, видимо, не обративший внимания на работу Лагранжа, вновь получил уравнение, которое уже назвал сопряженным, в 1778 г.; при этом он более отчетливо выявил, что сопряженность линейных однородных выражений есть свойство взаимное. Впрочем, эта статья Эйлера была напечатана много спустя после его смерти (Nova Acta, (1797—1798) 1805). Интересно, что в этой работе Эйлер ввел понятие резольвенты — «разрешающего уравнения» (aequatio resolvens). Впоследствии учение о сопряженных уравнениях выросло в специальную главу общей теории линейных дифференциальных уравнений и было широко обобщено в современной теории линейных операторов. В той же работе Лагранж показал, что, зная m частных решений однородного уравнения, можно понизить на m единиц порядок неоднородного уравнения с теми же коэффициентами. Это же по-другому доказал Даламбер в послании к Лагранжу, одновременно напечатанном в «Miscellanea Taurinensia».

Наконец, упомянем, что Эйлер (Novi Commentarii. (1750—1751) 1753; «Интегральное исчисление», т. II. 1769) и за ним Лагранж (та же работа) первые приступили к изучению линейных уравнений бесконечно высокого порядка, которые получили затем применения в теории конечных разностей.

Линейные системы с постоянными коэффициентами

Эта область исследований была открыта Даламбером и Эйлером, причем снова в непосредственной связи с задачами механики. Рассматривая вопрос о колебаниях нагруженной точечными грузами нити, бесконечно

мало отклоненной от вертикального положения, Даламбер в «Трактате по динамике» (Traité de dynamique, Paris, 1743) рассмотрел примеры линейных однородных систем с постоянными коэффициентами вида:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha_1 x + \beta_1 y + c_1 z = T_1(t),$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} + \alpha_2 x + \beta_2 y + c_2 z = T_2(t),$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} + \alpha_3 x + \beta_3 y + c_3 z = T_3(t).$$

Умножая эти уравнения соответственно на числовые множители m_1, m_2, m_3 и складывая произведения, он подбирал множители так, чтобы возникшее уравнение имело форму:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = ku + T(t), \quad u = m_1 x + m_2 y + m_3 z.$$

Решение последнего уравнения позволяет линейно выразить одну из величин x, y, z через две другие и $u(t)$ так, что система трех уравнений с тремя неизвестными функциями приводится к системе двух линейных уравнений с двумя неизвестными функциями, и т. д. Для отыскания множителей получается кубическое уравнение, уравнение же $\frac{d^2u}{dt^2} = ku + T(t)$ Даламбер сводил к однородному подстановкой $u = v \cdot w$, где v и w — новые неизвестные функции, прием, использованный ранее Эйлером (Commentarii, (1732—1733) 1738). Аналогично, указывал Даламбер, можно поступить в случае систем с большим числом неизвестных функций.

Метод числовых множителей Даламбер изложил также, применительно к линейным системам первого порядка, в уже упоминавшейся (см. стр. 384) статье в «Записках» Берлинской академии за 1748 г. (1750). Этот же метод применил к системе:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha_1 \frac{dx}{dt} + \beta_1 \frac{dy}{dt} + \gamma_1 x + \delta_1 y = T_1(t),$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha_2 \frac{dx}{dt} + \beta_2 \frac{dy}{dt} + \gamma_2 x + + \delta_2 y = T_2(t)$$

и другим, более общим, системам Лексель (Acta, (1777, ч. I) 1778; (1779, ч. II) 1783).

Эйлер пошел другим путем.

В работе «О распространении пульсаций через упругую среду» (De propagatione pulsuum per medium elasticum. Novi Commentarii, (1747—1748) 1750) он переносит на системы свой общий метод решения линейных уравнений с постоянными коэффициентами. При этом не только строится, как говорят теперь, фундаментальная система решений, но и решается задача с начальными условиями частного вида. В обозначениях Эйлера система, к которой сведена указанная задача, имеет вид:

$$\frac{1}{n^2}\frac{d^2x}{dt^2} = x^{(\mathrm{I})} - 2x,$$
$$\frac{1}{n^2}\frac{d^2x^{(\mathrm{I})}}{dt^2} = x^{(\mathrm{II})} - 2x^{(\mathrm{I})} + x,$$

$$\frac{1}{n^2}\frac{d^2x^{(\mathrm{II})}}{dt^2} = x^{(\mathrm{III})} - 2x^{(\mathrm{II})} + x^{(\mathrm{I})},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{n^2}\frac{d^2x^{(\lambda-2)}}{dt^2} = x^{(\lambda-1)} - 2x^{(\lambda-2)} + x^{(\lambda-3)},$$

где n — известное постоянное, $x^{(\lambda-1)} \equiv 0$, оно включено в последнее уравнение ради симметрии. Частные решения Эйлер получает с помощью тригонометрических функций:

$$x = \alpha \cos 2npt,$$
$$x^{(\mathrm{I})} = \alpha^{(\mathrm{I})} \cos 2npt,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x^{(\lambda-2)} = \alpha^{(\lambda-2)} \cos 2npt.$$

Возникающее при определении постоянных $\alpha, \alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(\lambda-2)}$ алгебраическое (характеристическое) уравнение решается с помощью замены $p = \sin\varphi$. При этом возникает $\lambda - 1$ решений, позволяющих построить решение, зависящее от $\lambda - 1$ произвольных постоянных. Указывается возможность аналогичных построений при замене $\cos 2npt$ на $\sin 2npt$. Далее решается задача с начальными условиями частного вида.

Следует отметить непосредственное развитие этого эйлеровского результата в творчестве Лагранжа (Miscellanea Taurinensia, (1762—1765) 1766). При исследовании натянутой струны с распределенными вдоль нее грузиками Лагранж приходит к такой же системе и решает ее совершенно аналогичным образом, сохраняя при этом даже многие обозначения эйлеровской работы, на которую он, впрочем, не ссылается.

Метод Эйлера значительно превосходил по своей общности способ числовых множителей Даламбера, сравнительно удобный лишь в простейших случаях, когда число неизвестных функций невелико, и в дальнейшем не имевший существенного значения.

Линейные уравнения с переменными коэффициентами

Обратимся к результатам, полученным в решении специальных линейных уравнений с переменными коэффициентами, отдельные классы которых нам встречались уже ранее.

В работе «О дифференциальных уравнениях, допускающих интегрирование в некоторых случаях» (De aequationibus differentialibus quae certis tantum casibus integrationem admittunt. Commentarii, (1738) 1747) с особой выразительностью обнаруживается сила мысли Эйлера. Уже здесь показано, что при известном частном интеграле $v = X(x)$ полный интеграл уравнения $Pd^2v + Q\,dv\,dx + R\,vdx^2 = 0$ дается формулой

$$v = XC\int \frac{e^{-\int \frac{Q}{P}dx}}{X^2}\,dx.$$

С точностью до произвольного постоянного, входящего в интеграл правой части, этот результат совпадает с формулой, которая в некоторых руководствах именуется «следствием формулы Лиувилля».

Здесь же дается метод разыскания частного интеграла для весьма общего линейного уравнения с переменными коэффициентами

$$(a + bx^n)\, x^2\, d^2u + (c + fx^n)\, x\, du\, dx + (g + hx^n)\, u\, dx^2 = 0,$$

где a, b, c, f, g, h и n — постоянные. Большая общность этого уравнения очевидна, и его частными случаями являются несколько важных классов специальных уравнений:

1) уравнение цилиндрических функций k-го порядка, носящее иногда имя немецкого астронома и математика Бесселя:

$$x^2 \frac{d^2u}{dx^2} + x \frac{du}{dx} + (x^2 - k^2)\, u = 0;$$

2) уравнение Лежандра с параметром h

$$(1 - x^2) \frac{d^2u}{dx^2} - 2x \frac{du}{dx} + hx = 0;$$

3) уравнение Чебышева

$$(1 - x^2) \frac{d^2u}{dx^2} - x \frac{du}{dx} + hu = 0;$$

4) уравнение Чебышева — Эрмита

$$\frac{d^2u}{dx^2} - 2x \frac{du}{dx} + h = 0;$$

5) гипергеометрическое уравнение Гаусса

$$(x^2 - x) \frac{d^2u}{dx^2} + [-\gamma + (1 + \alpha + \beta)\, x] \frac{du}{dx} + \alpha\beta u = 0.$$

Все перечисленные классы были позднее специально изучены только что названными и другими учеными. Сам Эйлер в дальнейшем встретился с уравнением цилиндрических функций в задаче о колеблющейся мембране (см. стр. 428), а один частный случай его еще ранее решил с помощью степенных рядов Д. Бернулли в связи с изучением малых колебаний однородной весомой подвешенной нити (Commentarii, (1732—1733) 1738 и (1734—1735) 1740).

Возвратимся к рассматриваемому общему уравнению. Эйлер формально представляет искомое частное решение в виде некоторого степенного ряда с неопределенными коэффициентами и находит условие обрыва ряда. Если записать решение в виде

$$u = Ax^k + Bx^{k-n} + Cx^{k-2n} + \ldots,$$

где k — некоторое действительное число, то соотношение

$$h = -fk - bk\,(k - 1),$$

найденное здесь Эйлером, позволяет найти спектры собственных значений известных краевых задач для уравнений Лежандра, Чебышева, Чебышева — Эрмита.

В более поздних работах для решения этого уравнения Эйлер предложил другой метод, который может быть назван методом канонических преобразований («Интегральное исчисление», т. IV, 1794). В этом случае исходное уравнение записывается в виде

$$d^2y\,(1 - ax^2) - bx\,dx\,dy - cy\,dx^2 = 0,$$

где a, b, c — постоянные. Заметив, что при $c = 0$, а также при $a = b$ это уравнение всегда допускает интегрирование в квадратурах, Эйлер предлагает два варианта преобразований неизвестной функции, приводящих это уравнение к виду $d^2Y(1 - ax^2) - Bx\,dY - CYdx^2 = 0$. Отсюда и определяются классы уравнений этого вида, допускающих интегрирование в том же смысле.

Новый метод, основанный на применении интегралов, зависящих от параметров, был предложен Эйлером в работе «Построение дифференциального уравнения второго порядка...» (Constructio aequationis differentio-differentialis $Aydu^2 + (B + Cu)\,du\,dy + (D + Eu + Fu^2)\,d^2y = 0$. Novi Commentarii, (1760—1761) 1763). Идея заключалась в разыскании решений в виде определенных интегралов, у которых подынтегральная функция, или пределы интегрирования, зависит от одного или нескольких параметров[1]. Истоки этой идеи содержались в ранней работе Эйлера о модулярных уравнениях 1734—1735 гг.

Предметом изучения в работе 1763 г. явилось довольно общее линейное уравнение

$$Aydu^2 + (B + Cu)\,dudy + (D + Eu + Fu^2)\,d^2y = 0. \qquad (1)$$

Решение строится в виде определенного интеграла, зависящего от параметра, обозначаемого u. Пределы интегрирования, как почти всюду у Эйлера, у знака интеграла не ставятся, их значения указываются дополнительно. В данном случае нахождение этих пределов представляет, по сути дела, основную задачу. Уравнение представляет интерес в современных вопросах математической функции, так как известное уравнение, определяющее полиномы Якоби, является его частным случаем. Несколько подробнее об этом говорится ниже.

Сначала Эйлер, желая как бы подчеркнуть общность уравнения (1), с помощью подстановки $y = e^{\int z\,du}$ сводит его к уравнению первого порядка

$$dz + \frac{(B - Cu)\,z\,du}{D + Eu + Fu^2} + z^2\,du\,\frac{A\,du}{D + Eu + Fu^2} = 0. \qquad (2)$$

При этом он отмечает, что уравнение Риккати является лишь частным случаем полученного уравнения (2). Однако все дальнейшее исследование ведется для первоначального уравнения (1).

Неизвестная функция ищется в виде интеграла (повторяем — определенного)

$$y = \int P(x)\,(u + x)^n\,dx,$$

---

[1] Отметим, что этот же метод Эйлер применял и для некоторых уравнений в конечных разностях.

при этом относительно пределов интегрирования, которые мы обозначим через a и b, Эйлер разъясняет, что после интегрирования x должен быть заменен численными значениями, а при самом интегрировании u рассматривается как постоянное. Немного ниже подчеркивается, что эти пределы не должны зависеть от u. Определение этих «численных значений» (т. е. пределов интеграла a, b) и нахождение функции $P(x)$ и является основным содержанием работы.

Пользуясь своей формулой дифференцирования неопределенного интеграла по параметру и учитывая, что пределы интеграла не зависят от u, Эйлер после подстановки в (1) результатов дифференцирования:

$$dy = n\,du \int P\,(u+x)^{n-1}\,dx, \quad d^2y = n\,(n-1)\,du^2x \int P\,dx\,(u+x)^{n-2},$$

получает (мы сохраняем форму записи оригинального текста)

$$A \int P\,dx\,(u+x)^n + n\,(B+Cu) \int P\,dx\,(u+x)^{n-1} + \\ + n\,(n-1)\,(D+Eu+Fu^2) \int (u+x)^{n-2}P\,dx = 0. \qquad (3)$$

Только теперь становится ясным сам метод Эйлера: если бы, говорит он, в результате интегрирования в левой части (до подстановки пределов интеграла) мы получили выражение $R\,(x)\,(u+x)^{n-1}$ при некоторых $R\,(x)$ и n, то при соответствующих значениях x (т. е. при x, равных корням уравнения $R\,(x)=0$) результат подстановки был бы равен нулю и мы действительно получили бы решение.

Итак, предполагается, что левая часть (3) представляется в виде $R\,(x)\,(u+x)^{n-1}$ для некоторых $R = R\,(x)$ и постоянном n. Далее эта левая часть преобразуется таким образом:

$$\int P\,(u+x)^{n-2}\,[A\,(u+x)^2 + n\,(B+Cu)\,(u+x) + n\,(n-1)\,(D+Eu+Fu^2)]\,dx = \\ = \int P\,(u+x)^{n-2}\,\{[A+nC+n\,(n-1)\,F]\,u^2 + \\ + [2Ax+nCx+nB+n\,(n-1)\,E]\,u + [Ax^2+nBx+n\,(n-1)\,D]\}\,dx. \qquad (4)$$

В силу сделанного предположения подынтегральное выражение должно быть равно дифференциалу

$$d\,[R\,(x)\,(u+x)^{n-1}] = (u-x)^{n-2}\,[u\,dR + x\,dR + (n-1)\,R\,dx]. \qquad (5)$$

Сравнение коэффициентов при одинаковых степенях приводит поэтому к равенствам:

$$A + nC + n\,(n-1)\,F = 0, \qquad (6_1)$$

$$dR = (2A+nC)\,Pxdx + n\,(B+(n-1)\,E)\,Pdx, \qquad (6_2)$$

$$xdR + (n-1)\,Rdx = APx^2dx + nBPxdx + n\,(n-1)\,DPdx. \qquad (6_3)$$

Подстановка dR из (6_2) в (6_3) дает

$$(n-1)\,R = (A+nC)\,Px^2 - n\,(n-1)\,EPx + n\,(n-1)\,DP.$$

Замена из (6_1)

$$-(A+nC) = n\,(n-1)\,F$$

дает далее

$$R = nP\,(Fx^2 - Ex + D). \qquad (7)$$

Из этого же равенства (7) определяется и dR: если подставить в (6_2) вместо $2A + nC$ выражение $-2n\,(n-1)\,F - nC$, то

$$dR = n\,Pdx\,[-\,(C + 2\ \ (n-1)\,F)\,x + B\,(n-1)\,E]. \qquad (8)$$

Из (7) и (8) следует

$$\frac{dR}{R} = \frac{-\,(C + 2\,(n-1)\,F)\,x + B + (n-1)\,E}{Fx^2 - Ex + D}\,dx. \qquad (9)$$

Для показателя n из (6_1) в свою очередь имеем:

$$n = \frac{F - C \pm \sqrt{(F-C)^2 - 4AF}}{2F}. \qquad (10)$$

Поэтому (9) и (10) определяют функцию $R\,(x)$. Связь между $P\,(x)$ и $R\,(x)$ очевидна в силу соотношения (7), откуда

$$P\,dx = \frac{R\,dx}{n\,(Fx^2 - Ex + D)}. \qquad (11)$$

Приведем дальнейшие построения Эйлера и его исследования некоторых частных случаев. Если записать (9) в виде

$$\frac{dR}{R} = \frac{[-\,(n-1)\,2xF + (n-1)\,E]\,dx - Cx\,dx + B\,dx}{Fx^2 - Ex + D},$$

то

$$\ln R = -\,(n-1)\ln(Fx^2 - Ex + D) - \int \frac{Cx\,dx - B\,dx}{Fx^2 - Ex + D};$$

правую часть этого равенства Эйлер представляет (без пояснений) таким образом:

$$-\left(n - 1 + \frac{G}{2F}\right)\ln\,[Fx^2 - Ex + D] + \left(B - \frac{CE}{2F}\right)\int \frac{dx}{Fx^2 - Ex + D},$$

Для доказательства достаточно убедиться в выполнении равенства

$$-\frac{C}{2F}\ln\,[Fx^2 - Ex + D] - \frac{CE}{2F}\int \frac{dx}{Fx^2 - Ex + D} = -\int \frac{Cx\,dx}{Fx^2 - Ex + D},$$

которое становится очевидным, если объединить интегралы левой и правой частей. Итак, $\ln R$ представляется в виде

$$\ln R = -\left(n - 1 + \frac{C}{2F}\right)\ln\,[Fx^2 - Ex + D] + \left(B - \frac{CE}{2F}\right)\int \frac{dx}{Fx^2 - Ex + D}.$$

При последнем интегрировании надлежит учесть корни трехчлена $Fx^2 - Ex + D$. При этом, замечает Эйлер, следует, конечно, предполагать, что $F \neq 0$.

Далее Эйлер полностью исследует простейший случай, когда $B - \frac{CE}{2F} = 0$, т. е. исходное уравнение задано так:

$$Ay + \frac{C}{2F}\,(E + 2u)\,\frac{dy}{du} + (D + Eu + Fu^2)\,\frac{d^2y}{du^2} = 0.$$

Для нужных величин получаются следующие равенства:

$$n = \frac{F - C \pm \sqrt{(F - C)^2 - 4AF}}{2F}, \qquad R = (D - Ex + Fx^2)^{-n+1-\frac{C}{2F}}, \qquad (12)$$

$$P = \frac{1}{n}(D - Ex + Fx^2)^{-n-\frac{C}{2F}} \qquad (13)$$

и, следовательно,

$$y = \int P(u + x)^n\,dx = \frac{1}{n}\int \frac{dx\,(u + x)^n}{(D - Ex + Fx^2)^{n+\frac{C}{2F}}}. \qquad (14)$$

Этот интеграл, говорит Эйлер, должен быть взят для таких пределов x, при которых количество $(u + x)^{n-1}(D - Ex + Fx^2)^{-n+1-\frac{C}{2F}}$ обращается в нуль. Следовательно, если только трехчлен $D - Ex + Fx^2$ имеет два действительных корня, определяются оба возможные пределы интегрирования, при этом необходимо, чтобы показатель $-n + 1 - \frac{C}{2F}$, который равен $\frac{F - C \pm \sqrt{(F - C)^2 - 4AF}}{2F}$, был положительным.

Сделаем теперь замечание о значении уравнения (1) в современной теории уравнений второго порядка. Пусть α и β — произвольные действительные числа (как покажет дальнейшее, единственное ограничение для них состоит в том, что они больше -1). Предположив, что коэффициенты в (1) имеют значения: $D = -1$, $E = 0$, $F = 1$, $B = \beta - \alpha$, $C = -(\alpha + \beta + 2)$ и $A = (\alpha + \beta + k + 1)k$, замечаем. что уравнение (1) будет уравнением Якоби

$$(1 - u^2)\,d^2y + [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)\,u]\,dudy + [\alpha + \beta + k + 1]kydu^2 = 0. \qquad (15)$$

Если же в уравнении положить $\alpha = \beta = n$, а k заменить на $m - n$, то отсюда, в свою очередь, возникает уравнение, имеющее существенное значение в теории сферических функций:

$$(1 - u^2)\,d^2y - 2(n + 1)\,ududy + (m - n)(2n + m - n + 1)\,ydu^2 = 0$$

или

$$(1 - u^2)\frac{d^2y}{du^2} - 2(n + 1)\,u\frac{dy}{du} + (m(m + 1) - n(n + 1))\,y = 0. \qquad (16)$$

Этому уравнению удовлетворяют производные n-го порядка полиномов Лежандра порядка m $P_m^{(n)}(u)$.

Нетрудно заметить, что в рассмотренном Эйлером частном случае, когда

$$B - \frac{CE}{2F} = 0, \qquad (17)$$

из общего уравнения Якоби возникает уравнение, определяющее функции Лежандра $P_m^{(n)}(u)$ n-го порядка. Действительно, так как $E = 0$, то

соотношение (17) сводится к равенству $B = 0$ или $\beta - \alpha = 0$. На этом пути возникает возможность интегрального представления решения уравнения (15) и более общего уравнения (16), когда соотношение (17) может и не иметь места.

Приближенные методы

Развитие методов приближенного анализа — одна из важных задач современной математики. Применение средств современной вычислительной техники не может не привести к известной переоценке прежних вычислительных методов и открывает новые возможности их усовершенствования. В виде примера можно указать на алгоритм непрерывных дробей. удобный для его реализации в современной вычислительной технике.

В XVIII в. создавались основы многих методов, применяемых и в настоящее время. Выше было указано, что одной из основных областей математического естествознания, требовавшей быстрейшего развития методов приближенного решения дифференциальных уравнений, явилась небесная механика. В работах Эйлера по небесной механике получает дальнейшее развитие метод бесконечных рядов. При этом наряду с разложениями по степеням приращения независимого переменного Эйлер использовал разложения по степеням малого параметра. Заметим, что применение разложения по степеням малого параметра имеется лишь в его работах по небесной механике.

Наряду с применением степенных рядов Эйлер для приближенного решения дифференциальных уравнений использовал и тригонометрические ряды. Этот метод стимулировался задачами теоретической астрономии и математической физики. К последней области относится, в частности, предложенный Эйлером метод приближенного нахождения первых корней цилиндрической функции нулевого порядка первого рода.

Весьма велика заслуга Эйлера в создании одного из самых общих методов приближенного интегрирования. Основной результат содержится в первом томе «Интегрального исчисления» (1768). Задача ставится сразу же в большой общности: для заданного уравнения $dy/dx = V$, где V — некоторая функция x и y, найти приближенно полный интеграл. Возникает вопрос: почему речь идет о полном, а не о частном интеграле? Последующее замечание Эйлера показывает, что имеется в виду, конечно, задача с начальными условиями. Действительно, то, что теперь ищется полный, а не частный интеграл, указывает Эйлер, следует понимать в том смысле, что переменная y должна принимать некоторое заданное значение $y = b$, если другая переменная x принимает определенное значение $x = a$. Эйлер отдает дань традиционной постановке задачи решения уравнения как задачи нахождения полного интеграла. Основание для такой постановки вопроса он видит в том, что начальные данные задаются в общей форме, а не в виде конкретных численных значений, как было в задачах, рассмотренных ранее.

Ставя вопрос о нахождении общего метода, дающего приближенное решение задачи с произвольными начальными условиями, Эйлер предвосхитил постановку Коши задачи с начальными данными как одной из центральных в теории дифференциальных уравнений.

Решение дается «методом ломаных». Однако вопрос трактуется при этом чисто аналитически. Не довольствуясь изложением метода ломаных, Эйлер стремится сразу же его усовершенствовать с тем, чтобы результат был

ближе к истинному. Решение этой задачи имело принципиальное значение: здесь Эйлер фактически предложил второй метод, а именно тот, с помощью которого Коши впервые доказал существование решения дифференциального уравнения с аналитической правой частью. Чтобы учесть изменение правой части уравнения на малом интервале $x - a$, Эйлер поступает следующим образом: написав разложение в ряд Тейлора неизвестного решения, он показывает, как должны быть вычислены коэффициенты этого ряда, записанного в следующей своеобразной форме:

$$y = b + \frac{(x-a)\,db}{da} + \frac{(x-a)^2 d^2b}{1\cdot 2\cdot da^2} + \ldots$$

Коэффициенты вычисляются при помощи последовательного дифференцирования данного уравнения. В несколько измененной записи эйлеровские формулы выглядят так:

$$\frac{db}{da} = V,$$

$$\frac{d^2b}{da^2} = \frac{\partial V}{\partial x} + V\frac{\partial V}{\partial y},$$

$$\frac{d^3b}{da^3} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + 2V\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + V^2\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial V}{\partial y}\left[\frac{\partial V}{\partial x} + V\frac{\partial V}{\partial y}\right],$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Правые части этих равенств должны быть вычислены, конечно, при $x = a$, $y = b$.

Относительно самого разложения y Эйлер отмечает, что при x, близком к a, ряд сходится очень быстро и поэтому достаточно хорошо представляет $y(x)$. Этот метод он предлагает для того, чтобы точнее определить значение $y = b'$ в точке $a' = a + \omega$ и таким же образом продолжать процесс дальше, отправляясь от уже известных $x = a'$, $y' = b'$. Вполне очевидно, что Эйлер для малой окрестности начальной точки a рассматривал именно тот ряд, сходимость которого при определенных условиях была строго доказана Коши.

Во втором томе «Интегрального исчисления» (1769) Эйлер распространяет свой метод ломаных на уравнение второго порядка, которое записывается в виде системы двух уравнений первого порядка:

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{dp}{dx} = V(x, y, p).$$

При этом он указывает на изменение постановки задачи с начальными условиями: помимо требования $y(a) = b$ должно быть поставлено еще условие $p|_{x=a} = c$. Изложение фактически содержит схему применения метода ломаных к любой системе вида:

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2), \quad \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2).$$

Свой метод Эйлер иллюстрирует на примере уравнений первого и второго порядков, вновь затрагивая вопрос об условиях применимости метода. Рассмотрев уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dy}{dx} + \frac{f^2y}{x^4} = 0, \quad f = \text{const},$$

и получив для него полный интеграл

$$y = A \sin\left(\frac{f}{x} + \alpha\right),$$

где A и α — произвольные постоянные, он отмечает: когда x изменяется от 0 до некоторой малой величины ω, угол $\frac{f}{x} + \alpha$ изменяется от бесконечно большого значения до конечного, а его синус бесконечно много раз колеблется между $+1$ и -1. В качестве вывода указывается, что когда встречаются с интервалами, где решение ведет себя подобным образом, то неудивительно, что метод, который должен дать приближенное решение, теряет силу: ведь принцип, на котором он основан, предполагает, что изменения на малых интервалах должны быть также весьма малыми; и наоборот, если подобные интервалы отсутствуют, то метод всегда можно использовать.

Метод малого параметра

Применение Эйлером разложения по степеням малого параметра мы охарактеризуем одним примером из небесной механики. Самим возникновением этот метод обязан задачам, в которых эксцентриситеты планетных орбит, наклоны плоскостей орбит к плоскости эклиптики и силы тяготения соседних планет представляют собою малые величины.

В работе «Новый метод определения движения планет» (Nova methodus motum planetarum determinandi. Acta, (1778) 1781) Эйлер, выбирая наиболее удобную систему прямоугольных координат с началом в центре Солнца, при исследовании планетарного движения приходит после упрощений к следующей системе:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2n\frac{dy}{dt} - n^2(1 + x^2) = \frac{-n^2(1+x)}{[(1+x)^2 + y^2]^{3/2}},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2n\frac{dx}{dt} - n^2 y = \frac{-n^2 y}{[(1+x)^2 + y^2]^{3/2}},$$

где x, y — декартовы координаты планеты в момент t, $n = \frac{1}{a\sqrt{a}}$ и a — среднее расстояние планеты от Солнца. В выбранной системе координат y^2 весьма мало́ по сравнению с $1 + x^2$. Приближенное интегрирование проводится следующим образом. Сначала, учитывая малость y^2, Эйлер разлагает в ряд общий множитель правых частей уравнений

$$\frac{1}{[(1+x)^2 + y^2]^{3/2}} = \frac{1}{(1+x)^3} - \frac{3}{2}\frac{y^2}{(1+x)^5} + \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}\frac{y^7}{(1+x)^7} - \ldots$$

Затем проводится разложение членов $\frac{1}{(1+x^2)}, \frac{1}{(1+x)}, \ldots$ После замены $nt = \xi$ Эйлер сохраняет в правых частях преобразованных уравнений члены до шестого порядка. Приближенное решение весьма сложной нелинейной системы уравнений Эйлер строит в виде разложений неизвестных функций x и y по степеням малого параметра, за который в данном случае берется эксцентриситет орбиты ε (в самих уравнениях системы ε отсутствует):

$$x = \varepsilon P + \varepsilon^2 Q + \varepsilon^3 R + \ldots$$
$$y = \varepsilon p + \varepsilon^2 q + \varepsilon^3 r + \ldots,$$

где P, Q,..., p, q,... — неизвестные функции аргумента ξ, подлежащие определению. Определение их проводится соответственно задаваемой степени точности, т. е. максимальной степени ε, участвующей в уравнениях. Сохраняя члены лишь первого и второго порядков, Эйлер при помощи метода неопределенных коэффициентов получает линейную систему:

$$\frac{d^2P}{d\xi^2} - \frac{2dp}{d\xi} = 3P,$$
$$\frac{d^2p}{d\xi^2} + \frac{2dP}{d\xi} = 0,$$
$$\frac{\partial^2Q}{\partial\xi^2} - \frac{2dq}{d\xi} = 3Q - 3P^2 + \frac{3}{2}\,p^2,$$
$$\frac{d^2q}{d\xi^2} + \frac{2dQ}{d\xi} = 3Pp.$$

Первые два уравнения образуют простую самостоятельную систему. Аналогичные системы последовательно выписываются при учете членов до шестого порядка включительно. Не ограничиваясь этим, Эйлер дает затем алгоритмический прием для последовательного решения всех этих систем.

В ряде работ по небесной механике Эйлер для приближенного решения уравнений применяет тригонометрические ряды как для разложения правых частей уравнений, так и для отыскания приближенных решений нелинейных систем в виде неполных тригонометрических рядов. Отметим, что именно эти исследования послужили источником теоретических работ Эйлера об определении коэффициентов разложения функций в тригонометрические ряды (см. стр. 316).

Метод Лапласа
(модификация метода малого параметра)

Мы не раз отмечали, что разработка методов приближенного интегрирования настоятельно диктовалась небесной механикой. В работах Лапласа это проявилось особенно отчетливо. Первый набросок своего метода приближенного интегрирования дифференциальных уравнений, основанного на вариации произвольных постоянных, входящих в приближенные интегралы, он дал в «Мемуаре о частных решениях дифференциальных уравнений и о вековых неравенствах планет» (Mémoire sur les solutions particulières des équations différentielles et sur les inégalités séculaires de planètes. Mém. Ac. Paris, (1772) 1775), а несколько более полное изложение — в «Исследованиях об интегральном исчислении и системе мира» (Recherches sur le calcul intégral et sur le système du monde. Mém. Ac. Paris, (1772) 1776). Более развернутое изложение того же метода содержится в «Мемуаре о приближенном интегрировании дифференциальных уравнений» (Mémoire sur l'intégration des équations différentielles par approximation. Mém. Ac. Paris, (1777) 1780).

Во второй из указанных работ метод изложен применительно к уравнению $\frac{d^2y}{dt^2} + y = \alpha y \cos 2t$, где α — весьма малое число. Идея вариации произвольных постоянных в приближенных интегралах здесь выявляется более отчетливо, чем в третьей из указанных работ. Сначала находится общий интеграл уравнения $\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0$, т. е. $y = p \sin t + q \cos t$. Про-

извольные постоянные, отмечает Лаплас, определяются через значения y и dy/dt при $t = 0$. Найденное выражение y дает решение исходного уравнения при $\alpha = 0$. Далее с помощью «естественной» подстановки $y = p \sin t + q \cos t + \alpha z$, широко используемой и в современных методах, вопрос, если пренебречь членами порядка α^2, сводится к решению уравнения

$$\frac{d^2z}{dt^2} + z = \frac{p}{2} \sin 3t - \frac{p}{2} \sin t + \frac{q}{2} \cos 3t + \frac{q}{2} \cos t.$$

Интегрируя последнее уравнение и учитывая найденное выше значение y, Лаплас получает первое приближение в виде

$$y = \left(p + \frac{\alpha}{4} qt\right) \sin t + \left(q + \frac{\alpha}{4} pt\right) \cos t - \frac{\alpha p}{16} \sin 3t - \frac{\alpha q}{16} \cos 3t. \quad (18)$$

Следующий шаг состоит в определении приближенного значения y при $t = T + t_1$, где $T = \text{const}$. Исходное уравнение получает вид $\frac{d^2y}{dt^2} + y = \alpha y \cos (2T + 2t_1)$. На основании предыдущего сразу же можно написать приближенное значение интеграла

$$y = \left(p_1 + \frac{\alpha}{4} q_1 t_1\right) \sin (T + t_1) + \left(q_1 + \frac{\alpha}{4} p_1 t_1\right) \cos (T + t_1) -$$
$$- \frac{\alpha^2}{16} p_1 \sin (3T + 3t_1) - \frac{\alpha}{16} q_1 \cos (3T + 3t_1), \quad (19)$$

где p_1 и q_1 — два новых произвольных постоянных, которые могут быть определены через значения y и dy/dt при $t_1 = 0$. Таким образом произвольные постоянные изменились. Теперь возникает задача: установить связи между p, q и p_1, q_1. Из (18) и (19) при $\alpha = 0$ сразу следуют равенства $p = p_1$, $q = q_1$. Полагая $p_1 = p + \delta p$, $q_1 = q + \delta q$, Лаплас стремится получить выражения для δp и δq через параметр α. Вычитание уравнения (18) из уравнения (19), где t_1 заменено на $t - T$, дает основное соотношение

$$\left(\delta p - \frac{\alpha}{4} Tq\right) \sin t + \left(\delta q - \frac{\alpha}{4} Tp\right) \cos t = 0.$$

В силу того, что $T = \text{const}$, $\delta p = \frac{\alpha}{4} Tq$, $\delta q = \frac{\alpha}{4} Tp$. Подстановка $\frac{\alpha}{4} T = x$ и разложений

$$p_1 = p + \delta p = p + x \frac{dp}{dx} + \frac{x^2}{2!} \frac{d^2p}{dx^2} + \ldots,$$
$$q_1 = q + \delta q = q + x \frac{dq}{dx} + \frac{x^2}{2!} \frac{d^2q}{dx^2} + \ldots$$

приводит поэтому к равенствам $dp/dx = q$, $dq/dx = p$. При этом Лаплас пренебрегает величинами порядка α^2. Отсюда при учете соотношений для δp и δq легко определяются p_1 и q_1. Подстановка этих значений в (19) и дает выражение для y при $t = T$

$$y = f^{\frac{\alpha}{4} T} \left(\sin T + \cos T - \frac{\alpha}{16} \sin 3T - \frac{\alpha}{16} \cos 3T\right) +$$
$$+ f_1 e^{-\frac{\alpha}{4} T} \left(\sin T - \cos T - \frac{\alpha}{16} \sin 3T + \frac{\alpha}{16} \cos 3T\right),$$

где f и f_1 — произвольные постоянные. В заключение подчеркивается, что приближенное значение найдено, пренебрегая членами порядка α^2.

В третьей работе 1777 г. Лаплас развивает свой метод для более сложных уравнений, в частности для нелинейных второго порядка. Напомнив о своей работе 1772 г., он излагает общую схему приближенного решения уравнения

$$\frac{d^2y}{dt^2} + h^2 y + T(\cos kt, \sin kt) + Y\left(\alpha,\ y,\ \sin kt,\ \cos kt,\ \frac{dy}{dt}\right) = 0.$$

Исходной является замена $y = z + \alpha z' + \alpha^2 z'' + \dots$ Подстановка в уравнение приводит (в предположении разложимости функций T и Y в степенные ряды по их аргументам) к уравнениям:

$$\frac{d^2z}{dt^2} + h^2 z + T = 0,$$
$$\frac{d^2z'}{dt^2} + h^2 z' + T' = 0,$$
$$\dots\dots\dots$$

где, как сказано, T есть функция синуса и косинуса kt; T', кроме того, зависит от z и z' и т. д. Для приближения с точностью до членов порядка α^n имеется $n + 1$ уравнений. Их можно интегрировать последовательно «обычными методами», но лучше использовать, говорит Лаплас, прием вариации произвольного постоянного. Лаплас указывает принципиальную возможность перенесения этого метода на системы вида:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + h^2 y + T + \alpha Y = 0,$$
$$\frac{d^2y'}{dt^2} + h^2 y' + T' + \alpha Y' = 0,$$
$$\frac{d^2y''}{dt^2} + h^2 y'' + T'' + \alpha Y'' = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

где T, T', T'' — целые рациональные функции синусов и косинусов аргумента, пропорционального t; Y, Y', Y'',..., зависят, кроме того, от α, y, y', y'',... и их производных.

Однако более подробно Лаплас свою модификацию метода малого параметра поясняет на примере значительно более простого уравнения

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y + \alpha m y \cos 2t = 0.$$

Приближение теперь ищется с точностью до членов второго порядка малости включительно. С этой целью используется замена $y = z + \alpha z' + \alpha^2 z''$, приводящая путем приравнивания членов при одинаковых степенях α к системе уравнений:

$$\frac{d^2z}{dt^2} + z = 0,$$
$$\frac{d^2z'}{dt^2} + z' + mz\cos 2t = 0,$$
$$\frac{d^2z''}{dt^2} + z'' + mz'\cos 2t = 0.$$

Подстановка общего интеграла первого из них $z = p \sin t + q \cos t$ во второе дает уравнение

$$\frac{d^2z'}{dt^2} + z' - \frac{mp}{2}\sin t + \frac{mq}{2}\cos t + \frac{mp}{2}\sin 3t + \frac{mq}{2}\cos 3t = 0.$$

Сначала ищется частное решение неоднородного уравнения, содержащего лишь члены с $\sin t$ и $\cos t$. Молчаливо учитывая, что корни характеристического уравнения равны $\pm i$, Лаплас ищет решение для этого случая в виде $At \sin t + Bt \cos t$. Значения $A = -\frac{mq}{4}$ и $B = -\frac{mp}{4}$ находятся по методу неопределенных коэффициентов. Затем учитываются члены, содержащие $\sin 3t$ и $\cos 3t$. Таким образом для z'' возникает уравнение

$$\frac{d^2z''}{dt^2} + z'' + \left(\frac{m^2q}{8}t + \frac{m^2p}{32}\right)\sin t - \left(\frac{m^2p}{8}t - \frac{m^2q}{32}\right)\cos t - \frac{m^2q}{8}t\sin 3t -$$
$$- \frac{m^2p}{8}t\cos 3t + \frac{m^2}{32}\sin 5t + \frac{m^2q}{32}\cos 5t = 0,$$

которое решается с помощью того же приема.

Истоки теории особых решений

Первые результаты, полученные в учении об особых решениях дифференциальных уравнений, представляют значительный интерес, как и предыстория проблемы единственности решения задачи с начальными условиями. К такому новому типу решений прежде других пришел в «Методе приращений» (1715) Б. Тейлор, применив к уравнению с разделяющимися переменными

$$4x^3 - 4x^2 = (1 + z^2)^2 \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 \qquad (20)$$

следующий своеобразный прием. Он привел его подстановками

$$x = \frac{1 + z^2}{y^2}, \qquad 1 + z^2 = v$$

к виду

$$y^2 - 2zyy' + vy'^2 = 1 \qquad (21)$$

и затем продифференцировал по z:

$$2y''(vy' - zy) = 0. \qquad (22)$$

Положив $y'' = 0$, он нашел, подставив $y' = a$ в (21), обычное решение, которое получается при интегрировании (20) после разделения переменных. Но, кроме того, Тейлор положил равным нулю второй множитель в (22) и, вводя $y' = zy/v$ в (21), получил еще $y^2 = v$ и $x = 1$ «некоторое особое решение (singularis quaedam solutio) задачи». Впрочем, этим результатом Тейлор и ограничился[1]. Двадцать лет спустя тот же метод дифференцирования применил к уравнению

$$y = (x + 1)\frac{dy}{dx} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

[1] Мы привели только схему выкладок Тейлора и притом в современной символике.

Клеро (Mém. Ac. Paris, (1734) 1736), который уже отметил различие между его особым решением (уравнением параболы) и общим решением (уравнением семейства прямых). Дифференциальные уравнения рассмотренного только что вида $y = xy' + Q(y')$ были названы затем по имени Клеро. Обобщением уравнения Клеро являются уравнения вида $y = xP(y') + Q(y')$, изучавшиеся Даламбером (Mém. Ac. Berlin, (1748) 1750 и Mém. Ac. Paris, (1769) 1772), а до того Я. Германом, который, однако, особых решений не заметил (см. стр. 371 и 377).

Особенно содержательны были исследования Эйлера. Они изложены во втором томе его «Механики» (1736), в мемуаре «Рассуждение о некоторых парадоксах интегрального исчисления» (Exposition de quelques paradoxes dans le calcul intégral. Mém. Ac. Berlin, (1756) 1758) и в первом томе «Интегрального исчисления» (1768). Мы ограничимся характеристикой отдельных результатов.

Решение одной из задач динамики точки приводит в «Механике» к задаче с начальным условием $u(0) = 0$ для уравнения

$$(k^2 + 1)\,dx - k^2du = \pm\frac{\sqrt{\alpha^2x(1+k^2) - k^2u}}{\sqrt{u}}\,du,$$

где k — известное постоянное, α — параметр, принимающий положительные значения. Поскольку

$$\frac{du}{dx} = \frac{(k^2+1)\sqrt{u}}{\pm\sqrt{\alpha^2x(1-k^2) - k^2u} + k^2\sqrt{u}},$$

ясно, что точка (0, 0), по современному определению, особая. Характер особой точки зависит от значения параметра α. В том случае, когда $\alpha < 1$, Эйлер получает решение в виде

$$C\left(\pm\sqrt{\alpha^2(k^2+1)x - k^2u} + A\sqrt{u}\right)^{-\pi} = \left(\pm\sqrt{\alpha^2(k^2+1)x - k^2u} + B\sqrt{u}\right)^{\rho},$$

где все числа A, B, π и ρ положительны. Это позволяет Эйлеру сделать заключение, что начальное условие $u(0) = 0$ удовлетворяется при любом значении произвольного постоянного C. Установив наличие «бесконечного количества» решений, Эйлер указывает необходимое дополнительное уточнение постановки самой механической задачи для того, чтобы решение определялось однозначно. Особый интерес представляет детальное исследование Эйлером случая $\alpha = 1$, приводящего к следующим двум решениям той же задачи с начальным условием:

$$u_1 = x, \qquad u_2 = \frac{k^2+1}{k^2}x.$$

Эйлер отмечает, что последнее не получается из «интегрального уравнения» (термин «полный интеграл» был введен Эйлером позднее). Действительно, при $\alpha = 1$ возникает уравнение

$$\frac{(k^2+1)\,dx - k^2du}{\sqrt{(k^2+1)x - k^2u}} = \frac{\pm du}{\sqrt{u}},$$

которое приводит к полному (т. е. общему) интегралу

$$\sqrt{(k^2+1)x - k^2u} = \pm\sqrt{u} + C,$$

дающему при начальном условии $u(0) = 0$ лишь частное решение $u_1 = x$. Любопытно отметить, что к решению

$$u_2 = \frac{k^2+1}{k}x$$

Эйлер приходит обходным, громоздким и не строгим путем: он находит сначала решение, соответствующее значению $\alpha > 1$, а затем полагает в этом решении $\alpha = 1$. То, что функция u_2 есть решение уравнения, становится очевидным, если последнее переписать в форме

$$(k^2+1)\,dx - k^2du = \sqrt{(k^2+1)\,x - k^2u}\ \frac{du}{\sqrt{u}}.$$

Получив два решения задачи с начальным условием, Эйлер выясняет механический смысл того и другого решения. Решение u_2, как легко видеть, будет, согласно современному определению, особым. Полученный результат позволяет Эйлеру сделать некоторое обобщение и фактически дать один из способов нахождения особых решений. Предлагается рассмотреть уравнение $\frac{dt}{T(t)} = V du$, где $T(t)$ обращается в нуль при $t = 0$, V — заданная функция u. Наряду с интегралом $\int \frac{dt}{T} = \int V du$ этому уравнению удовлетворяет решение $t = 0$, которое не может быть найдено из полного интеграла.

Наличие дифференциальных уравнений, полные интегралы которых не исчерпывают всех решений этих уравнений, представлялось Эйлеру одним из парадоксов интегрального исчисления. Другим парадоксом он считал метод решения уравнений при помощи дифференцирования. Эти вопросы явились предметом работы, напечатанной в «Mémoires» Берлинской академии наук (см. стр. 400). Здесь используются задачи геометрического содержания, сводящиеся к уравнению Клеро. Эйлер находит все особые решения, однако он не выясняет их геометрический смысл и не отмечает, что они представляют огибающие однопараметрических семейств, образующих полные интегралы. Он не скрывает своего удивления, что полный интеграл не всегда оказывается «полным». Он говорит даже, что возможность подобных случаев противоречит самим принципам анализа: «если интегральное уравнение, найденное по точным правилам, не в состоянии охватить дифференциальное уравнение, то проблема допускает решения, которые совершенно не могут быть получены интегрированием, и, следовательно, приходят к несовершенному решению, что представляется, без сомнения, опрокидывающим обычные понятия интегрального исчисления»[1]. Эйлер стремится защитить анализ от упрека в несовершенстве, однако полностью сделать это ему не удается. Его попытки сводятся к стремлению разграничить частные и особые решения (по современным определениям). В понятие полного интеграла он включает лишь те решения, которые получаются именно в процессе интегрирования, т. е. при частных значениях произвольных постоянных. Ссылаясь на свою «Механику», он указывает, что там дано «надежное правило», при помощи которого можно найти решения иной природы, т. е. не получающиеся из «интегрального уравнения». Прежний результат формулируется теперь в несколько более общей форме. Пусть $P = P(x, y)$, $Q = Q(x, y)$, $V =$

[1] *L. Euler.* Opera omnia, series I, v. 22, p. 230.

$= V(x, y)$, $Z = Z(z)$ — заданные функции указанных аргументов, с помощью которых задано дифференциальное уравнение

$$Vdz = Z(Pdx + Qdy).$$

Если $z(x, y)$ найдено из уравнения $Z(z) = 0$, то $y = y(x)$, найденное из уравнения $z(x, y) = c$, $c = \text{const}$, очевидно, удовлетворяет исходному дифференциальному уравнению и не может быть, вообще говоря, получено из полного интеграла.

Дальнейшее развитие этот вопрос получает в первом томе «Интегрального исчисления». Здесь Эйлеру удается предложить первый сравнительно общий критерий различия частных и особых интегралов. Терминология несколько уточняется. Частными интегралами здесь называются только решения, возникающие из полного интеграла, любые другие решения именуются «величинами» или «конечными уравнениями, удовлетворяющими дифференциальному уравнению». Приведем постановку и решение задачи о критерии различия между частными интегралами и «величинами» указанного вида. Пусть в дифференциальном уравнении $dy = dx/Q$ функция Q обращается в нуль при $x = a$; записав уравнение в виде $Q = dx/dy$, заключаем, что величина $x = a$ удовлетворяет предложенному дифференциальному уравнению; однако отсюда еще не следует, что она является частным интегралом. Требуется определить, когда уравнение $x = a$ будет частным интегралом предложенного дифференциального уравнения. Для этого нужно, чтобы уравнение $x = a$ было заключено в полном интеграле при некотором определенном значении постоянной интегрирования. Если мы положим, что $P(x)$ — интеграл дифференциального выражения dx/Q, то полный интеграл будет $y = P(x) + C$. Уравнение $x = a$ может удовлетворить «интегральному уравнению» лишь в том случае, если для $x = a$ выполнено равенство $P = \infty$. В этом последнем случае замечаем, что если считать постоянную C бесконечно большой, то y останется неопределенным при $x = a$. Итак, только в случае, когда величина P при $x = a$ становится бесконечной, уравнение, выражающее y, можно считать частным интегралом; мы имеем, следовательно, искомый критерий: только в том случае, когда при $x = a$ функция Q обращается в нуль, а функция P — в бесконечность, величина $x = a$ будет частным интегралом. Все рассуждение проведено, конечно, в стиле математики XVIII в. Основным является, как мы видим, учет Эйлером того, что «при подстановке $x = a$ количество y остается неопределенным» [1].

Таким образом, вопрос полностью решается поведением, по современной терминологии, несобственного интеграла; при его расходимости интегральная кривая $x = a$ принадлежит общему интегралу, при сходимости — не принадлежит. Результат имеет очевидную связь с вопросом о единственности интегральной кривой, проходящей через произвольную точку (a, y_0) прямой $x = a$. Действительно, если $x = a$ не принадлежит полному интегралу, то через эту точку можно провести соответствующее частное решение. Поэтому не случайно критерий Эйлера совпадает с известным необходимым и достаточным условием единственности интегральной линии уравнения $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{Q(x)}$, проходящей через точку (a, y_0), если $Q(x)$ непрерывна при $x \neq a$ в окрестности $x = a$ и обращается в бесконеч-

[1] *Л. Эйлер.* Интегральное исчисление, т. I, стр. 306.

ность в самой точке $x = a$. Подчеркнем, однако, что в самом тексте вопрос о единственности решения Эйлером в явной форме не затрагивается.

Эти результаты Эйлера были направлены к разрешению «парадоксов» интегрального исчисления, о которых говорилось выше. Но Эйлеру, как он сам указывал, не удалось полностью разрешить эти парадоксы. Его внимание было направлено фактически на одну сторону вопроса: на разграничение частных и особых интегралов, — и ему не удалось найти истинную связь между полными и особыми интегралами.

«Частные интегралы» и «частные решения» у Лапласа

Немного позже теория особых решений получила некоторое продвижение в уже упомянутом «Мемуаре о частных решениях дифференциальных уравнений и о вековых неравенствах планет» Лапласа (см. стр. 396). Отметив, что впервые проблема успешно изучалась Эйлером, Лаплас указывает недостаток его результатов: изучались лишь конечные решения вида $y = X(x)$ для дифференциальных уравнений первого порядка. Сам Лаплас предлагает «метод, свободный от этих ограничений».

Интересно уже уточнение терминологии: решением дифференциального уравнения любого порядка Лаплас называет всякое конечное или дифференциальное выражение, которое удовлетворяет данному дифференциальному уравнению; частным интегралом он называет всякое решение, которое заключено в общем или полном интеграле, и, наконец, частным решением — всякое решение дифференциального уравнения, не заключающееся в общем (полном) интеграле.

Первая проблема такова: определить, будет ли данное решение уравнения $dy = p(x, y)\,dx$ заключено в общем интеграле, если этот интеграл неизвестен. Идея всей работы заключается в использовании самого дифференциального уравнения. Все построения проводятся в классе решений,

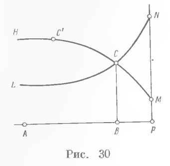


Рис. 30

раскладывающихся в степенные ряды. Допустим, что общий интеграл представлен уравнением $\varphi = 0$, а исследуемое решение дифференциального уравнения есть $\mu(x, y) = 0$. Рассуждения Лапласа интересны с точки зрения проблемы единственности интегральных кривых, проходящих через данную точку. Построим, говорит Лаплас, соответствующие уравнениям $\mu = 0$, $\varphi = 0$ кривые HCM, LCN (рис. 30), причем значение произвольного постоянного в общем интеграле определено так, что кривая LCN, принадлежащая общему интегралу $\varphi = 0$, проходит через точку C кривой HCM. Если уравнение $\mu = 0$ содержится в уравнении $\varphi = 0$,

то кривые LCM и HCM должны совпадать во всех их точках; если этого нет, то уравнение $\mu = 0$ есть частное решение.

Прежде чем рассмотреть дальнейшие аналитические рассуждения Лапласа, отметим, что геометрическая сторона вопроса ускользнула от его внимания. Действительно, даже в том случае, когда кривая HCM не принадлежит семейству $\varphi = 0$, она должна иметь в точке C общую касательную с LCN. Это обстоятельство не учтено на чертеже Лапласа. Отметим также, что точку C Лаплас неявно предполагает обыкновенной по современной терминологии, т. е. предполагается, что значение произвольного постоянного однозначно определяется заданием начальной точки.

Обозначая $AB = x$, $BP = \alpha$, $CB = y$, $PM = y'$, $PN = Y'$, $\delta y/\delta x$ — производную для функции, определяющей кривую HCM, и dy/dx — производную для кривой LCN, Лаплас пишет разложения этих функций в окрестности точки C:

$$y' = y + \alpha\frac{\delta y}{\delta x} + \frac{\alpha^2}{1\cdot 2}\frac{\delta^2 y}{\delta x^2} + \ldots,$$

$$Y' = y + \alpha\frac{dy}{dx} + \frac{\alpha^2}{1\cdot 2}\frac{d^2 y}{dx^2} + \ldots$$

Для совпадения кривых необходимо, чтобы $y' = Y'$ при любом α, а это возможно только при выполнении в точке C равенств $\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{dy}{dx}$, $\frac{\delta^2 y}{\delta x^2} = \frac{d^2 y}{dx^2}$ и т. д. Но так как C — любая точка, то эти равенства должны выполняться для любой точки C'. В заключение Лаплас замечает, что выполнение этих равенств можно проверить, не зная общего интеграла. Действительно значения $\frac{\delta y}{\delta x}$, $\frac{\delta^2 y}{\delta x^2}$, ..., которые обозначены соответственно ν, ν', ..., вычисляются по уравнению $\mu = 0$. Значения же $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \ldots$, обозначаемые p, p', ..., вычисляются путем дифференцирования самого уравнения $\frac{dy}{dx} = p(x, y)$. Таким образом, предыдущие условия в дальнейшем записываются так: $\nu - p = 0$, $\nu' - p' = 0$ и т. д. Уравнение $\nu - p = 0$ выполнено всегда в силу предположения, что $\mu = 0$ удовлетворяет уравнению. Выполнение же остальных уравнений зависит от того, будет ли $\mu = 0$ частным решением или нет.

Применяя свой метод к уравнению $\frac{dy}{dx} = y^n q(x)$, допускающему при $n > 0$ решение $y = 0$, Лаплас приходит к выводу, что при $n \geqslant 1$ уравнение будет частным интегралом, при $0 < n < 1$ — частным решением. Этот результат был найден Эйлером с помощью определения сходимости соответствующего несобственного интеграла (см. стр. 402). Ту же идею Лаплас развивал для уравнений $d^2y = pdx^2$, где $p = p(x, y, y')$ и для частных видов уравнений высших порядков.

Теория особых решений Лагранжа

Следующий шаг был сделан Лагранжем. Применение излюбленной идеи — вариации произвольных постоянных — позволило ему найти правильный подход к разрешению «парадоксов» интегрального исчисления.

Основные результаты Лагранжа в этой области были опубликованы в статье «О частных интегралах дифференциальных уравнений» (Sur les

intégrales particulières des équations différentielles. Nouv. Mém. Ac. Berlin, (1774) 1776). Изложение начинается с краткого обзора результатов предшественников. Отмечая результаты Клеро, Эйлера, Лапласа и некоторых других ученых, Лагранж приходит к выводу, что до сих пор не найден метод нахождения решений, не получающихся из полного интеграла при частных значениях произвольной постоянной. Обзор показывает, что не установилась даже сама терминология. Действительно, характеризуя исследования Эйлера, Лагранж использует его терминологию и говорит о «конечных уравнениях, удовлетворяющих дифференциальному уравнению», а описывая результаты Лапласа, он пользуется на той же странице термином «частное решение, не получающееся из полного интеграла»[1].

С полным основанием в заключение обзора Лагранж писал, что предлагает новую теорию. Постановка основного вопроса такова: будем изучать частные интегралы, которые теряются при обычном методе интегрирования. Для пояснения прежде всего используется один из примеров Эйлера, именно: дифференциальное уравнение $xdx+ ydy = dy\sqrt{x^2 + y^2 - b^2}$, имеющее полный интеграл $x^2 - 2ay - a^2 - b^2 = 0$, где a — произвольное постоянное, а также решение $x^2 + y^2 - b^2 = 0$, которое есть окружность и, следовательно, не содержится в полном интеграле, представляющем семейство парабол.

Вслед за этим вопрос рассматривается в общей форме, что в исследованиях Эйлера отсутствует: пусть дано дифференциальное уравнение и $V(x, y, a) = 0$ — его полный интеграл. Сначала выясняется, каким образом от полного интеграла можно вернуться к данному дифференциальному уравнению. Решение достигается, как известно, путем дифференцирования полным образом по x равенства $V = 0$ и исключения параметра a из результата этого дифференцирования $\frac{dy}{dx} = p(x, y, a)$ и уравнения $V = 0$. Для пояснения используется тот же пример Эйлера.

Основная новая идея крайне проста: нельзя ли тем же путем прийти от полного интеграла к исходному уравнению при переменном a? Естественным образом возникает вопрос об условиях, которым для этого должна удовлетворять a как функция x. Соответствующие рассуждения Лагранжа вошли во все учебники по дифференциальным уравнениям. В случае переменного a, говорит он, вместо равенства $\frac{dy}{dx} = p(x, y, a)$ мы имели бы $dy = pdx + qdx$ и, чтобы оно сводилось к предыдущему, должно выполняться равенство $q = 0$. Но из выражения dy следует, что $q = \partial y/\partial a$ (у Лагранжа для частных производных специальных обозначений нет). Итак, вопрос решен: функции $a = a(x)$ определяются из уравнений $q = q(x, y, a) = 0$, $q = \partial y/\partial a$; y определяется, как неявная функция, выражением полного интеграла $V(x, y, a) = 0$.

К уравнению вида $y = xP(y') + Q(y')$, которое неоднократно уже нам встречалось и без основания иногда еще называется «уравнением Лагранжа», применяется и метод дифференцирования самого уравнения.

Для дальнейшего развития теории дифференциальных уравнений оказалось весьма существенным выяснение геометрической стороны вопроса

---

[1] Впоследствии благодаря «Лекциям об исчислении функций» (1801) Лагранжа укоренился термин «особое решение», которое Лагранж называл «особое первообразное уравнение» — équation primitive singulière. Впервые такое выражение, как говорилось, употребил еще Б. Тейлор (стр. 399).

о частных решениях указанного вида. Этому Лагранж посвятил специальный раздел статьи. Прежде всего он замечает, что кривая, которая касается всех кривых, определяемых полным интегралом, удовлетворяет дифференциальному уравнению. Заключение является прямым следствием геометрического смысла уравнения: уравнение $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ определяет положение касательной к кривой (интегральной — по современной терминологии) в точке (x, y).

Впрочем, рассуждения Лагранжа об уравнении, определяющем кривую, касающуюся кривых интегрального семейства, не строги. Рассматривая две «бесконечно близкие точки» этой кривой с ординатами y и $y + \frac{\partial y}{\partial a} da$, отвечающие значениям параметра a и $a + da$, Лагранж заключает, что в силу одинаковости ординат $\partial y/\partial a = 0$. Таким образом, исключение a из уравнений $V = 0$ и $\partial y/\partial a = 0$ приводит к кривой, касающейся всех кривых, выражаемых уравнением $V(x, y, a) = 0$. В заключение этого раздела Лагранж упоминает и об огибающей применительно к семействам прямых на плоскости.

Интересны выводы Лагранжа, в которых, по-видимому, впервые отчетливо затрагивается в сравнительной общей форме вопрос о неединственности интегральных кривых, проходящих через данную точку. Лагранж пишет: «таким образом, в каждой точке этой кривой (которая касается кривых, определяемых полным интегралом. — *Ред.*) имеются две ветви, которые встречаются в этой точке и которые имеют общую касательную; одна из них есть сама эта кривая и другая та, которой она касается»[1]. Напомним, что по современной терминологии любая точка огибающей является существенно особой точкой, так как в ней нарушается единственность. Более строго, отметим, что Лагранж не прав, говоря лишь о двух кривых, проходящих через точки «касающейся кривой». Действительно, через такую точку проходит бесконечно много интегральных кривых, которые различны между собой на любом, как угодно малом интервале, окружающем точку.

Отмечая далее, что значение d^2y/dx^2 для этих двух кривых должно быть различным, Лагранж указывает: это со своей стороны дает способ для нахождения таких кривых. Идея вариации произвольного постоянного в вопросе об особых решениях оказалась, таким образом, весьма плодотворной.

Лагранж распространил свой метод также на уравнения второго порядка, а затем и на уравнения с частными производными первого порядка. В «Лекциях об исчислении функций» он дал систематическое изложение теории особых решений на уровне, какого она достигла, в значительной мере благодаря его собственным работам, к началу XIX в.

Краевые задачи

Первая постановка краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, относящихся к середине XVIII в., была обусловлена, с одной стороны, вариационным исчислением, с другой — задачами математической физики. Предвосхищая дальнейшее, более подробное изложение (см. десятую главу), укажем постановку основной вариационной

[1] *J. L. Lagrange.* Oeuvres, v. IV, p. 38.

задачи, данную Эйлером в его «Методе нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума, либо минимума» (1744): среди всех (достаточно гладких) кривых $y = y(x)$, соединяющих две заданные точки плоскости (a, A), (b, B), найти такую, вдоль которой интеграл $\int_a^b F(x, y(x), y'(x))\,dx$ имеет наименьшее или наибольшее значение. Уравнение Эйлера $F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'} = 0$ при $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \neq 0$ является обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка. Требование прохождения допустимых кривых через заданные точки означает, что искомое решение должно удовлетворять краевым условиям: $y(a) = A$, $y(b) = B$. Наличие двух произвольных постоянных в общем интеграле этого уравнения позволяло выделить нужное частное решение без особых трудностей. Таким образом, эта краевая задача не потребовала новых методов.

Более существенное влияние оказала классическая проблема колебаний струны, закрепленной на концах. Первые решения смешанной задачи для уравнения колебаний струны $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, полученные почти одновременно Даламбером (1747) и Эйлером (1748), были даны сначала для частных случаев, когда в начальный момент $t = 0$ либо равно нулю отклонение струны от положения равновесия (Даламбер), либо равен нулю начальный импульс. Эта и другие задачи математической физики, которые будут рассмотрены в девятой главе, в ряде случаев приводились к краевым задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений, к которым удавалось свести соответствующие уравнения с частными производными. Даламбер, Эйлер, Лагранж и другие математики рассматриваемого времени решили таким образом несколько важных проблем математической физики. Упомянем, что, применяя уже известный ему прием разделения переменных, Эйлер в статье, напечатанной в «Miscellanea Taurinensia» (1762—1765) 1766), приходит к простейшему случаю классической краевой задачи для однородного дифференциального уравнения второго порядка с однородными краевыми условиями. Полагая $y = T(t)\,X(x)$, Эйлер получает уравнение $X''(x) - \lambda X = 0$, для которого нужно найти решение $X = X(x)$, удовлетворяющее краевым условиям: $X(0) = 0$, $X(a) = 0$; при этом λ — некоторое, пока неопределенное постоянное, возникающее в процессе разделения переменных. Учитывая необходимость удовлетворить и начальным условиям, Эйлер должен найти нетривиальное решение возникшей краевой задачи. Исследуя все возможности в отношении знака λ, Эйлер приходит к выводу, содержащемуся в любом современном учебнике: решения краевой задачи даются функциями $X_k = \sin \frac{k\pi}{a} x$, отвечающими значениям параметра $\lambda_k = -\frac{k^2\pi^2}{a^2}$.

Краевая задача для несколько более сложного уравнения и иных краевых условий возникает в работе Эйлера, помещенной в «Acta», (1781 : I) 1784. Здесь интересен особый прием разделения переменных. Уравнение задачи таково:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 2gx \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 2g \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Однако принципиальный шаг в более общем изучении краевых задач был сделан в 30-е годы XIX в. в замечательных исследованиях Штурма и Лиувилля.

Дальнейшее развитие теории дифференциальных уравнений

К концу XVIII в. учение об обыкновенных дифференциальных уравнениях сформировалось в самостоятельную науку, имеющую весьма широкую сферу приложений. Достигнутые в это время в основных направлениях результаты оказали большое воздействие на прогресс этой ветви анализа в XIX в., когда с большей силой проявилось влияние самой логики развития теории, а также влияние на нее алгебры и реформы оснований анализа.

Для развития проблемы интегрирования в конечном виде принципиальное значение имело установление невозможности такого интегрирования в общем случае, а не расширение классов уравнений, допускающих подобное решение. В этой области фундаментальные результаты были получены Лиувиллем, а затем С. Ли, выяснившим теоретико-групповой аспект этой проблемы.

На протяжении всего XIX в. совершенствовались методы решения линейных уравнений и их систем. Здесь решающее влияние оказали успехи алгебры. Выяснение аналогий между линейными алгебраическими и линейными дифференциальными уравнениями явилось исходным пунктом символических методов, начиная с Бриссона и Коши. Создание Вейерштрассом теории элементарных делителей позволило ему вместе с Жорданом построить общую теорию линейных систем уравнений с постоянными коэффициентами.

Необходимость разработки методов численного решения дифференциальных уравнений диктовалась, как и раньше, всей практикой математического естествознания. Однако совершенствование этих методов происходило в тесной связи с формированием и развитием нового большого направления — обширным комплексом проблем существования и единственности решения задач с начальными условиями, а также решения краевых задач.

Новое весьма важное направление добавилось в последние два десятилетия XIX в. Мы имеем в виду качественную теорию дифференциальных уравнений, созданную, прежде всего, А. Пуанкаре и А. М. Ляпуновым. Блестящие успехи этого важного раздела теории были подготовлены всем предшествующим периодом теории. И в наши дни качественная теория представляет одно из центральных направлений современной теории дифференциальных уравнений.

ДЕВЯТАЯ ГЛАВА

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Первые геометрические задачи

Дифференциальным уравнением с частными производными называется соотношение вида

$$F(x, y, \ldots, u, u_x, u_y, \ldots, u_{xx}, u_{xy}, \ldots) = 0,$$

где F — функция переменных x, y, ... u, u_x, u_y, ..., u_{xx}, u_{xy}, ... Величины x, y, ... в этом уравнении являются независимыми переменными, u есть искомая функция переменных x, y, ...;

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \ u_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \ldots u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \ldots$$

Уравнение с частными производными может содержать и более одной неизвестной функции.

Основной задачей теории дифференциальных уравнений с частными производными является нахождение и исследование решений этих уравнений. Вообще ищется вся совокупность решений того или иного уравнения. Однако многие физические задачи требуют изучения лишь тех решений соответствующих им дифференциальных уравнений, которые удовлетворяют некоторым добавочным условиям, носящим название краевых и начальных условий.

Дифференциальные уравнения с частными производными различаются по порядку, аналогично обыкновенным уравнениям.

Дифференциальное уравнение $F = 0$ называется линейным, если функция F линейна по переменным u, u_x u_y, ..., u_{xx}, u_{xy}, ... и коэффициенты зависят только от независимых переменных x, y,...

Если функция F линейна по производным наивысшего порядка (например, n-го) с коэффициентами, зависящими от x, y, ..., а также, может быть, от u и ее производных до $n-1$-го порядка, то дифференциальное уравнение $F = 0$ называется квазилинейным. Таково, например, уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u^2 = 0.$$

Зарождение и развитие теории дифференциальных уравнений в частных производных было связано с расширением в XVIII в. круга приложений математического анализа, с теми задачами естествознания, в част-

ности, механики, физики, некоторых разделов самой математики, в которых появилась необходимость в функциях многих переменных. Это были прежде всего задачи небесной механики, гидродинамики, физики упругих тел, плоской и пространственной геометрии, технической практики.

С первыми подходами к уравнениям в частных производных мы встречаемся в уже упоминавшейся (стр. 342) работе Эйлера «О бесчисленных кривых одного рода...» и «Дополнении» к ней (Commentarii, (1734 —1735) 1740).

По геометрическому содержанию эти статьи принадлежали к работам об изогональных траекториях, т. е. кривых, пересекающих все кривые данного однопараметрического семейства под данным углом. Эйлер рассмотрел несколько более общую задачу о нахождении семейства кривых по данному соотношению с данным однопараметрическим семейством. Аналитически вопрос сводился к следующей задаче. Исходя из уравнения

$$\frac{\partial z(x, a)}{\partial x} = P(x, a),$$

которое пишется самим Эйлером в виде $z = \int P dx$ с оговоркой, что P зависит от x и a, причем a при интегрировании рассматривается как постоянная величина, требуется определить полный дифференциал

$$dz = P(x, a)\, dx + Q(x, a)\, da, \qquad (1)$$

содержащий a уже как переменную величину (параметр). Иначе говоря, зная частную производную $\frac{\partial z(x, a)}{\partial x} = P(x, a)$, требуется найти вторую частную производную

$$\frac{\partial z(x, a)}{\partial a} = Q(x, a).$$

Полученное при этом дифференциальное равенство (1) Эйлер называет модулярным уравнением, т. е. уравнением, содержащим модуль a, — вместо слова «параметр» он здесь употребляет слово «модуль», предложенное Я. Германом (Acta Eruditorum, 1717—1719). Полученное «модулярное уравнение» должно задавать однопараметрическое семейство кривых на плоскости. Следовательно, из него в конце концов, в конкретных случаях, надо уметь находить величину z — ординату кривой как функцию x и параметра a, другими словами, в конкретных случаях надо уметь проинтегрировать равенство (1). Именно для решения этой основной задачи Л. Эйлер доказывал в начале статей теорему о независимости частных производных от порядка дифференцирования и выводил условие полного дифференциала (ср. стр. 342).

Воспользовавшись признаком полного дифференциала

$$\frac{\partial P}{\partial a} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

Эйлер находит, что

$$Q = \int \frac{\partial P}{\partial a} dx \quad \text{или} \quad \frac{\partial z}{\partial a} = \int \frac{\partial P}{\partial a} dx. \qquad (2)$$

Если вспомнить, что $z = \int P(x, a)\, dx$, то формула (2) имеет и самостоятельное значение, как формула дифференцирования интеграла по пара-

метру. Вывод этой формулы Эйлер позднее включил в первый том своего «Интегрального исчисления» (1768).

Беря в качестве $P(x, a)$ различные конкретные функции, Эйлер показывает, какой вид имеет функция $Q(x, a)$. Затем в «Добавлении к исследованию...» он показывает, как в конкретных случаях можно проинтегрировать равенство (1). Посмотрим, как он это делает в самом первом его случае.

В качестве функции $P(x, a)$ Эйлер берет однородную функцию степени -1. Тогда искомая функция $z(x, a)$ должна быть однородной функцией нулевой степени и, следовательно, по свойству такой функции должно выполняться равенство

$$P(x, a)\, x + Q(x, a)\, a = 0,$$

т. е.

$$Q = -\frac{Px}{a}. \tag{3}$$

Здесь Эйлер, между прочим, применил известную теперь под его именем теорему об однородных функциях. В силу (3)

$$dz = Pdx - \frac{Px}{a}\, da \text{ или } dz = P\left(dx - \frac{xda}{a}\right).$$

Далее Эйлер замечает, что выражение $dx - \frac{xda}{a}$ становится интегрируемым, если его умножить на $1/a$, так как

$$\frac{1}{a}\left(dx - \frac{xda}{a}\right) = d\left(\frac{x}{a} + c\right),$$

где c — произвольная постоянная величина. Поэтому, говорит Эйлер, если в качестве функции $P(x, a)$ взять любую функцию вида $\frac{1}{a} f\left(\frac{x}{a} + c\right)$, то выражение $dz = P\left(dx - \frac{xda}{a}\right)$ будет интегрируемым. Действительно, тогда можно написать (чего сам Эйлер не делает):

$$z = \int f\left(\frac{x}{a} + c\right) d\left(\frac{x}{a} + c\right). \tag{4}$$

Конечно, $f\left(\frac{x}{a} + c\right)$ здесь молчаливо предполагается интегрируемой.

Далее в своей статье Эйлер в качестве функции $P(x, a)$ берет еще более сложные функции, в частности однородные любой степени.

В рассмотренных геометрических статьях Л. Эйлера даны первые примеры интегрирования уравнений в частных производных. Однако здесь уравнения в частных производных еще не были выделены как особый объект исследования, обладающий своими специфическими свойствами, хотя решение и оказалось зависящим от произвольной функции.

Вскоре после появления этих работ Эйлера к решению уравнений в частных производных было сведено еще несколько задач, первой из которых была задача о колебании струны. В процессе решения этой знаменитой задачи уже стали проявляться характерные особенности теории уравнений в частных производных. В дальнейшем в связи с решением других конкретных вопросов механики, физики, геометрии наметились и

основные направления развития теории дифференциальных уравнений в частных производных.

Начиная с 1740 г., на протяжении около трех десятилетий в области уравнений в частных производных накопилось уже столько результатов, что можно было подвести и некоторые итоги. Огромное число этих результатов было получено Л. Эйлером. И первый систематический обзор формирующейся теории дифференциальных уравнений в частных производных был сделан им же в третьем томе его «Интегрального исчисления» (1770).

Наряду с Л. Эйлером теорию дифференциальных уравнений в частных производных в указанный период интенсивно разрабатывали Ж. Даламбер и Д. Бернулли. В последней трети XVIII в. новые идеи в области теории уравнений в частных производных были даны в трудах следующего поколения математиков — Ж. Л. Лагранжа, П. С. Лапласа и Г. Монжа.

Задача о колебаниях струны. Волновое уравнение

Проблему колебаний струны, одну из простейших задач о широко распространенных в природе колебательных процессах, без изучения которых не могут обойтись физика и техника, исследовали многие ученые — Г. Галилей, М. Мерсенн, Р. Декарт, Х. Гюйгенс и другие. Но лишь в XVIII в. эту задачу удалось выразить в терминах исчисления бесконечно малых. Это, как мы увидим, имело далеко идущие последствия для развития всего анализа: интегрального исчисления, теории дифференциальных уравнений, тригонометрических рядов, самого понятия функции и т. д.

В 1713—1715 гг. Б. Тейлор, пользуясь терминологией и понятиями механики и геометрии, вывел уравнение малых поперечных колебаний бесконечно тонкой однородной струны, имеющей длину l, закрепленной на концах, выведенной из положения равновесия и затем предоставленной самой себе. Но только около 1747 г. Даламбер выразил механико-геометрическую формулировку Тейлора линейным уравнением в частных производных второго порядка

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \qquad (5)$$

где x и y — соответственно абсцисса и ордината точки струны, отнесенной к прямоугольным осям; t — время; a — постоянная величина, выражающаяся через плотность струны и ее натяжение.

Уравнение (5) мы записали в современной форме. Сам Даламбер обозначал частные производные буквами: $\frac{\partial y}{\partial t}$ — буквой p, $\frac{\partial y}{\partial x}$ —буквой q и т. д.

Позднее уравнение (5), по характеру его решения, было названо волновым уравнением или, после появления в XIX в. классификации уравнений в частных производных, уравнением гиперболического типа.

Уже сам Б. Тейлор, а затем, в 1729 и 1732 гг., И. Бернулли пытались дать решение уравнения колеблющейся струны. Они пришли к выводу, что струна в любой момент времени должна принимать форму синусоиды с зависящей от времени амплитудой. Из рассуждений Тейлора вытекало существование бесчисленного множества синусоидальных форм струны. Однако он ошибочно полагал, что любое движение звучащей струны стремится перейти в найденное им основное колебание, даже при произвольном начальном движении.

Решение Даламбера

Общее решение уравнения (5) при $a = 1$, граничных условиях:

$$y(0, t) = 0, \quad y(l, t) = 0 \tag{6}$$

и начальных условиях

$$y(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial y(x, 0)}{\partial t} = g(x) \tag{7}$$

первым получил Даламбер методом, опирающимся на понятие полного дифференциала. Свое открытие он изложил в двух статьях: «Исследования о кривой, образуемой натянутой струной, приведенной в колебательное движение» и «Продолжение исследований о кривой...» (Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration. Suite des recherches sur la courbe que forme une corde... Mém. Ac. Berlin, (1747) 1749).

При $a = 1$ уравнение (5) записывается в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right). \tag{5'}$$

Даламбер находит дифференциалы функций $\frac{\partial y}{\partial t}$ и $\frac{\partial y}{\partial x}$

$$d\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 y}{\partial x\,\partial t}dt,$$

$$d\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = \frac{\partial^2 y}{\partial x\,\partial t}dx + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}dt$$

и замечает, что получаются равенства:

$$d\left(\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t}\right) = \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x\,\partial t}\right)(dx + dt),$$

$$d\left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial t}\right) = \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x\,\partial t}\right)(dx - dt).$$

Эти равенства показывают, что выражения $\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t}$, $\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial t}$ являются произвольными функциями Φ и Ψ аргументов $x + t$ и $x - t$ соответственно, т. е.

$$\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} = \Phi(x + t),$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial t} = \Psi(x - t).$$

Но тогда

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x}dx + \frac{\partial y}{\partial t}dt = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t}\right)(dx + dt) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial t}\right)(dx - dt) =$$

$$= \frac{1}{2}\Phi(x + t)\,d(x + t) + \frac{1}{2}\Psi(x - t)\,d(x - t).$$

Отсюда интегрирование дает

$$y = \varphi(x + t) + \varphi(x - t), \tag{8}$$

где под φ и ψ можно понимать произвольные функции — неопределенные интегралы от вышеуказанных выражений.

Полученное выражение (8) Даламбер назвал общим решением уравнения колебаний струны, по-видимому, желая подчеркнуть, что в нем содержится фактически бесчисленное множество решений. Это выражение можно назвать общим решением и в современном смысле, так как оно является решением уравнения в частных производных второго порядка, содержащим две произвольные функции.

Используя граничные условия (6), Даламбер получает затем:

$$\varphi(t) + \psi(-t) = 0, \quad \varphi(l + t) + \psi(l - t) = 0,$$

откуда следует, что функции φ и ψ выражаются одна через другую и обладают периодом, равным $2l$:

$$\psi(z) = -\varphi(-z) \quad \text{и} \quad \varphi(z + 2l) = \varphi(z).$$

Таким образом, решение, удовлетворяющее граничным условиям, должно иметь вид

$$y = \varphi(t + x) - \varphi(t - x).$$

Чтобы удовлетворялись еще начальные условия (7), должны выполняться равенства:

$$\varphi(x) - \varphi(-x) = f(x), \qquad (9)$$
$$\varphi'(x) - \varphi'(-x) = g(x).$$

Последнее из них, проинтегрировав, можно заменить следующим:

$$\varphi(x) + \varphi(-x) = \int g(x)\, dx, \qquad (10)$$

где $0 \leqslant x \leqslant l$.

Из равенств (9) и (10) функция $\varphi(x)$ определяется через заданные функции $f(x)$ и $g(x)$ на сегменте $-l \leqslant x \leqslant l$, но тогда, в силу периодичности, она становится определенной на всей числовой прямой.

Таким образом, при конкретных граничных и начальных условиях решение задачи о струне становится вполне определенным.

Исследование Даламбера прежде всего ясно показало, что в решения уравнений в частных производных могут входить произвольные функции в отличие от решений обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих произвольные постоянные величины. Однако сразу же следует заметить, что сам Даламбер сильно ограничивал произвольность этих функций, требуя, чтобы они задавались единым аналитическим выражением во всей области определения, т. е. были непрерывны в смысле Эйлера (см. стр. 251). Практически Даламбер имел в виду функции, разлагающиеся в степенные ряды, за исключением отдельных точек, т. е. за исключением отдельных точек, — аналитические функции по современной терминологии.

Добавим, что во второй из рассматриваемых статей Даламбер предложил искать решение в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит лишь от одного из двух аргументов. Если положить

$$y = f(t)\, g(x),$$

то для определения $f(t)$ и $g(x)$ получаются два обыкновенных линейных дифференциальных уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Таким образом, к Даламберу восходит прием решения волнового

уравнения с помощью разделения переменных. Однако французский математик не развил этот метод с достаточной полнотой, как это сделал уже в начале XIX в. Ж. Б. Фурье.

Решение Эйлера

Уже через год после появления первых работ Даламбера о струне Эйлер опубликовал статью «О колебании струны» (Sur la vibration des cordes. Mém. Ac. Berlin, (1748) 1750), существенно углубившую анализ проблемы, о чем будет сказано далее.

В только что названной статье Эйлер сначала выводит уравнение (5) колебания струны. Затем он формулирует требование отыскания общего решения этого уравнения при произвольно заданной фигуре струны. О начальной скорости струны прямо не говорится, но из дальнейших выкладок вытекает, что она считается равной нулю. При этих условиях Эйлер нашел решение, которое, по его собственному признанию, по форме существенно не отличается от решения Даламбера. Эйлер решил уравнение (5) при любом постоянном a, и потому его решение имеет вид

$$y = \varphi(x + at) + \psi(x - at), \tag{11}$$

где φ и ψ — функции, определяемые из граничных и начальных условий задачи так же, как это сделано у Даламбера.

Заметим, кстати, что рассмотренное Эйлером уравнение (5) легко приводится к уравнению (5′) Даламбера (т. е. к случаю $a = 1$) заменой $at = t'$ и опусканием штриха у t' после преобразований. Следовательно, этой же заменой связаны и решения Эйлера и Даламбера.

В 1766 г. Эйлер предложил новый метод решения уравнения колебания струны, вошедший затем в третий том его «Интегрального исчисления» (1770), а позднее — во все учебники по дифференциальным уравнениям. Вводя новые координаты: $u = x + at$, $v = x - at$,— он преобразовал уравнение (5) колебания струны к легко интегрируемому виду

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u\, \partial v} = 0.$$

По современной терминологии координаты u и v Эйлера называются характеристическими. В этих координатах от вторых производных функции остается только смешанная производная.

Эйлер первый понял, что уравнение колебания струны отражает процесс распространения волн. Волной при этом называют процесс передвижения отклонения какой-либо точки струны по струне.

В «Разъяснении о движении колеблющихся струн» (Éclaircissement sur le mouvement des cordes vibrantes. Miscellanea Taurinensia, t. III, (1762—1765) 1766) Эйлер рассматривает струну, отклоненную в начальный момент на некотором участке, и указывает время, в течение которого точка струны вне этого участка остается в покое. В решении (11) Эйлера слагаемое $\psi(x - at)$ означает волну, движущуюся со скоростью a в положительную сторону оси абсцисс, слагаемое $\varphi(x + at)$ — волну, движущуюся с той же скоростью в противоположную сторону оси. Общее движение струны получается геометрическим построением путем наложения указанных двух волн.

Эйлер завершил разработку метода Даламбера, который позднее стал называться также методом характеристик.

Начало спора
об интеграле волнового уравнения

Появление первой статьи Эйлера по рассматриваемой проблеме «О колебании струн» послужило началом продолжительной дискуссии между Эйлером и Даламбером, а затем и между другими математиками XVIII в. о природе функций, входящих в решение дифференциального уравнения струны и уравнений с частными производными, а затем о природе понятия функций вообще, о выразимости функций средствами анализа и о других важных математических вопросах.

Хотя решение Эйлера (11) несущественно отличалось от решения Даламбера (8) по форме, Эйлер не был согласен с Даламбером в понимании физической сути этого решения, в оценке степени произвола допускаемых при решении функций.

В силу того что начальная форма струны может быть любой связной кривой, начерченной, по выражению Эйлера, «свободным влечением руки», Эйлер сначала считал возможным определить начальное положение струны «разрывной» или «смешанной» функцией, задаваемой не одним аналитическим выражением, а несколькими, отвечающими различным дугам струны (т. е. функцией кусочно-аналитической). Позднее для изображения начальной формы струны Эйлер допускал и вообще неаналитические, по нашей терминологии, функции. Следствием произвольности начальной формы струны являлась такая же произвольность функций, входящих в решение задачи. Поэтому свое решение задачи о колебании струны Эйлер не без основания считал более общим, нежели решение Даламбера.

Даламбер не соглашался с Эйлером. Нельзя, говорил он, решить задачу при любой начальной форме струны. Решение должно быть, во-первых, дважды дифференцируемым, для чего начальная фигура струны должна быть гладкой. Гладкости требует и физическая сила упругости: в угловых точках она не может быть конечной. Следовательно, произвольные функции в решении должны быть аналитическими. Во-вторых, решение является периодическим. Следовательно, и начальная форма струны должна быть периодической.

Эйлер и Даламбер опубликовали еще ряд статей о колебании струны, однако мы не найдем в них убедительных ответов на поднятые вопросы.

Вопрос о возможности применения негладких функций (с разрывными производными) в теории волнового уравнения прояснился лишь в наши дни благодаря работам С. Л. Соболева, который ввел понятие «предельных решений» этого уравнения. Предельное решение может иметь разрывные производные или даже совсем не иметь производных в обычном смысле.

Д. Бернулли и решение
в форме тригонометрического ряда

В спор между Эйлером и Даламбером вскоре вмешался третий знаменитый участник — Даниил Бернулли, выступивший в «Записках» Берлинской академии со статьями «Размышления и разъяснения о новых колебаниях струн, изложенных в «Записках» Академии за 1747 и 1748 годы» и «О сочетании различного рода простых изохронных колебаний, которые могут сосуществовать в одной и той же системе тел» (Réflexions et éclaircissements sur les nouvelles vibrations des cordes exposées dans les mémoires

de l Académie de 1747 et 1748; Sur le mélange de plusieurs espèces de vibrations simples isochrones, qui peuvent coexister dans un même système de corps. Mém. Ac. Berlin, (1753) 1755). В этих статьях высказаны новые принципиально важные общие положения о колебательных процессах и дана идея нового приема решения задачи о струне, ставшего впоследствии весьма мощным методом решения дифференциальных уравнений.

Общее решение уравнения колебания струны Д. Бернулли представил в виде тригонометрического ряда с неопределенными коэффициентами

$$y = \alpha \sin \frac{\pi x}{l} + \beta \sin \frac{2\pi x}{l} + \gamma \sin \frac{3\pi x}{l} + \ldots, \quad (12)$$

где l — длина струны; коэффициенты α, β, γ, ... считаются функциями времени.

Д. Бернулли исходил при этом из физических соображений, именно из того факта, что звук, издаваемый струной, состоит из главного тона и бесчисленного множества более слабых обертонов. Но каждому тону струны, как показывало еще исследование Б. Тейлора, соответствует форма струны в виде синусоиды, записываемой уравнением

$$y = A(t) \sin \frac{n\pi x}{l},$$

где n — натуральное число, t — время. Следовательно, заключил Д. Бернулли, фигура колеблющейся струны должна образовываться сочетанием таких синусоид. В переводе на язык современной математики это означало, что общее решение волнового уравнения можно представить в виде ряда, членами которого являются частные решения. Этот «принцип наложения колебаний» Бернулли в дальнейшем оказался исключительно плодотворным и лег в основу метода разделения переменных (обратим внимание на то, что в тригонометрическом ряде члены являются произведениями сомножителей, каждый из которых зависит только от одной переменной — либо от t, либо от x).

Д. Бернулли был убежден, что тригонометрическим рядом можно изобразить любую связную кривую и соответствующую ей функцию. Для этого, говорил он, нужно лишь соответствующим образом подобрать коэффициенты α, β, γ, ... ряда. Но ему не удалось найти общий закон получения этих коэффициентов.

Д. Бернулли правильно утверждал, что тригонометрический ряд является не менее общим, чем степенной ряд

$$\alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \ldots,$$

широко применявшийся до него для представления функций. Однако он даже не попытался строго обосновать свое утверждение. Его уверенность в универсальности такого рода разложений основывалась лишь на физических соображениях.

На протяжении почти всей своей творческой жизни Д. Бернулли занимался исследованием колебаний различных механических систем. Он рассмотрел ряд конкретных задач о линейных колебаниях систем с конечным и бесконечным числом степеней свободы. При этом он дал определение простых синхронных колебаний и высказал убеждение о возможности получить любое колебание сложением простых синхронных колебаний. Корни принципа наложения колебаний он усматривал в самой природе. Его высказывания о форме колеблющейся струны вытекали из этого его общего принципа.

Возражения Эйлера и Даламбера

Д. Бернулли неоднократно указывал на большую общность его метода исследования колебаний струны по сравнению с методом Даламбера — Эйлера. Однако ни Даламбер, ни Эйлер не признали общности его решения задачи, хотя не отрицали самого принципа наложения. Первое же исследование Д. Бернулли о струне вызвало ряд их возражений. Суть этих возражений сводилась к тому, что тригонометрическим рядом можно представить лишь весьма ограниченный класс функций.

Хотя сам Эйлер в конце статьи «О колебании струн» также дал решение частного случая задачи в виде тригонометрического ряда, он полагал, что тригонометрический ряд (12) не годится для представления даже произвольной алгебраической функции, так как такая функция непериодична и не обязательно нечетная, в то время как ряд (12) является периодической и нечетной функцией. Вообще тригонометрический ряд, задающий определяемую им функцию на всей числовой прямой, не пригоден был, по мнению Эйлера, для изображения произвольной функции. Эйлер считал, что метод Д. Бернулли не дает решения задачи о струне, если, например, начальное возмущение имеет место лишь на части струны. В основе этих возражений Эйлера лежало его ошибочное мнение, что два аналитических выражения не могут совпадать на одном каком-либо участке и различаться на другом.

Даламбер вновь подчеркивал, что полученная в результате решения форма струны должна быть гладкой, иметь непрерывную кривизну. Другими словами, решение должно иметь непрерывные производные первых двух порядков. Для опровержения общности метода Д. Бернулли он давал пример начального отклонения струны в виде треугольника. О дальнейшем развитии теории тригонометрических рядов в XVIII в. уже говорилось ранее (см. стр. 315).

Лагранж и Арбогаст

После Д. Бернулли в конце 50-х годов XVIII в. в обсуждение задачи о колебании струны включился Ж. Л. Лагранж, начинавший тогда свою научную деятельность (Miscellanea Taurinensia, 1759). Лагранж решил задачу о колебании струны для некоторой интерполяционной кривой, аппроксимирующей заданную кривую. Решение Лагранжа подводило к тригонометрическим рядам и к открытию формул для коэффициентов этих рядов. Оставалось совершить предельный переход от конечного к бесконечному. Но Лагранж пришел в конце концов к результатам Эйлера.

Лагранж поддержал Эйлера в вопросе введения в математический анализ произвольных, «разрывных» или «смешанных» функций и в связи с изучением движений воздуха в трубах постоянного сечения. Оказалось, что эти движения при малых продольных отклонениях частиц воздуха от положения равновесия также описываются уравнением (5). Лагранж заметил в 1761 г., что при изучении таких движений необходимо пользоваться кривой, течение которой в некоторой точке внезапно сменяется на прямолинейное, т. е. необходимо пользоваться «смешанной», по терминологии Эйлера, кривой, а значит и соответствующей ей неаналитической функцией.

В обсуждении вопросов, поднятых решением проблемы о колебании струны, затем участвовали и другие математики того времени. Но все эти вопросы, как уже говорилось, не получили полного освещения в XVIII в.

В 1787 г. Петербургской академией наук был объявлен конкурс на тему о природе произвольных функций, входящих в решения уравнений с частными производными. Премия была присуждена профессору Страсбургского университета Луи Франсуа Арбогасту. Его «Мемуар о природе произвольных функций, входящих в интегралы уравнений в частных дифференциалах» (Mémoire sur la nature des fonctions arbitraires qui entrent dans les intégrales des équations aux différentielles partielles) был издан в Петербурге в 1791 г. Арбогаст в целом поддержал позицию Эйлера, выступил против чрезмерных ограничений, на которых настаивал и Даламбер и, в ослабленной форме, Лаплас.

Задачи гидромеханики; уравнение Лапласа

После того как были достигнуты успехи в изучении полного дифференциала функций и решении задачи о колебании струны, математики приступили к изучению других физических и математических вопросов, выражающихся уравнениями с частными производными.

Практические потребности «морской науки» и машиностроения, а также нужды небесной механики побуждали ученых XVIII в. интенсивно разрабатывать механику жидкости и газа.

Уже в «Опыте новой теории сопротивления жидкостей» (Essai d'une nouvelle théorie de la résistance des fluides. Paris, 1752) Даламбер, в связи с изучением обтекания твердого тела однородной невесомой жидкостью, решил задачу отыскания двух функций p и q по их полным дифференциалам:

$$dq = Mdx + Ndz, \qquad dp = Ndx - Mdz.$$

Даламбер рассматривал плоскопараллельное движение жидкости, в котором функции p и q являются компонентами вектора скорости частицы жидкости в точке (x, z) координатной плоскости.

Сравнивая полные дифференциалы dq и dp, Даламбер приходит к следующей системе уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial z}, \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\partial q}{\partial x}. \tag{13}$$

Он проинтегрировал полученную систему, прибегнув к функциям комплексного аргумента. В своих прежних исследованиях он часто пользовался комплексными переменными величинами и был знаком со многими их свойствами.

Так как уравнения системы (13) говорят о том, что $qdx + pdz$ и $pdx - qdz$ являются полными дифференциалами некоторых функций, то Даламбер сделал вывод, что полными дифференциалами будут и следующие выражения:

$$qdx + pdz + \sqrt{-1}\,(pdx - qdz) = (q + \sqrt{-1}\,p)\cdot\left(dx + \frac{dz}{\sqrt{-1}}\right),$$

$$qdx + pdz - \sqrt{-1}\,(pdx - qdz) = (q - \sqrt{-1}\,p)\cdot\left(dx - \frac{dz}{\sqrt{-1}}\right).$$

Отсюда, в точности, как при решении волнового уравнения, распространяя соответствующий вывод относительно функций действительного аргумента на функции комплексного аргумента, Даламбер заключил, что $q+\sqrt{-1}\,p$ является некоторой функцией от $x+\frac{z}{\sqrt{-1}}$, а $q-\sqrt{-1}\,p$ — функцией от $x-\frac{z}{\sqrt{-1}}$. Полагая

$$q+\sqrt{-1}\,p = 2\xi\left(x+\frac{z}{\sqrt{-1}}\right)+2\sqrt{-1}\,\zeta\left(x+\frac{z}{\sqrt{-1}}\right), \tag{14}$$

Даламбер нашел, что тогда

$$q-\sqrt{-1}\,p = 2\xi\left(x-\frac{z}{\sqrt{-1}}\right)-2\sqrt{-1}\,\zeta\left(x-\frac{z}{\sqrt{-1}}\right). \tag{15}$$

При этом он воспользовался тем свойством функций комплексного аргумента, полученных расширением действительных функций (это свойство не было сформулировано еще тогда в общем виде), что при $f(x+\sqrt{-1}z) = q+\sqrt{-1}\,p$ имеем $f(x-\sqrt{-1}\,z) = q-\sqrt{-1}\,p$. Из равенств (14) и (15) Даламбер получил, наконец:

$$q = \xi\left(x+\frac{z}{\sqrt{-1}}\right)+\xi\left(x-\frac{z}{\sqrt{-1}}\right)+\sqrt{-1}\,\zeta\left(x+\frac{z}{\sqrt{-1}}\right)-\sqrt{-1}\,\zeta\left(x-\frac{z}{\sqrt{-1}}\right),$$

$$p = \frac{\xi\left(x+\frac{z}{\sqrt{-1}}\right)}{\sqrt{-1}}-\frac{\xi\left(x-\frac{z}{\sqrt{-1}}\right)}{\sqrt{-1}}+\zeta\left(x+\frac{z}{\sqrt{-1}}\right)+\zeta\left(x-\frac{z}{\sqrt{-1}}\right).$$

Иначе говоря, Даламбер представил искомые функции q и p — компоненты скорости частицы жидкости — в виде действительной и мнимой частей функции

$$2\xi\left(x+\frac{z}{\sqrt{-1}}\right)+2\sqrt{-1}\,\zeta\left(x+\frac{z}{\sqrt{-1}}\right)$$

комплексного аргумента. Метод Даламбера в дальнейшем вошел в учебники по гидромеханике.

Позднее, в 1761 г. в первом томе своих «Математических сочинений» (Opuscules mathématiques) Даламбер заметил, что функции q и p, удовлетворяющие системе (13), удовлетворяют также уравнению

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0 \tag{16}$$

и что это уравнение имеет связь с функциями комплексной переменной. В том же году Эйлер, как мы увидим далее, получил аналогичное уравнение для трехмерного пространства.

Система уравнений Даламбера (13) по мере развития теории функций комплексной переменной стала иметь исключительно важное значение как одно из условий аналитичности таких функций (см. стр. 365). Уже Эйлер существенно использовал систему (13) в своих исследованиях по гидромеханике, о которых мы еще будем говорить, а также в работах по картогра-

фии и вычислению интегралов. Роль этой системы в теории функций комплексной переменной особенно стала ясна в XIX в. после работ Коши и Римана. Поэтому система (13) впоследствии стала называться уравнениями Коши — Римана, хотя первые ее применения, как мы видим, принадлежат Даламберу и Эйлеру.

Точно так же уравнение (16) и подобное ему уравнение для трехмерного пространства, получившие позднее имя Лапласа, стали играть важную роль в различных областях математики и физики — теории потенциала, теории функций комплексной переменной и др.

Решения уравнения (16), обладающие непрерывными частными производными первого и второго порядков, позднее были названы гармоническими функциями, а две гармонические функции, удовлетворяющие системе (13), были названы сопряженными. Употребляя эту терминологию, можно сказать, что при рассмотрении системы (13) Даламбер впервые выразил сопряженные гармонические функции q и p в виде действительной и мнимой частей некоторой функции комплексного аргумента.

Гидромеханические исследования Эйлера

Вслед за Даламбером важные результаты в гидромеханике, а одновременно и в области уравнений с частными производными были получены Эйлером.

В «Общих принципах движения жидкостей» (Principes généraux du mouvement des fluides, Mém. Ac. Berlin, (1755) 1757) Эйлер положил начало гидродинамике как теоретической науке. Здесь он впервые вывел основные уравнения гидродинамики для жидкости, лишенной вязкости. Эти уравнения характеризуют в любой момент времени t скорость движения и давление жидкости в произвольной точке (x, y, z) пространства, заполненного жидкостью. Если обозначить в указанной точке компоненты вектора скорости через u, v, w, давление — через p, плотность — через ρ, проекции внешних сил, отнесенные к единице массы жидкости,— через X, Y, Z, то полученные Эйлером уравнения можно записать в виде системы:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},\\
&\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},\\
&\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z},\\
&\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial (\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial (\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial (\rho w)}{\partial z}=0.
\end{aligned}\tag{17}$$

Последнее уравнение в этой системе носит название уравнения неразрывности жидкости. Для случая несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$) оно имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0. \tag{18}$$

Нелинейная система основных уравнений гидродинамики (17) не принадлежит ни к одному из трех типов, известных в современной теории дифференциальных уравнений. Ее интегрирование в общем виде затруд-

нительно и в наше время; она интегрируется в различных частных случаях движения жидкости и газа. Заметим, что система Эйлера (17) в одном из этих частных случаев сводится к уже рассмотренному нами волновому уравнению (5). В этом случае она описывает возникающее в результате малых возмущений параллельное оси x баротропное движение сжимаемой жидкости или газа, зависящее лишь от координаты x и времени t.

Естественно, что и Эйлер начал интегрирование системы (17) с частных случаев.

В названной основополагающей работе 1755 г. Эйлер рассмотрел, в частности, говоря современным языком, плоское потенциальное движение идеальной несжимаемой жидкости. При таком движении компонента w скорости обращается в нуль и плотность ρ жидкости постоянна. Как и Даламбер в упомянутой выше гидродинамической задаче, Эйлер считает, что выражения $udy - vdx$ и $udx + vdy$ являются полными дифференциалами некоторых функций (это и означает, что рассматривается потенциальное движение). Для нахождения компонент скорости u и v Эйлер применяет изложенный выше метод Даламбера перехода к функции комплексного аргумента. При этом, чтобы явно представить компоненты u и v в виде действительных функций, Эйлер прибегнул еще к разложению функции комплексного аргумента, записанного в тригонометрической форме, в степенной ряд, расположенный по однородным гармоническим многочленам.

Таким образом, в рассматриваемом труде Эйлер также пришел к системе Даламбера (13). Уравнение (16) при этом появлялось у Эйлера как уравнение неразрывности (18) при $w = 0$.

В другой гидродинамической работе Эйлера «Принципы движения жидкостей» (Principia motus fluidorum. Novi Commentarii, (1756—1757) 1761) вводится функция $s(x, y, z, t)$, частные производные которой по x, y, z равны компонентам u, v, w скорости частицы жидкости:

$$u = \frac{\partial s}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial s}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial s}{\partial z}.$$

Тогда уравнение (18) превращается в уравнение

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} = 0. \tag{19}$$

Здесь впервые в истории математики появилось так называемое уравнение Лапласа для случая трехмерного пространства.

Эйлер наметил и некоторые подходы к интегрированию уравнения (19). В той же работе «Принципы движения жидкостей» функцию $s(x, y, z, t)$, удовлетворяющую уравнению (19), Эйлер ищет в виде линейной комбинации (по-видимому, конечной, как показывают рассмотренные им частные случаи) однородных полиномов степени n вида

$$(Ax + By + Cz)^n,$$

в которых коэффициенты, предполагаемые функциями времени, следует соответствующим образом определить.

Подставляя каждый такой полином в отдельности вместо s в уравнение (19), Эйлер получает условие

$$A^2 + B^2 + C^2 = 0, \tag{20}$$

которому при $n > 1$ должны удовлетворять коэффициенты полинома, для того чтобы полином был решением уравнения (19). При $n = 0$ и $n = 1$ коэффициенты могут быть любыми. Образуя функцию $s(x, y, z, t)$ в виде линейной комбинации некоторого числа полиномов различных степеней, Эйлер выписывает соответствующее число условий вида (20) для их коэффициентов.

Здесь интересно, что решение уравнения (19), как мы бы сказали, Эйлер ищет в виде линейной комбинации частных решений этого уравнения.

Одну из своих работ по гидродинамике, опубликованную в 1769 г., Эйлер посвятил интегрированию общего уравнения неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = 0. \qquad (21)$$

При дополнительных предположениях о характере искомых функций ρ, u, v, w, зависящих от переменных x, y, z, t, Эйлер получил из уравнения (21) ряд более простых дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка, общие интегралы которых ему удалось усмотреть методом сведения этих уравнений к уравнениям в полных дифференциалах.

Сначала делается предположение, что искомые функции в уравнении (21) зависят только от x. Тогда оно сводится к уравнению

$$\frac{d(\rho u)}{dx} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{dP(x)}{dx} = 0, \quad \text{где} \quad P(x) = \rho(x)\, u(x).$$

Следовательно, общим интегралом уравнения (21) в этом случае будет $P(x) = \text{const}$.

Предполагая далее, что искомые функции в (21) зависят только от x и y, Эйлер приходит к уравнению

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 0 \qquad \left(\text{или } \frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\partial Q}{\partial y}\right),$$

где

$$P(x, y) = \rho(x, y)\, u(x, y), \quad Q(x, y) = \rho(x, y)\, v(x, y).$$

Равенство $\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\partial Q}{\partial y}$ показывает, что выражение $-Qdx + Pdy$ является полным дифференциалом некоторой функции, и Эйлер заключает, что если $\Delta(x)$, $\Gamma(y)$, $R(x, y)$ — произвольные функции своих аргументов и если положить

$$dR(x, y) = K(x, y)\, dx + L(x, y)\, dy \quad \left(\text{тогда } \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial K}{\partial y}\right),$$

то искомые функции P и Q можно определить равенствами:

$$P(x, y) = L(x, y) + \Gamma(y), \quad Q(x, y) = -K(x, y) + \Delta(x),$$

так как при этом выполняется уравнение $\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\partial Q}{\partial y}$.

Аналогичным образом Эйлер интегрирует уравнение

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0,$$

получающееся из (21) в предположении, что искомые функции не зависят от времени t. Здесь $P(x, y, z) = \rho(x, y, z)\, u(x, y, z)$,

$$Q(x, y, z) = \rho(x, y, z)\, v(x, y, z), \quad R(x, y, z) = \rho(x, y, z)\, w(x, y, z).$$

Предположение, что компоненты вектора скорости u, v, w находятся в постоянных отношениях между собой:

$$u = \alpha\omega, \quad v = \beta\omega, \quad w = \gamma\omega,$$

где α, β, γ — заданные постоянные, ω — неизвестная функция от x, y, z, t, привело Эйлера к простейшему линейному уравнению с одной неизвестной функцией

$$\alpha\frac{\partial\omega}{\partial x} + \beta\frac{\partial\omega}{\partial y} + \gamma\frac{\partial\omega}{\partial z} = 0. \tag{22}$$

Уравнение (22) Эйлер также приводит к уравнению в полных дифференциалах следующим образом. В выражение

$$\alpha\, d\omega = \alpha\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}dx + \frac{\partial\omega}{\partial y}dy + \frac{\partial\omega}{\partial z}dz\right)$$

Эйлер подставляет значение $\alpha\frac{\partial\omega}{\partial x}$, найденное из уравнения (22). и получает равенство

$$\alpha d\omega = (\alpha dy - \beta dx)\frac{\partial\omega}{\partial y} + (\alpha dz - \gamma dx)\frac{\partial\omega}{\partial z}.$$

Это равенство показывает, что искомая функция $\omega(x, y, z, t)$ должна быть следующего вида:

$$\omega(x, y, z, t) = f\left[\left(\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta}\right), \left(\frac{x}{\alpha} - \frac{z}{\gamma}\right)\right] + \Gamma(t),$$

где f и Γ — произвольные функции. Наконец, Эйлер предполагает, что компоненты вектора скорости имеют вид:

$$u = T(\alpha y - \beta z), \quad v = T(\gamma z - \alpha x), \quad w = T(\beta x - \gamma y),$$

где T — неизвестная функция, а α, β, γ — заданные постоянные. Тогда уравнение (21) сводится к линейному уравнению с переменными коэффициентами и одной неизвестной функцией T:

$$(\alpha y - \beta z)\frac{\partial T}{\partial x} + (\gamma z - \alpha x)\frac{\partial T}{\partial y} + (\beta x - \gamma y)\frac{\partial T}{\partial z} = 0.$$

Последнее уравнение показывает, что его левая часть может получиться лишь в результате дифференцирования функции следующего вида:

$$T = T[(\alpha y - \beta z)^2 + (\gamma z - \alpha x)^2 + (\beta x - \gamma y)^2],$$

которая, следовательно, и является общим решением уравнения.

Сложные задачи гидродинамики были в XVIII в. одним из важнейших источников уравнений в частных производных, в частности уравнений первого порядка, которые удавалось проинтегрировать сведéнием к уравнениям в полных дифференциалах. Пути такого сведéния были в каждой частной задаче свои.

Уравнения первого порядка

В 60-х годах XVIII в. стали появляться первые исследования Эйлера и Даламбера, специально посвященные интегрированию уравнений в частных производных. Первой была работа Л. Эйлера «Нахождение функций по данному дифференциальному условию» (Investigatio functionum ex data differentialium conditione. Novi Commentarii, (1762 — 1763) 1764). В 1768 г. в четвертом томе «Математических сочинений» Даламбера появилась такого же характера статья «Исследования по интегральному исчислению» (Recherches sur le calcul intégral), в которой были изложены результаты, полученные автором еще в 1762 г.

В названных работах Эйлера и Даламбера интегрируются простейшие уравнения в частных производных первого порядка. При этом Эйлер отмечает, что к общей задаче нахождения функции $V = V(x, y)$ по заданному соотношению между x, y, V, $\partial V/\partial x$, $\partial V/\partial y$ приводят проблемы колебания струны и движения жидкости. Он ссылается также на рассмотренные выше его исследования по «модулярным» уравнениям.

Интегрируя отдельные уравнения в частных производных первого порядка, Эйлер и Даламбер устанавливают их связь с уравнениями в полных дифференциалах и используют методы интегрирования последних. Выше уже приводились примеры таких интегрирований. Рассмотрим еще один характерный пример.

Линейное уравнение первого порядка[1]

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial x} p(x, y) + t(x, y), \tag{23}$$

в котором функции $p(x, y)$ и $t(x, y)$ считаются известными, Эйлер интегрирует следующим образом. Поскольку

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy,$$

то в силу (23)

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}(dx + pdy) + tdy.$$

Затем подбирается интегрирующий множитель для выражения $dx + pdy$, т. е. такая функция $q(x, y)$, что

$$q(dx + pdy) = ds(x, y), \tag{24}$$

где $s(x, y)$ — некоторая функция от x, y. При этом

$$dV = \frac{1}{q} \frac{\partial V}{\partial x} ds + tdy. \tag{25}$$

Найденная из уравнения (24) функция $s(x, y)$ берется за новую переменную; через нее и y выражается переменная x. Тогда в правой части равенства (25) коэффициенты можно считать функциями от s и y и рассматривать это равенство как уравнение в полных дифференциалах относительно s и y. Далее функция V определяется по ее полному дифференциалу. Излагая идею Эйлера, мы незначительно лишь изменим его записи.

---

[1] Такого названия у самого Эйлера еще нет. Вообще Эйлер не дает какой-либо классификации уравнений в частных производных.

Согласно условию полного дифференциала, должно иметь место равенство

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{q}\frac{\partial V}{\partial x}\right)=\frac{\partial t}{\partial s},$$

откуда

$$\frac{1}{q}\frac{\partial V}{\partial x}=\int\frac{\partial t}{\partial s}\,dy=\frac{\partial}{\partial s}\int t\,dy.$$

Полагая

$$\int t\,dy=T(y,s)+f(s),$$

где $f(s)$ — произвольная функция от s, Эйлер находит, что

$$\frac{1}{q}\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial T(y,s)}{\partial s}+f'(s).$$

Но $\frac{1}{q}\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial s}$ согласно равенству (25). Поэтому

$$V=\int\frac{\partial V}{\partial s}\,ds=\int\frac{1}{q}\frac{\partial V}{\partial x}\,ds=\int\left[\frac{\partial T(y,s)}{\partial s}+f'(s)\right]ds,$$

откуда Эйлер получает, что

$$V=T(y,s)+f(s)$$

есть общий интеграл уравнения (25). Если подставить здесь вместо s его выражение через x и y, то получится общий интеграл уравнения (23).

Аналогично Эйлер интегрирует и некоторые простейшие нелинейные уравнения:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2=a^2,\qquad \frac{\partial V}{\partial y}=\varphi\left(x,\frac{V}{x}\right),\qquad V=\varphi\left(\frac{\partial V}{\partial x},\frac{\partial V}{\partial y}\right).$$

Даламбер в «Исследованиях по интегральному исчислению» (1768) также проинтегрировал ряд различных простейших дифференциальных уравнений с частными производными.

У Даламбера имеется уже, хотя и неясно высказанная, классификация уравнений с частными производными первого и высшего порядков на линейные и нелинейные, с постоянными или же с переменными коэффициентами.

Прежде всего Даламбер рассматривает линейные дифференциальные уравнения с частными производными. Интересно, что к одному из них

$$\frac{\partial z}{\partial x}+A\frac{\partial z}{\partial y}+Cz=0$$

Даламбер применил метод известной также Эйлеру подстановки $z=e^{\omega}$, которая преобразовала уравнение в более простое:

$$\frac{\partial \omega}{\partial x}+A\frac{\partial \omega}{\partial y}+C=0.$$

Последнее уравнение решается затем так же, как это делает в рассмотренных выше примерах Эйлер. К уравнению присоединяется равенство

$$d\omega=\frac{\partial \omega}{\partial x}\,dx+\frac{\partial \omega}{\partial y}\,dy,$$

которое в силу предыдущего уравнения превращается в равенство

$$d\omega = \frac{\partial\omega}{\partial y}(dy - Adx) - Cdx.$$

Из последнего делается вывод, что

$$\frac{\partial\omega}{\partial y} = \varphi(y - Ax),$$

тогда из уравнения следует, что

$$\frac{\partial\omega}{\partial x} = -C - A\varphi(y - Ax).$$

Зная $\partial\omega/\partial x$ и $\partial\omega/\partial y$, Даламбер находит ω, а затем z.

Решение неоднородного, по современной терминологии, уравнения первого порядка, линейного относительно $\partial z/\partial x$, $\partial z/\partial y$ и z:

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \varphi(x, y)\frac{\partial z}{\partial y} + \psi(x, y)z + \chi(x, y) = 0,$$

Даламбер поставил в зависимость от решения более простого однородного уравнения

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \varphi(x, y)\frac{\partial z}{\partial y} + \psi(x, y)z = 0.$$

Его исследование в указанном направлении близко подводило к общему методу, данному несколько лет спустя Лагранжем.

Новые задачи математической физики

Мы рассмотрели содержание первых специальных работ по уравнениям с частными производными. Наряду с такими исследованиями продолжали выходить статьи, посвященные решению отдельных физических задач. Назовем важнейшие из них.

В 1759 г. Эйлер представил Берлинской академии наук три большие работы: «О распространении звука», «Дополнение к исследованиям о распространении звука» и «Продолжение исследований о распространении звука» (De la propagation du son; Supplément aux recherches sur la propagation du son; Continuation des recherches sur la propagation du son. Mém. Ac. Berlin, (1759) 1766). Некоторые результаты этих и других исследований о колебаниях в упругой среде Эйлер изложил также в письме к Лагранжу от 1 января 1760 г. (Miscellanea Taurinensia, 1760—1761). Из основных уравнений гидродинамики Эйлер вывел общие дифференциальные уравнения для смещений p, q, r частиц воздуха при звуковых колебаниях. Он получил волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z}\right), \qquad (26)$$

где a — постоянная, и аналогичные уравнения для q и r. Проинтегрировать волновое уравнение (26) для трехмерного пространства в общем виде ему не удалось. Найти общее решение Эйлеру удалось лишь для случая сферических волн, когда движение направлено от некоторого фиксиро-

ванного центра (источника звука) и скорости в точках, равноудаленных от центра, одинаковы. Тот же результат был получен Лагранжем в 1760 г.

Эйлер рассмотрел и более сложную задачу о движении воздуха в трубе постоянного сечения (плоские звуковые волны). Для соответствующего волнового уравнения он искал частные решения. Общее решение линейного волнового уравнения для трехмерного пространства было дано лишь в XIX в. Риманом с помощью так называемой функции Римана.

Вскоре Эйлер опубликовал статьи «О движении струн переменной толщины» и «Об интегрировании уравнения $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{b}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{c}{x^2}z$» (Recherches sur le mouvement des cordes inégalement grosses; Recherches sur l'intégration de l'équation... Miscellanea Taurinensia, 1762—1765), в которых выводится и исследуется как уравнение, указанное в заголовке второй статьи, так и уравнение колебания струны переменной толщины:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = p^2(x)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \tag{27}$$

где $p(x)$ — известная функция.

О методах Эйлера решения волнового уравнения в частных случаях мы скажем несколько далее.

В упомянутом письме к Лагранжу от 1 января 1760 г. Эйлер говорил. в частности, о задаче о колеблющейся мембране, решение которой изложил в статье «О колебании мембран» (De motu vibratorio tympanorum. Novi Commentarii, (1764) 1766). Он свел задачу к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \tag{28}$$

которое называется теперь уравнением цилиндрических волн.

Эйлер нашел полную систему частных, т. е. собственных, колебаний уравнения (28) как для прямоугольной, так и для круглой мембраны. При решении последней задачи он ввел впервые цилиндрические функции с произвольным целым индексом. Частный случай цилиндрических функций — функции нулевого индекса открыл еще Д. Бернулли в 1732 г.

В случае круглой мембраны Эйлер преобразовал уравнение (28) к полярным координатам r и φ:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}, \tag{29}$$

и допустил, что решение имеет вид

$$z(r, \varphi, t) = u(r)\sin\alpha t\cdot\sin\beta\varphi,$$

где α и β — некоторые постоянные величины. Для определения функции $u(r)$ Эйлер, применив еще одно преобразование, получил уравнение типа Риккати, решить которое в элементарных функциях удается лишь в неко-

торых случаях. Поэтому Эйлер прибегнул к разложениям в ряды. Таким образом он нашел ряд

$$u(r)=r^{\beta}\left\{1-\frac{1}{1(\beta+1)}\left(\frac{\alpha r}{2}\right)^{2}+\frac{1}{1\cdot2(\beta+1)(\beta+2)}\left(\frac{\alpha r}{2}\right)^{4}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{1\cdot2\cdot3(\beta+1)(\beta+2)(\beta+3)}\left(\frac{\alpha r}{2}\right)^{6}+\ldots\right\},$$

который с точностью до числового множителя совпадает с так называемой бесселевой функцией $J_{\beta}(\alpha r)$ целого индекса β.

Третий том «Интегрального исчисления» Эйлера

Большинство изложенных выше результатов вошло в первую монографию, посвященную уравнениям с частными производными. Такого рода монографией явился основной отдел третьего тома «Интегрального исчисления» (1770) Эйлера. Этот отдел, занимающий более двух третей тома, озаглавлен «Метод определения функций двух и многих переменных из данного дифференциального соотношения любого порядка». Подавляющая часть содержания принадлежит здесь лично Эйлеру и показывает, какую огромную роль сыграл Эйлер в развитии рассматриваемой дисциплины.

«Метод определения функций...» делится на две части, в первой из которых рассмотрена проблема отыскания функций двух независимых переменных, а во второй — проблема отыскания функций трех или более независимых переменных. В трех разделах первой части рассматриваются соответственно уравнения первого, второго и третьего и более высоких порядков. Здесь, как и во второй части, исследуются отдельные уравнения, о системах не говорится.

Некоторые важные открытия Эйлера в этой области, полученные в связи с решением задач механики, в «Интегральное исчисление» не вошли. Это относится, например, к решению задачи о колебании мембраны. Эйлер включил в свою книгу в основном только те уравнения, решение которых он мог получить в явном виде при помощи произвольных функций.

В части «Интегрального исчисления», посвященной отысканию функций двух независимых переменных, изложено, в частности, содержание его статьи «Определение функций из данного дифференциального соотношения», о которой мы говорили выше. Здесь приводится решение рассмотренного нами выше линейного уравнения первого порядка (23) и указанных выше нелинейных уравнений первого порядка. Здесь же Эйлер дает общие решения многочисленных нелинейных уравнений первого порядка. При этом ряд нелинейных уравнений сводится к линейным при помощи преобразования

$$d(z-px-qy)=-xdp-ydq\quad\left(p=\frac{\partial z}{\partial x},\ q=\frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

которое впоследствии стало несправедливо называться «преобразованием Лежандра». Эйлер пользуется также несимметричным преобразованием

$$d(z-qy)=pdx-ydq.$$

При решении уравнений в частных производных первого порядка Эйлер фактически пользуется теми линиями интегральной поверхности, ко-

торые в настоящее время называются характеристиками, но геометрическую картину решения он, очевидно, себе не представлял,— эту сторону дела раскрыл, главным образом, Монж. Эйлер подчеркивает. что произвольная функция, входящая всегда в выражение общего решения, может быть «разрывной» в его смысле слова.

Так как интегрирование уравнений с частными производными первого порядка Эйлер сводит к интегрированию соответствующих уравнений в полных дифференциалах, то в первой главе первого раздела первой части третьего тома «Интегрального исчисления» Эйлер рассматривает уравнение

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0,$$

являющееся обобщением уравнения

$$Mdx + Ndy = 0,$$

и говорит об условиях его интегрируемости.

Эйлер считал. что если условия интегрируемости не выполняются, то указанное дифференциальное уравнение теряет смысл — становится «нереальным». Мы видели (см. т. II, стр. 247), что Ньютон, рассматривая простейший пример такого уравнения, правильно указал, что в этом случае можно дополнительно ввести произвольную зависимость между двумя переменными, входящими в уравнение, и тогда уравнение преобразуется к интегрируемой форме. Во второй главе того же раздела интегрируются уравнения вида:

$$p = \varphi (x, y, z), \quad q = \psi (x, y, z),$$

где $p = \partial z/\partial x$, $q = \partial z/\partial y$. В третьей главе рассматриваются уравнения типа $\varphi (p, q) = 0$ и, как частный случай,— линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами

$$\alpha p + \beta q = \gamma .$$

В четвертой главе интегрируются уравнения вида:

$$\varphi (x, p, q) = 0, \quad \varphi (y, p, q) = 0.$$

В пятой главе указаны способы построения общего интеграла для уравнений вида $\varphi (x, y, p, q) = 0$, в частности линейного уравнения (23), и «уравнения с разделенными переменными»

$$P (x, p) = Q (y, q).$$

В шестой главе рассматриваются отдельные типы уравнений:

$$Z (z) = pX (x) + qY (y), \qquad q = T (x, y) + V (x, z).$$
$$z = M (x, y) p + N (x, y) q, \quad Z (z) = pP (x, y) + qQ (x, y).$$

В конце этой же главы метод интегрирования линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами распространяется на случай трех независимых переменных. Однако Эйлер ставит задачу отыскания решений, зависящих только от двух переменных.

Во втором и третьем разделах первой части, как уже сказано, изложена теория дифференциальных уравнений второго и более высоких по-

рядков для функций двух переменных. Здесь прежде всего дается теория преобразования уравнений к другим независимым переменным. При этом Эйлер пользуется функциональным определителем этого преобразования, который позднее назвали именем К. Г. Якоби (XIX в.). Эйлер рассматривает также вопрос о преобразовании уравнения при заменах зависимой переменной z через новую переменную v, а именно $z = vp$, $z = v + p$, где $p = p(x, y)$ — заданная функция.

Следует подчеркнуть, что основное внимание во всей монографии Эйлер уделяет уравнениям в частных производных второго порядка, преимущественно гиперболического типа. К таким уравнениям, как говорилось, приводили в то время задачи о колебаниях струн, мембран, упругих стержней, о распространении звука.

Сначала дается общее решение при помощи произвольных функций простейших уравнений второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = P(x, y), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = P(x, y)\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y),$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = P(x, y), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = P(x, y)\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y), \qquad (30)$$

которые заменой $\partial z/\partial x = v$ легко приводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

При интегрировании этих простейших уравнений второго порядка Эйлер формулирует постановку задачи с начальными условиями и говорит, что такую задачу можно решить только тогда, когда можно найти общий (полный, по Эйлеру) интеграл уравнения.

Затем рассматривается уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = az,$$

к которому в настоящее время сводится телеграфное уравнение. Подстановкой $z = e^{\alpha x} Y(y)$ Эйлер находит его частные решения вида

$$z = Ae^{\alpha x + \frac{ay}{\alpha}}$$

и

$$z = B \sin(mx - ny), \text{ или } z = B \cos(mx - ny),$$

где $mn = a$, и указывает на возможность получения более общих решений в виде линейных комбинаций решений такого вида. Однако он сомневается, можно ли таким путем получить общее решение уравнения в случае, когда оно представляет «разрывную» в его смысле функцию.

Непосредственно далее исследуется наиболее общее линейное уравнение второго порядка, содержащее смешанную вторую производную:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + P\frac{\partial z}{\partial x} + Q\frac{\partial z}{\partial y} + Rz + S = 0. \qquad (31)$$

Эйлер выясняет, какими должны быть функции P, Q, R и S, зависящие от x и y, чтобы общее решение уравнения можно было записать в явном виде. Для этой цели он полагает $z = e^V v$, где $V = V(x, y)$ — любая заданная

функция, и находит, что при выполнении равенств:

$$P = T - \frac{\partial V}{\partial y}, \qquad Q = -\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad R = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y} - T\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial y}$$

новая искомая функция $v(x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y} + T\frac{\partial v}{\partial x} + e^{-V}S = 0,$$

принадлежащему к уравнениям вида (30), которые он уже проинтегрировал с помощью произвольных функций.

Общее решение уравнения (31) гиперболического типа при произвольных функциях P, Q, R, S было дано только в следующем столетии (при помощи фундаментальных решений и квадратур).

Далее решается уравнение (5) колебания струны.

В последующих задачах при исследовании гиперболических уравнений с переменными коэффициентами Эйлер каждый раз переходит к характеристическим координатам, т. е. к таким, что из вторых производных в уравнении остается только $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial t}$, и ищет условия, при которых решение задачи сводится к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Исследуя общее линейное уравнение гиперболического типа с переменными коэффициентами

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2P\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + (P^2 - Q^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + R\frac{\partial z}{\partial y} + S\frac{\partial z}{\partial x} + Tz + V = 0, \tag{32}$$

Эйлер вводит общие характеристические координаты

$$t = \int p\,[dx + (P + Q)\,dy] \quad \text{и} \quad u = \int q\,[dx + (P - Q)\,dy],$$

где p и q — интегрирующие множители. В координатах t и u уравнение (32) сводится к уже рассмотренному уравнению (31). Хотя у Эйлера не было общего метода решения последнего уравнения, важное значение имело уже введение общих характеристических координат.

Во втором разделе первой части рассмотрено уравнение

$$(x + y)^2\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + m(x + y)\left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\right) + nz = 0, \tag{33}$$

впоследствии названное уравнением Эйлера — Пуассона (иногда его неверно называют «уравнением Дарбу», хотя Дарбу ссылался в соответствующем вопросе на Эйлера и Пуассона). Уравнение (33) и его решение, данное Эйлером, в дальнейшем нашло большое число применений в газовой динамике. Сам Эйлер пришел к нему в связи с исследованиями о распространении звука и о колебании струн переменной толщины. Он получил общее решение уравнения (33) при целых m в виде формулы, содержащей две произвольные функции и конечное число их производных. В том же разделе книги и таким же образом Эйлер выразил общие решения еще ряда уравнений гиперболического типа.

Третий раздел первой части невелик по сравнению с предыдущими, но также содержит важные результаты в интегрировании уравнений третьего и более высокого порядков. Здесь на простейших примерах устанавливается, что общее решение уравнения в частных производных содержит столько произвольных функций, каждая из которых зависит от одной переменной, каков порядок уравнения.

Здесь Эйлер рассматривает случаи, когда однородно-линейное дифференциальное уравнение сводится к уравнениям менее высокого порядка, в частности, уравнение

$$\frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$

сводящееся к двум уравнениям:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -a\frac{\partial z}{\partial x},$$

для которых даются частные решения вида:

$$z = e^{\lambda a(y \pm \lambda x)}, \quad z = e^{\pm \lambda a x}\cos(\lambda a y + \alpha).$$

Эйлер рассматривает также однородно-линейное уравнение любого порядка с постоянными коэффициентами

$$A\frac{\partial^\lambda z}{\partial x^\lambda} + B\frac{\partial^\lambda z}{\partial x^{\lambda-1}\partial y} + C\frac{\partial^\lambda z}{\partial x^{\lambda-2}\partial y^2} + \dots \quad (34)$$

Он образует характеристическое уравнение

$$Au^\lambda + Bu^{\lambda-1} + Cu^{\lambda-2} + \dots = 0$$

и, обозначив корни этого уравнения через α, β, γ,..., дает общее решение уравнения (34) в виде

$$z = \Gamma(y + \alpha x) + \Delta(y + \beta x) + \Sigma(y + \gamma x) + \dots$$

Прямые $y + \alpha x = \text{const}$, $y + \beta x = \text{const}$,... в настоящее время носят название характеристик уравнения (34). Мы видим таким образом, что Эйлер положил начало теории характеристик для уравнений в частных производных любого порядка.

В небольшой второй части третьего тома «Интегрального исчисления», посвященной уравнениям для функций трех аргументов, исследование ведется теми же методами, как и в случае функций двух переменных.

В заключительном параграфе второй части Эйлер писал, что в его книге «содержатся лишь первые элементы этой науки, дальнейшее развитие которой следует всячески рекомендовать проницательности геометров» [1]. Он говорит далее, что из-за недостатка материала он не решился даже приступить к уравнениям второго порядка для функций четырех переменных, и отмечает «величайшее» значение для гидромеханики уравнения

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2},$$

общий интеграл которого должен содержать две произвольные функции. Эйлер указывает на существование бесчисленных частных решений

$$v = \Gamma(\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta t)$$

---

[1] *Л. Эйлер.* Интегральное исчисление, т. III, стр. 303.

при условии $\delta^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$, а также

$$v = \frac{\Gamma\left(t \pm \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

(по современной терминологии — опережающие и запаздывающие потенциалы неподвижного источника) и

$$v = \frac{\Gamma\left(x \pm \sqrt{t^2 - y^2 - z^2}\right)}{\sqrt{t^2 - y^2 - z^2}}.$$

В XIX в. Пуассон и другие ученые показали, что, используя каждый из указанных Эйлером частных видов решений, можно построить общее решение.

Таково исключительно богатое содержание монографии Эйлера по уравнениям с частными производными, сыгравшей в свое время огромную роль. В ней заложены основы будущих важнейших методов — метода характеристик и метода рядов для решения уравнений в частных производных. Большое число содержащихся в ней результатов и приемов сохраняет значение и до наших дней.

Новые успехи в теории уравнений первого порядка

В последней трети XVIII в. прежде всего были достигнуты большие успехи в создании общей теории линейных и нелинейных уравнений в частных производных первого порядка. Наряду с этим различные проблемы механики и физики приводили к изучению отдельных типов уравнений в частных производных высших порядков.

Выше говорилось, что ряд уравнений первого порядка проинтегрировали еще Эйлер и Даламбер, сводя задачу к интегрированию соответствующих уравнений в полных дифференциалах. Большая роль в их методах отводилась нахождению интегрирующих множителей, в чем и заключалась трудность этих методов.

Общее линейное уравнение для функции двух переменных

$$P(x, y)\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y)\frac{\partial z}{\partial y} = R(x, y, z) \qquad (35)$$

решили почти одновременно Лаплас и Лагранж. Свое решение Лаплас изложил в «Исследованиях по интегральному исчислению в частных дифференциалах» (Recherches sur le calcul intégral aux différentielles partielles, Mém. Ac. Paris., (1773) 1777). Лаплас при этом отправлялся от работ Даламбера и Эйлера. Он вводил вспомогательную переменную, выбирал ее подходящим образом и использовал разложение искомой функции в ряд. В той же работе свой метод решения Лаплас применил и к уравнению в частных производных второго порядка. Позднее его метод получил название «метода каскадов», о нем мы еще будем говорить далее (см. стр. 440).

Метод Лагранжа, изложенный в статье «О частных интегралах дифференциальных уравнений» (1774) 1776 (см. стр. 404), заключался в сведéнии

интегрирования уравнения (35) к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{P(x, y)} = \frac{dy}{Q(x, y)} = \frac{dz}{R(x, y, z)}. \quad (36)$$

Метод Лагранжа, о котором идет речь, и поныне входит в учебники по дифференциальным уравнениям. Этот метод в статьях, опубликованных в «Записках» Берлинской академии в 1781—1785 гг., Лагранж распространил на линейные уравнения первого порядка с любым числом переменных. В связи с этим он подчеркнул, что решение уравнений с частными производными зависит от искусства сведе́ния их к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

На протяжении 70—90-х годов Лагранж занимался исследованием и нелинейных уравнений первого порядка общего вида

$$F(x, y, z, p, q) = 0, \quad (37)$$

где

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Результаты, полученные в области дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка на протяжении почти трети века, Лагранж систематически изложил в знаменитых «Лекциях об исчислении функций» (1806).

Метод Лагранжа — Шарпи

В третьем томе «Интегрального исчисления» (1770) Эйлер показал, что любое уравнение первого порядка с тремя переменными можно привести к линейному уравнению с четырьмя переменными. Этот результат, которому сам Эйлер не придал существенного значения, вскоре был оценен Лагранжем в статье, помещенной в «Записках» Берлинской Академии за 1772 г. (1774), в которой подробно исследовался вопрос о сведе́нии одного дифференциального уравнения к другому.

Однако ни Эйлер, ни Лагранж не завершили решения нелинейного уравнения первого порядка. Их идеи были затем развиты в работах П. Шарпи и Г. Монжа.

Работа П. Шарпи, подававшего большие надежды, но умершего молодым (около 1785 г.), была представлена Парижской академии наук в 1784 г., но осталась неопубликованной. О ней говорится в известном французском учебнике Лакруа — «Трактате по дифференциальному и интегральному исчислению» (т. II, Париж, 1814). Метод решения нелинейного уравнения в частных производных первого порядка, развитый Лагранжем и Шарпи, до сих пор входит в учебники под именами обоих этих ученых. Идея метода состоит в том, что к нелинейному уравнению (37) подбирается другое уравнение

$$\Phi(x, y, z, p, q) = a, \quad (38)$$

содержащее произвольную постоянную a так, чтобы система уравнений (37) и (38) стала бы вполне интегрируемой. Для этого необходимо, чтобы систему можно было решить относительно совокупности переменных p

и q и чтобы найденные при этом функции удовлетворяли условию полной интегрируемости:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}. \qquad (39)$$

Условие (39) приводит к линейному уравнению в частных производных для подбираемой функции $\Phi(x, y, z, p, q)$:

$$P\frac{\partial \Phi}{\partial x} + Q\frac{\partial \Phi}{\partial y} + (Pp + Qq)\frac{\partial \Phi}{\partial z} - (X + Zp)\frac{\partial \Phi}{\partial p} - (Y + Zq)\frac{\partial \Phi}{\partial q} = 0,$$

где

$$X = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial F}{\partial z}, \quad P = \frac{\partial F}{\partial p}, \quad Q = \frac{\partial F}{\partial q}.$$

Достаточно найти одно частное решение последнего уравнения, а так как оно эквивалентно системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{Pp + Qq} = -\frac{dp}{X + Zp} = -\frac{dq}{Y + Zq}, \qquad (40)$$

то достаточно найти один первый интеграл этой системы

$$\Phi(x, y, z, p, q) = a.$$

После подбора функции $\Phi(x, y, z, p, q)$ в уравнении (38) из системы уравнений (37) и (38) находят p и q:

$$p = \varphi_1(x, y, z, a) \text{ и } q = \varphi_2(x, y, z, a)$$

и для неизвестной функции $z(x, y)$ получается вполне интегрируемое уравнение

$$dz = \varphi_1(x, y, z, a)\, dx + \varphi_2(x, y, z, a)\, dy.$$

Интеграл последнего уравнения

$$V(x, y, z, a, b) = 0,$$

где a и b — произвольные постоянные, будет так называемым полным интегралом нелинейного уравнения (37).

Шарпи пытался распространить метод, о котором только что шла речь, на уравнения с большим числом переменных, но ему не удалось преодолеть встретившиеся при этом трудности. Новые методы решения нелинейных уравнений в частных производных первого порядка были даны в следующем столетии, в трудах И. Ф. Пфаффа, О. Коши, К. Г. Якоби.

В названных выше статьях, опубликованных в 1774 и 1776 гг., Лагранж в общем виде установил связи между различными видами решений уравнений в частных производных первого порядка и ввел сохранившуюся до настоящего времени терминологию.

Как мы только что сказали, решение уравнения (37)

$$z = \varphi(x, y, a, b),$$

зависящее от двух произвольных постоянных, Лагранж назвал «полным». Пользуясь приемом варьирования постоянных, употребленным им тогда же для обыкновенных неоднородных линейных дифференциальных уравнений, он показал, что из полного решения можно получить все другие.

Если в полном решении положить

$$b = \psi(a),$$

где $\psi(a)$ — произвольная функция, а затем из уравнений

$$z = \varphi[x, y, a, \psi(a)] \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial a} = 0$$

исключить a, то получится решение, названное им «общим». Наконец, исключение a и b из уравнений

$$z = \varphi(x, y, a, b), \qquad \frac{\partial z}{\partial a} = 0, \qquad \frac{\partial z}{\partial b} = 0$$

доставляло Лагранжу решение, которое он назвал сначала «специальным», а позже, в «Теории аналитических функций» (1797), «особым».

Лагранж ввел также сам термин «решение» дифференциального уравнения вместо «интеграл» в связи с тем, что решение не всегда сводится к квадратурам.

В статьях 1774 (1776) и 1779 (1781) гг. Лагранж вкратце охарактеризовал и геометрический смысл различных видов решений дифференциальных уравнений в частных производных и разъяснил его на некоторых примерах. Однако в целом Лагранж, как Эйлер и Даламбер, развивал аналитико-вычислительные методы теории дифференциальных уравнений.

Геометрическая теория Монжа

Начало геометрической теории уравнений в частных производных было положено главным образом в трудах выдающегося геометра Гаспара Монжа, подметившего глубокие связи между этими уравнениями и свойствами поверхностей и пространственных кривых. Соответствующие публикации Г. Монжа появлялись начиная с 70-х годов XVIII в. Мы отметим прежде всего «Мемуар об интегральном исчислении уравнений в частных дифференциалах» (Mémoire sur le calcul intégral des équations aux différences partielles. Mém. Ac. Paris, (1784) 1787). Вместе с этой работой в том же томе «Записок» Парижской академии был опубликован еще ряд статей Монжа, тесно связанных с ней по содержанию. Из дальнейших работ Монжа особенно важное значение имеют уже упоминавшиеся его книги: «Листы анализа, приложенного к геометрии» (1795; изд. 2—1801, изд. 3 — 1805), «Приложение алгебры к геометрии» (1805; написана совместно с учеником Монжа Ж. Ашеттом) и «Приложение анализа к геометрии» (1807). В последнюю книгу вошло основное содержание двух предыдущих. В конце книги дается важное добавление под названием «Об интегрировании уравнений в частных разностях первого порядка с тремя переменными». В основу перечисленных книг были положены лекции, прочитанные Г. Монжем в Политехнической школе.

В своих работах, законченных к 1784 г., Монж, исходя из геометрического образования целого ряда поверхностей, вывел их дифференциальные уравнения, а затем, с помощью обратных умозаключений, получал интегралы дифференциальных уравнений.

Например, рассматривая цилиндрические поверхности, образующие которых параллельны прямой:

$$x = az, \qquad y = bz,$$

и выражая условие параллельности с этой прямой касательной плоскости

$$z - z_1 = p (x - x_1) + q (y - y_1),$$

Монж нашел дифференциальное уравнение цилиндрических поверхностей

$$ap + bq = 1.$$

Общий интеграл последнего уравнения Монж получил затем следующим способом. Уравнения образующей рассматриваемых поверхностей должны иметь вид:

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta,$$

где α и β постоянны для конкретной образующей и меняются при переходе от одной образующей к другой. Так как α и β одновременно бывают постоянны и одновременно начинают изменяться, Монж заключил, что они находятся в некоторой зависимости друг от друга, $\beta = \varphi (\alpha)$, откуда вытекает равенство

$$y - bz = \varphi (x - az),$$

являющееся конечным уравнением цилиндрических поверхностей, т. е. искомым интегралом дифференциального уравнения.

Таким же способом Монж рассматривал семейства конических поверхностей, поверхностей вращения, каналовых поверхностей (образующихся движением окружности постоянного радиуса, плоскость круга которой перпендикулярна заданной кривой, а центр передвигается по ней), поверхностей склонов насыпей, винтовых поверхностей, получая для них дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка, а затем — интегралы этих уравнений. Монж рассматривал и более сложные семейства поверхностей, приводящие к дифференциальным уравнениям в частных производных высшего порядка (общие линейчатые поверхности и др.).

Характеристики

В тех же работах Монж разработал метод характеристик и, опираясь на геометрические соображения, показал, что интегрирование уравнений в частных производных первого порядка сводится к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Метод характеристик Монжа и его геометрическая трактовка решения дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$F (x, y, z, p, q) = 0 \tag{37}$$

особенно ясно изложены в его «Приложении анализа к геометрии». Полный интеграл таких уравнений

$$f (x, y, z, a, b) = 0$$

представляет собой двухпараметрическое семейство поверхностей. Поверхности, возникающие при $b = \varphi (a)$, где $\varphi (a)$ — произвольная функция, и принадлежащие, следовательно, к однопараметрическому семейству, Монж назвал огибаемыми. Огибающая их поверхность, уравнение

которой получается путем исключения параметра a из уравнений

$$f(x, y, z, a, \varphi(a)) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial f}{\partial a} = 0, \tag{41}$$

оказывалась геометрическим образом общего интеграла дифференциального уравнения (37).

Кривые, по которым пересекаются любые две последовательные поверхности семейства или же вдоль которых огибаемые касаются огибающей, т. е. кривые, заданные уравнениями (41) при фиксированных значениях параметра a, Монж назвал «характеристиками» и придавал им большое значение, так как именно они лучше всего характеризуют огибающую интегральную поверхность, являясь образующими этой поверхности.

Наконец, огибающую семейства характеристик, определяемую уравнениями:

$$f(x, y, z, a, \varphi(a)) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial a^2} = 0, \tag{42}$$

Монж назвал ребром возврата огибающей поверхности, ибо точки этой линии являются, вообще говоря, точками возврата для кривой, по которой огибающая поверхность пересекается с плоскостью, не проходящей через касательную к ребру. Ввиду произвольности функции $\varphi(a)$ общий интеграл дифференциального уравнения (37) заключает в себе бесчисленное множество огибающих поверхностей.

Исходя из определения характеристики и полного дифференциала функции $F(x, y, z, p, q)$ в уравнении (37)

$$Pdp + Qdq + Xdx + Ydy + Zdz = 0,$$

для нахождения уравнений характеристик Монж получил систему обыкновенных уравнений

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{Pp + Qq} = -\frac{dP}{X + pZ} = -\frac{dq}{Y + qZ} \tag{43}$$

(ср. эту систему с системой (40) в методе Лагранжа — Шарпи).

Зная уравнения характеристик — образующих огибающей интегральной поверхности, Монж находил и общий интеграл уравнения (37).

Благодаря работам Монжа теория интегрирования дифференциальных уравнений первого порядка с тремя переменными к началу XIX в. стала геометрически прозрачной. Монж сделал первые шаги и по применению метода характеристик к уравнениям в частных производных высших порядков. При этом он, между прочим, ввел сокращенные обозначения частных производных высших порядков (r, s, t), ставшие впоследствии общеупотребительными в дифференциальной геометрии и в теории дифференциальных уравнений.

В XIX в. метод характеристик Монжа стал отправным пунктом для соответствующего метода Коши решения дифференциальных уравнений в частных производных.

Уравнение Пфаффа

Геометрические выводы Монжа внесли также ясность в трактовку уравнения

$$P\ (x,\ y,\ z)\ dx + Q\ (x,\ y,\ z)\ dy + R\ (x,\ y,\ z)\ dz = 0, \qquad (44)$$

названного впоследствии уравнением Пфаффа.

Как уже говорилось (см. стр. 430), Эйлер считал такое уравнение бессмысленным в случае, когда его коэффициенты не удовлетворяют условию интегрируемости. Если же условие интегрируемости выполнено, то его решение представляется соотношением

$$f\ (x,\ y,\ z) = C,$$

где C — константа. Монж показал, что в этом случае любые кривые, расположенные на поверхности семейства

$$f\ (x,\ y,\ z) = C,$$

ортогональны к кривым, определяемым системой

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}.$$

Если же условие интегрируемости не выполнено, то, как показал Монж, при задании дополнительной зависимости $\varphi\ (x,\ y,\ z) = 0$ уравнение (44) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению с двумя переменными и определяет однопараметрическое семейство кривых, лежащих на поверхности $\varphi\ (x,\ y,\ z) = 0$ и ортогональных к кривым той же системы

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}.$$

Г. Монж рассматривал отдельные случаи и нелинейных уравнений вида

$$F\ (x,\ y,\ z,\ dx,\ dy,\ dz) = 0.$$

По предложению норвежского математика Софуса Ли уравнения такого вида стали в XIX в. называть уравнениями Монжа.

Метод каскадов Лапласа

В последней трети XVIII в. были получены некоторые крупные результаты и в области уравнений в частных производных второго порядка, связанных с задачами механики и физики.

Поиски единого приема решения известных в указанное время уравнений в частных производных второго порядка привели Лапласа к так называемому методу каскадов (название дано было позднее). Как уже говорилось (см. стр. 434), Лаплас решил этим методом линейное уравнение первого порядка с тремя переменными в «Записках» Парижской академии ((1773) 1777) и тут же применил его к линейному уравнению с частными производными второго порядка

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \beta \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \gamma \frac{\partial z}{\partial x} + \delta \frac{\partial z}{\partial y} + \lambda z + T = 0, \qquad (45)$$

где α, β, γ, δ, λ, T — заданные функции x и y, и предполагается, что $\alpha^2 > 4\beta$ (т. е., как мы теперь говорим, предполагается, что тип уравнения гиперболический). Вводя две новые переменные, Лаплас сначала привел уравнение (45) к виду

$$D(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial s_1}\, m \frac{\partial u}{\partial s} + n \frac{\partial u}{\partial s_1} + lu + T = 0, \tag{46}$$

после этого искомую функцию $u(s, s_1)$ Лаплас ищет в виде ряда

$$u(s, s_1) = A_0 \varphi_1(s) + A_1 \varphi_2(s) + A_2 \varphi_3(s) + \ldots$$
$$\ldots + B_0 \psi_1(s_1) + B_1 \psi_2(s_1) + B_2 \psi_3(s_1) + \ldots,$$

в котором функции $\varphi_k(s)$ и $\psi_k(s_1)$ ($k = 1, 2, \ldots$) выражаются через две произвольные функции $\varphi(s)$ и $\psi(s)$ равенствами:

$$\varphi_1(s) = \int \varphi(s)\, ds, \qquad \varphi_2(s) = \int \varphi_1(s)\, ds, \ldots$$
$$\psi_1(s) = \int \psi(s_1)\, ds_1, \quad \psi_2(s_1) = \int \psi_1(s_1)\, ds_1, \ldots$$

Коэффициенты A_0, $A_1, \ldots, B_0$, $B_1, \ldots$ определяются дифференциальными уравнениями, получающимися при подстановке ряда в уравнение (46):

$$\frac{\partial A_0}{\partial s_1} + mA_0 = 0, \qquad \frac{\partial B_0}{\partial s} + nB_0 = 0,$$
$$\frac{\partial A_1}{\partial s_1} + mA_1 + D(A_0) = 0, \qquad \frac{\partial B_1}{\partial s} + nB_1 + D(B_0) = 0,$$
$$\frac{\partial A_2}{\partial s_1} + mA_2 + D(A_1) = 0, \qquad \frac{\partial B_2}{\partial s} + nB_2 + D(B_1) = 0,$$

и т. д. и т. д.

Если в ходе решения последних уравнений при некотором определенном значении индекса k коэффициенты $A_k = 0$ или $B_k = 0$, то ряд (46) для $u(s, s_1)$ обрывается и общий интеграл дифференциального уравнения $D(u) = 0$ выражается в конечной форме. Если же этот случай не имеет места, то, как показал Лаплас в своем «Мемуаре о рядах» (Mémoire sur les suites. Mém. Ac. Paris, (1799) 1782), искомое решение можно выразить с помощью определенных интегралов, в которые преобразуется ряд. Именно, тогда $u(s, s_1)$ можно привести к форме

$$u = \int_0^s p \varphi(z)\, dz + \int_0^{s_1} p_1 \psi(z)\, dz,$$

где p и p_1 — частные интегралы уравнения (46), имеющие вид:

$$p = \int_0^s \Gamma(s - z)\, \varphi(z)\, dz, \qquad p_1 = \int_0^{s_1} \Pi(s - z)\, \psi(z)\, dz,$$

а в этих интегралах

$$\Gamma(s - z) = \sum_{k=1}^{\infty} A_{k-1} \frac{(s - z)^{k-1}}{(k-1)!}, \quad \Pi(s - z) = \sum_{k=1}^{\infty} B_{k-1} \frac{(s - z)^{k-1}}{(k-1)!}.$$

В случае, когда l, m, n — постоянные числа, $T = 0$ и

$$m = \frac{f}{s + s_1}, \; n = \frac{g}{s + s_1}, \; l = \frac{h}{(s + s_1)^2}.$$

Лаплас с помощью своего метода свел задачу к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка.

Позднее ((1787) 1789) Лежандр дополнил метод каскадов, показав, что он не нуждается в преобразовании общего линейного уравнения к лапласовой форме. Сам Лаплас в 1809 г. решил этим методом уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Теория потенциала; исследования Лагранжа

В последней трети XVIII в. в работах Лагранжа, Лапласа, Лежандра были заложены основы современной теории потенциала — одного из крупнейших разделов математической физики.

Теория потенциала выросла из решения отдельных задач о притяжении тел по закону всемирного тяготения Ньютона. В развитии учения о притяжении тел были заинтересованы в XVIII в. мореплавание, география, геодезия. Перед небесной механикой со времени Ньютона были поставлены сложные проблемы исследования движения небесных тел, в первую очередь Солнечной системы, что было связано с выяснением фигуры Земли и других планет, с необходимостью определения притяжения различных тел друг к другу (закон Ньютона, как известно, говорит лишь о притяжении материальных точек).

Одной из центральных в теории притяжения явилась задача притяжения материальной точки сфероидом (телом, ограниченным замкнутой гладкой поверхностью), в частности эллипсоидом, так как большинство небесных тел имеет форму, близкую к эллипсоиду. При этом вычисление проекций вдоль прямоугольных осей координат силы притяжения сфероидом материальной точки, находящейся внутри, на поверхности или вне этого тела, имело в каждом из трех случаев свои особенности.

Изучение притяжения материальной точки сфероидом потребовало совместных усилий многих выдающихся ученых. После первых достижений, принадлежащих еще Ньютону (1687), этой задачей занимались в XVIII в. Маклорен, Мопертюи, Стирлинг, Т. Симпсон, Эйлер и другие. До Лагранжа и Лапласа были получены результаты лишь для частных случаев эллипсоида; наиболее замечательные принадлежат Ньютону и Маклорену. При этом, хотя Ньютон и его последователь Маклорен и пользовались своеобразными методами интегрирования, они в сильной мере опирались на геометрические построения, меняющиеся от одного конкретного случая к другому. Только попытки Лагранжа и Лапласа аналитически решить задачу о притяжении сфероида в общем виде привели к созданию элементов современной теории потенциала.

Хронологически первой явилась работа Лагранжа «О притяжении эллиптических сфероидов» (Nouv. Mém. Ac. Berlin, (1773) 1775). Результаты, содержащиеся в этом труде, были развиты далее рядом математиков XVIII и XIX вв.: Лапласом, Лежандром, Дж. Айвори, Гауссом, Пуассоном, Дж. Грином и другими. Напомним, что Лагранж ввел здесь тройные интегралы (см. стр. 351).

Изложив приемы вычисления интегралов, взятых по объему тела, Лагранж приступает далее к задаче об определении силы притяжения материальной точки, расположенной где-либо в пространстве, к однородному эллипсоиду. Все результаты, полученные до него, в частности наиболее общие результаты Маклорена, Лагранж находит здесь аналитически. Лагранж впервые полностью исследовал случай притяжения однородным трехосным эллипсоидом единичной массы, расположенной внутри или на поверхности этого эллипсоида, и нашел выражения силы составляющих притяжения в виде однократных определенных интегралов; эти интегралы в XIX в. были приведены к современному виду. Идеи Лагранжа, относящиеся к только что указанному случаю, до сих пор излагаются в учебниках теории потенциала и небесной механики. Лагранж обращает внимание на трудность решения задачи в общем случае, когда притягиваемая точка находится вне эллипсоида.

В том же году, когда Лагранж представил Берлинской академии работу о притяжении сфероидов, он направил Парижской академии мемуар «О вековом уравнении Луны» (Sur l'équation séculaire de la lune. Mém. savants étrangers, (1773) 1774). Здесь устанавливается, что поле тяготения Ньютона является, как говорят теперь, потенциальным и вводится в теорию притяжения функция, которую в XIX в. стали называть потенциальной (Грин, 1828) или силовой (Гельмгольц, 1834) или просто потенциалом (Гаусс, 1840). У Лагранжа эта функция еще не имела специального названия. Он лишь писал о функции, частные производные которой равны компонентам силы притяжения вдоль прямоугольных осей координат.

Для случая двух притягивающих друг друга материальных точек (x, y, z) и (a, b, c), отнесенных к декартовой системе координат и имеющих массы, соответственно равные m и единице, эта функция имеет вид

$$\frac{m}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}},$$

где знаменателем является, как видно, расстояние между точками.

Для случая притяжения материальной точки (a, b, c) с единичной массой неоднородным телом произвольной формы с плотностью $\rho(x, y, z)$ потенциальная функция имеет вид тройного интеграла

$$\iiint \frac{\rho(x, y, z)\, d\tau}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}},$$

взятого по объему притягивающего тела; такой тройной интеграл теперь носит название объемного потенциала.

Ранее говорилось, что Эйлер в своих гидродинамических работах также пользовался понятием потенциальной функции, именно потенциала скоростей. Однако понятие потенциальной функции получило широкое распространение лишь после исследований Лагранжа и его последователей по теории притяжения.

Уравнение Лапласа и сферические функции

Дальнейшее развитие теория притяжения получает прежде всего в трудах Лапласа и Лежандра последней трети XVIII в. Из первых работ Лапласа в этой области наиболее важной является «Теория притяжения сфероидов и фигуры планет» (Théorie des attractions des sphéroïdes et

de la figure des planètes, Mém. Ac. Paris, (1782) 1785). В более обработанном виде он включил ее содержание во второй том «Трактата по небесной механике» (Traité de Mécanique céleste, t. II, Paris, 1799). Лаплас приходит к ряду замечательных открытий, важнейшим из которых является установление связи между введенным Лагранжем объемным потенциалом (Лаплас обозначает его буквой V)

$$V(a, b, c) = \iiint \frac{\rho(x, y, z)\, d\tau}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}$$

и дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка

$$\frac{\partial^2 V}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial c^2} = 0, \tag{47}$$

названным именем Лапласа, хотя, как мы видели (см. стр. 422), оно было известно Эйлеру, Только после работ Лапласа это уравнение получило широкую известность как уравнение, отражающее сущность стационарных процессов, в которых действующие силы в любой момент времени одинаковы для данной точки пространства и зависят лишь от координат этой точки (тепловое равновесие тел, равновесие упругих тел, равновесие электричества на проводнике и т. д.).

Лаплас, однако, не заметил, что уравнение (47) удовлетворяется лишь тогда, когда притягиваемая точка (a, b, c) находится вне притягивающего тела, быть может, потому, что он в основном и занимался случаем внешней точки (a, b, c), наиболее трудным в теории притяжения. Упущение Лапласа было замечено впервые С. Д. Пуассоном (1813), который вывел новое дифференциальное уравнение для случая, когда притягиваемая точка лежит внутри тела,— так называемое уравнение Пуассона.

Не рассматривая всех замечательных результатов «Теории притяжения сфероидов и фигуры планет» Лапласа, мы остановимся лишь на его способе решения уравнения (47) и исследования объемного потенциала $V(a, b, c)$.

Прежде всего Лаплас записывает потенциальную функцию $V(a, b, c)$ и уравнение (47) в сферической системе координат, полагая для простоты, что плотность $\rho(x, y, z)$ притягивающего тела равна единице. Полюс сферической системы берется внутри притягивающего тела в начале декартовых координат. Обозначая через z, θ, ω сферические координаты притягиваемой точки и через R, θ', ω' такие же координаты произвольной точки тела, Лаплас находит, что в новой системе координат функция $V(a, b, c)$ имеет вид интеграла

$$V = \iiint \frac{R^2 \sin\theta' dR d\theta' d\omega'}{\sqrt{r^2 - 2rR\cos\gamma + R^2}}, \tag{48}$$

где $\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\omega - \omega')$, и является косинусом угла между радиус-векторами притягиваемой точки (r, θ, ω) и произвольной точки тела (R, θ', ω'). Квадратный корень в знаменателе, как и в первоначальном выражении $V(a, b, c)$, есть расстояние между притягиваемой точкой и произвольной точкой тела.

Уравнение (47) в сферической системе координат, как впервые показывает Лаплас, приобретает вид

$$\frac{\partial\left[(1-\mu^2)\frac{\partial V}{\partial \mu}\right]}{\partial \mu} + \frac{\frac{\partial^2 V}{\partial \omega^2}}{1-\mu^2} + r\frac{\partial^2 (rV)}{\partial r^2} = 0, \tag{49}$$

где $\mu = \cos\theta$. Затем, предполагая, что точка (r, θ, ω) находится вне притягивающего тела, Лаплас представляет функцию V в виде ряда

$$V = \frac{u^{(0)}}{r} + \frac{u^{(1)}}{r^2} + \frac{u^{(2)}}{r^3} + \ldots, \tag{50}$$

где, говорит он, «благодаря единственности представления интегрального выражения $V, \ldots, u^{(i)}$ является рациональной и целой функцией μ, $\sqrt{1-\mu^2}\sin\omega$ и $\sqrt{1-\mu^2}\cos\omega$, зависящей от природы сфероида»[1].

Далее Лаплас представляет функцию V в виде ряда и для случая, когда притягиваемая точка находится внутри притягивающего тела; ряд при этом располагается по положительным степеням радиус-вектора r притягиваемой точки. Однако, как уже было отмечено, в основном свое внимание Лаплас обращает на случай внешней притягиваемой точки.

Объемный потенциал V в случае внешней притягиваемой точки Лаплас исследует, решая дифференциальное уравнение (49) методом разделения переменных. При этом, находя частные решения этого уравнения, Лаплас впервые дает достаточно разработанную теорию сферических функций.

Подставляя ряд (50) в уравнение (49), он получает дифференциальное уравнение, которому должны удовлетворять функции $u^{(i)}(\theta, \omega)$ при $i = 0, 1, 2, \ldots$:

$$\frac{\partial\left[(1-\mu^2)\dfrac{\partial u^{(i)}}{\partial\mu}\right]}{\partial\mu} + \frac{\dfrac{\partial^2 u^{(i)}}{\partial\omega^2}}{1-\mu^2} + i(i+1)u^{(i)} = 0. \tag{51}$$

Функции Лапласа $u^{(i)}(\theta, \omega)$, зависящие от двух сферических координат — углов θ и ω и являющиеся однозначными и ограниченными решениями дифференциального уравнения (51), в XIX в., прежде всего в трудах Гаусса, стали называться сферическими функциями (их можно рассматривать как функции, определенные на сфере единичного радиуса).

Для исследования функций $u^{(i)}(\theta, \omega)$ в его проблеме Лаплас разлагает в ряд величину

$$T = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rR\cos\gamma + R^2}}, \tag{52}$$

стоящую под знаком тройного интеграла, изображающего функцию V. Величина T, удовлетворяющая уравнению Лапласа (49), благодаря чему и функция V удовлетворяет тому же уравнению в случае внешней притягиваемой точки, в настоящее время называется фундаментальным решением этого уравнения. Лаплас представляет величину T в виде ряда, расположенного по положительным степеням отношения $\frac{R}{r} < 1$ (так как $r > R$ в рассматриваемом случае):

$$T = \frac{Q^{(0)}}{r} + \frac{Q^{(1)}R}{r^2} + \frac{Q^{(2)}R^2}{r^3} + \ldots, \tag{53}$$

и говорит, что коэффициенты $Q^{(i)}$ в этом ряде должны быть многочленами от выражения $\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\omega - \omega')$.

---

[1] *P. S. Laplace.* Oeuvres complètes, t. X, Paris, 1896, p. 362.

Если положить $\cos\gamma = x$, то

$$Q^{(i)}(x) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2i-1)}{1\cdot 2\ldots i}\left[x^i - \frac{i(i-1)}{2(2i-1)}x^{i-2} + \frac{i(i-1)(i-2)(i-3)}{2\cdot 4\cdot(2i-1)(2i-3)}x^{i-4} - \ldots\right]$$
$$(i = 0, 1, 2, \ldots).$$

Тремя десятилетиями позднее (1816) Олинд Родриг выразил полином $Q^{(i)}(x)$ изящной формулой, вошедшей во все современные учебники по теории сферических функций:

$$Q^{(i)}(x) = \frac{1}{2^i(i!)}\frac{d^i(x^2-1)^i}{dx^i}.$$

Подставляя ряд (53) в уравнение вида (49), записанное для T, Лаплас показывает, что многочлены $Q^{(i)}(\cos\gamma)$, как и функции $u^{(i)}(\theta, \omega)$, удовлетворяют уравнению в частных производных (51), т. е.

$$\frac{\partial\left[(1-\mu^2)\frac{\partial Q^{(i)}}{\partial\mu}\right]}{\partial\mu} + \frac{\frac{\partial^2 Q^{(i)}}{\partial\omega^2}}{1-\mu^2} + i(i+1)Q^{(i)} = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots), \qquad (51')$$

и, следовательно, по современной терминологии, многочлены $Q^{(i)}(\cos\gamma)$ также являются сферическими функциями.

Подставляя ряд (53) под знак интеграла (48), почленно интегрируя и сравнивая результат с рядом (50), Лаплас находит, что многочлены $Q^{(i)}(\cos\gamma)$ и функции $u^{(i)}(\theta, \omega)$ должны быть связаны соотношениями

$$u^{(i)}(\theta, \omega) = \iiint R^{i+2}Q^{(i)}\sin\theta' dR d\theta' d\omega' \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots).$$

Интегрируя по R, он находит из этих равенств

$$u^{(i)}(\theta, \omega) = \frac{1}{i+3}\iint R'^{i+3}Q^{(i)}\sin\theta' d\theta' d\omega' \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots),$$

где интегралы берутся по поверхности притягивающего тела; R' — радиус-вектор произвольной точки поверхности.

Полиномы Лежандра

Функции $Q^{(i)}(\cos\gamma)$ — коэффициенты при степенях отношения R/r в ряде (53), являющиеся многочленами i-й степени, позднее получили название полиномов Лежандра от $\cos\gamma$, косинуса угла между радиус-векторами точек (r, θ, ω) и (R, θ', ω'). Действительно, эти полиномы впервые применил А. М. Лежандр в «Исследованиях о притяжении однородных сфероидов» и «Исследованиях о фигуре планет» (Recherches sur l'attraction des sphéroides homogènes, Mém. savants étrangers, 1785; Recherches sur la figure des planètes, Mém. Ac. Paris, (1784) 1787). Во второй работе и ее «Продолжении» (Mém. Ac. Paris, (1789) 1794) Лежандр утверждает, что результаты этих работ были получены им до 1782 г. и что они подсказали Лапласу идеи, которые изложены в его «Теории притяжения сфероидов и фигуры планет», обобщившей результаты Лежандра. На приоритет Лежандра в открытии получивших его имя полиномов указывает ряд математиков и историков математики, основывающихся на упомянутом выше

утверждении самого Лежандра и на анализе соответствующих работ Лежандра и Лапласа.

Лежандр, как и Лаплас вслед за ним, пришел к интересующим нас здесь полиномам $Q^{(i)}(\cos\gamma)$, разлагая в ряд по степеням R/r при $R<r$ или по степеням r/R при $R>r$ функцию

$$\frac{1}{\sqrt{r^2-2rR\cos\gamma+R^2}}, \qquad (52')$$

фигурирующую в проблемах о притяжении тел по закону Ньютона. Эта функция в работах Лежандра входила в состав тройного интеграла, выражающего компоненту силы притяжения однородного эллипсоида вращения в направлении радиус-вектора притягиваемой точки.

Разложение функции (52′), называемой ныне производящей функцией полиномов Лежандра, в ряд по степеням R/r или r/R остается одним из путей получения полиномов Лежандра и в современной теории сферических функций.

В «Исследованиях о притяжении однородных сфероидов» появляются лишь полиномы Лежандра четной степени, но в «Исследованиях о фигуре планет» речь идет уже о полиномах $Q^{(i)}(\cos\gamma)$ любой степени и отчетливо, в виде теорем, сформулирован и доказан ряд их важнейших свойств, в частности свойство ортогональности этих полиномов в интервале $(-1, +1)$ изменения $\cos\gamma$:

$$\int_{-1}^{+1} Q^{(i)}(x)\,Q^{(j)}(x)\,dx=0 \quad \text{при} \quad i\neq j,$$

$$\int_{-1}^{+1} [Q^{(i)}(x)]^2\,dx=\frac{2}{2i+1},$$

где $x=\cos\gamma$.

В «Продолжении исследований о фигуре планет» Лежандр формулирует теорему сложения, говорящую о связи полиномов $Q^{(i)}(\cos\gamma)$, где $\cos\gamma=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\omega-\omega')$, с полиномами $Q^{(i)}(\cos\theta)$, $Q^{(i)}(\cos\theta')$ и с так называемыми функциями Лежандра. Однако теорема сложения полиномов Лежандра появилась прежде в «Теории притяжения сфероидов и фигуры планет» (1782) Лапласа. В названной работе Лаплас предполагает полиномы $Q^{(i)}(\cos\gamma)$ развернутыми по косинусам разности $\omega-\omega'$ и кратных ей. Обозначая через β коэффициент при $\cos n(\omega-\omega')$ $(n=0, 1, 2,\ldots)$ и подставляя развернутое указанным образом выражение $Q^{(i)}(\cos\gamma)$ в уравнение (51′), Лаплас получает для β известное теперь в теории сферических функций обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d\left[(1-\mu^2)\frac{d\beta}{d\mu}\right]}{d\mu}-\frac{n^2\beta}{1-\mu^2}+i(i+2)\beta=0 \qquad (i=0,1,2,\ldots),$$

где $\mu=\cos\theta$.

При $n=0$ это уравнение в современной литературе называется уравнением Лежандра (ему удовлетворяют полиномы Лежандра), хотя впервые, как мы видим, уравнение появилось у Лапласа. При произвольном натуральном n оно носит название дифференциального уравнения присо-

единенных функций Лежандра $Q_n^{(i)}(\mu)$ порядка i и ранга n (сам Лаплас обозначал эти функции иначе).

Лаплас находит вид присоединенных функций $Q_n^{(i)}(\mu)$:

$$Q_n{}^{(i)}(\mu) = (1-\mu^2)^{\frac{i}{2}} - \frac{i^2-n^2}{2(2i-1)}(1-\mu^2)^{\frac{i}{2}-1} + \\ + \frac{(i^2-n^2)[(i-2)^2-n^2]}{2\cdot 4\cdot (2i-1)(2i-3)}(1-\mu^2)^{\frac{i}{2}-3} - \ldots \\ \ldots + (-1)^{\frac{i-n}{2}} \frac{(i^2-n^2)[(i-2)^2-n^2]\ldots[(n+2)^2-n^2)]}{2\cdot 3\ldots\frac{i-n}{2}\cdot 2^{\frac{i-n}{2}}(2i-1)(2i-3)\ldots(i+n+1)}(1-\mu^2)^{\frac{n}{2}},$$

где $\mu = \cos\theta$.

Функции $Q_n^{(i)}(\mu)$, как показал О. Родриг (1816), могут быть представлены формулой

$$Q_n{}^{(i)}(\mu) = (1-\mu^2)^{\frac{n}{2}} \frac{d^n Q^{(i)}(\mu)}{d\mu^n} = (1-\mu^2)^{\frac{i}{2}} \frac{1}{2^i(i!)} \cdot \frac{d^{i+n}}{d\mu^{i+n}}[(\mu^2-1)^i].$$

Затем Лаплас получает равенство, которое в современных символах имеет вид

$$Q^{(i)}(\cos\gamma) = Q^{(i)}(\cos\theta)\,Q^{(i)}(\cos\theta') + \\ + 2\sum_{n=1}^{i} \frac{(i-n)!}{(i+n)!} Q_n{}^{(i)}(\cos\theta)\,Q_n{}^{(i)}(\cos\theta')\cos n(\omega-\omega').$$

В этом равенстве и заключается теорема сложения полиномов Лежандра.

В той же работе, в связи с основной своей задачей о притяжении тел и фигуре планет, Лаплас говорит о разложении какого-либо многочлена от $\mu = \cos\theta$, $\sqrt{(1-\mu^2)}\cos\omega$, $\sqrt{(1-\mu^2)}\sin\omega$, заданного на сфере радиуса a, в ряд вида

$$Y^{(1)}(\theta,\omega) + Y^{(2)}(\theta,\omega) + \ldots,$$

где $Y^{(i)}(\theta, \omega)$ — сферическая функция, удовлетворяющая уравнению (51) в частных производных. Лаплас здесь приходит к выводу, что в таком ряде члены $Y^{(i)}(\theta, \omega)$ должны быть линейными комбинациями вида

$$Y^{(i)}(\theta,\omega) = \sum_{n=0}^{i} (A_{in}\cos n\omega + B_{in}\sin n\omega)\,Q_n{}^{(i)}(\cos\theta),$$

где A_{in}, B_{in} — постоянные коэффициенты. Такой тригонометрический многочлен $Y^{(i)}(\theta, \omega)$ в современной литературе называется общей сферической функцией степени i.

Исследования Лежандра и Лапласа, касающиеся сферических функций, тесно переплетались между собой и находились во взаимодействии.

Результаты исследований своих полиномов Лежандр собрал во втором томе знаменитых «Упражнений по интегральному исчислению» (Exercices de Calcul Intégral. Paris, 1817).

Лаплас развивал теорию сферических функций в более общей форме, нежели Лежандр. Лаплас первый разработал теорию сферических функ-

ций, в том числе полиномов Лежандра, в связи с дифференциальными уравнениями (1782). В пятом томе своего «Трактата по небесной механике» (1825) Лаплас представил полиномы Лежандра целого положительного индекса i в виде определенного интеграла

$$Q^{(i)}(\mu) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} (\mu + \sqrt{-1}\,\sqrt{1-\mu^2}\cos\omega)^i\, d\omega,$$

где $\mu = \cos\theta$. Эта формула входит теперь во все учебники по теории специальных функций. В том же томе «Трактата по небесной механике» Лаплас получил асимптотическую оценку полиномов Лежандра без остаточного члена:

$$Q^{(i)}(\cos\theta) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi n}}\;\frac{\cos\left[\left(i+\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right]}{\sqrt{\sin\theta}},$$

где i — большое число. Во втором томе той же книги (1799) он доказал ортогональность на сфере общих сферических функций $Y^{(i)}(\theta, \omega)$, опираясь на дифференциальное уравнение (51) в частных производных. Здесь же он поставил задачу о разложении произвольной функции $Y(\theta, \omega)$ в ряд по сферическим функциям $Y^{(i)}(\theta, \omega)$, хотя не мог еще установить условия такого разложения.

Вопросом о законности разложения функции двух переменных по сферическим функциям занялся впервые Пуассон (1831). Первое строгое доказательство разложимости дважды дифференцируемой функции двух переменных по сферическим функциям было дано Дирихле (1837). Позднее Бонне, Дини и, наконец, Дарбу доказывали допустимость разложения при более общих предположениях.

С точки зрения современной математической строгости, в рассуждениях Лапласа, относящихся к различным разложениям в ряды и предельным переходам, еще много недоставало. Ряды вида (50), в которых $u^{(i)}(\theta,\omega)$ — сферические функции, как выяснилось позднее, в случае, когда притягиваемая точка находится вблизи поверхности притягивающего тела или на этой поверхности, лишь в редких случаях оказываются сходящимися. В XX в. математики предпочли заменить метод Лапласа другими методами разложения объемного потенциала (А. М. Ляпунова, Вавра). Однако, несмотря на отмеченные недостатки, богатые идеями исследования Лапласа, опирающиеся на понятие объемного потенциала и его связь с дифференциальным уравнением (47) в частных производных, принадлежат к числу основополагающих в области уравнений в частных производных. Исследуя потенциальную функцию для однородных эллипсоидов, Лаплас фактически пользовался обобщенным методом Фурье. На этом пути Лаплас создал в главных чертах общую теорию сферических функций, подошел к разложению произвольной функции двух аргументов в ряд по сферическим и наметил пути этого разложения. Дальнейшее развитие идей Лапласа, решение его методом новых задач, связанных с его уравнением, способствовали постановке краевых задач для эллиптических дифференциальных уравнений в частных производных. При этом разложение функции, заданной на сфере, в ряд по сферическим функциям стало приобретать особенно важное значение. Вместе с разложениями по другим специальным функциям оно послужило основой для формулировки

в конце 20-х годов XIX в. обобщенного метода Фурье разложения функций в ряды. Эта формулировка впервые появилась в ранних работах М. В. Остроградского, относящихся к теории теплопроводности, а вслед за ним — в работах французских математиков Ламе и Дюгамеля.

Дальнейшее развитие теории дифференциальных уравнений с частными производными

Начиная с 30-х годов XVIII в.— времени появления открытий Л. Эйлера и А. Клеро, связанных с полным дифференциалом функции многих переменных и первых подходов к решению простейших дифференциальных уравнений в частных производных, в области таких уравнений был накоплен значительный опыт. Было получено большое число конкретных уравнений в частных производных, к которым приводили задачи механики, астрономии, физики и геометрии. Стало ясным огромное значение теории таких уравнений в развитии точного естествознания. Начали формироваться и получили значительное развитие важнейшие методы решения уравнений в частных производных гиперболического и эллиптического типа.

Из основных трех типов уравнений с частными производными второго порядка, известных с настоящее время, в XVIII в. еще не рассматривались уравнения параболического типа. Но с ними математики встретились уже в самом начале следующего столетия, в теории теплопроводности.

Теории и методы, возникшие в XVIII в., с самого начала следующего столетия усиленно развиваются и обогащаются в связи с весьма расширившимися приложениями. Уравнения в частных производных становятся основным математическим аппаратом не только механики, но и новых областей физики — термодинамики, электродинамики, теории магнетизма. В теории уравнений в частных производных в это время находят отражение новые идеи и методы, созданные в ходе общей реформы всего математического анализа. В частности, появляются теоремы существования и единственности решений уравнений.

В теории уравнений с частными производными первого порядка в XIX в. разрабатываются общие способы интегрирования, пригодные в случае любого числа независимых переменных. Один из таких способов был найден Пфаффом в 1814 г. Затем Коши (1819) и независимо от него Якоби (1837) упростили решение Пфаффа, применив метод характеристик. После этого метод характеристик стал широко применяться для разных видов дифференциальных уравнений в частных производных различных порядков. Большое значение имели разработанные Якоби в связи с работами по механике методы интегрирования нелинейного уравнения первого порядка со многими независимыми переменными.

В теории уравнений с частными производными высших порядков в первой половине XIX в. было получено много важных достижений в решении различных краевых задач. В это время (1807) Фурье впервые вывел общее дифференциальное уравнение теплопроводности в изоморфном твердом теле, как мы теперь говорим, параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

и, решая его, глубоко разработал мощный, носящий теперь его имя

метод разделения переменных (ср. стр. 415). В связи с методом Фурье стоят его известные исследования по теории тригонометрических рядов. В первой половине XIX в. усиленно разрабатывается теория потенциала под воздействием запросов электростатики, электродинамики и теории магнетизма. Над решением краевых задач, возникающих в теории теплопроводности и теории потенциала, работало огромное число крупнейших математиков XIX в., таких, как Гаусс, Фурье, Пуассон, Грин, М. В. Остроградский и т. д.

В XIX в. развитие теории дифференциальных уравнений в частных производных высших порядков пошло по пути создания отдельных теорий со своими методами и постановками задач для основных типов таких уравнений, называемых гиперболическими, эллиптическими и параболическими. Впрочем, сама классификация уравнений в частных производных была дана Дюбуа-Реймоном лишь во второй половине XIX в.

ДЕСЯТАЯ ГЛАВА

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Функционалы и их экстремумы

Во многих задачах анализа и математического естествознания важную роль играет отыскание экстремумов переменных величин, теперь называемых функционалами. Говорят, что задан функционал, если каждой функции некоторого класса поставлено в соответствие определенное число. Функционалами, в частности, являются величины, зависящие от выбора плоской кривой. В качестве простого примера рассмотрим задачу об отыскании кратчайшей линии, соединяющей две данные точки плоскости. Сформулируем задачу более точно: пусть $y = f(x)$ — линия на плоскости, проходящая через две фиксированные точки $A(a, c)$ и $B(b, d)$, причем функция $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ имеет непрерывную производную (рис. 31). Как известно, длина кривой выражается интегралом

$$J = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

Каждой функции $f(x)$ рассматриваемого класса соответствует определенное число J — ее длина. Следовательно, $J[y(x)]$ — это функционал. Задача состоит в нахождении кривой, которой соответствует наименьшее значение функционала J.

Вариационное исчисление — это теория экстремумов функционалов $J[y(x)]$. Как известно, в теории экстремумов дифференциального исчисления отыскиваются значения переменной x, при которых имеет максимум или минимум данная функция $y = f(x)$.

В вариационном исчислении разыскиваются функции $y = f(x)$, при которых имеет максимум или минимум данный функционал $J[y(x)]$. Эта аналогия между дифференциальным исчислением и вариационным сыграла значительную роль в развитии последнего.

Простейшая общая задача вариационного исчисления формулируется так: среди всех кривых $y(x)$, проходящих через две данные точки $A(a, c)$ и $B(b, d)$, выбрать ту, на которой имеет максимум или минимум интеграл J:

$$J = \int_a^b f(x, y, y')\, dx.$$

На протяжении всей истории вариационного исчисления его основные методы создавались для простейшей задачи, а затем распространялись на более широкие классы.

Такова, например, задача об экстремуме функционалов, зависящих от пространственных кривых $y = y(x)$, $z = z(x)$:

$$J = \int_a^b f(x, y, z, y', z')\, dx.$$

В еще более широкой постановке интеграл J зависит от n функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$ и их первых производных $y_1', y_2', \ldots, y_n'$ или от производных до порядка m. Другим обобщением простейшей задачи является задача на экстремум кратных интегралов.

Естественным видоизменением этих проблем является также отыска-

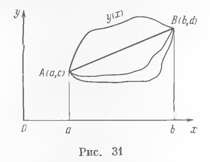


Рис. 31

ние кривой, дающей экстремум, в классе кривых, соединяющих данную точку и данную кривую, или данную точку и данную поверхность. Это так называемые задачи с подвижными концами.

Многие вопросы приложений приводят к задаче разыскания кривой, дающей экстремум интегралу J в классе кривых, на которых интеграл K принимает данное значение l. Такие задачи называются изопериметрическими. Термин произошел от одной из задач этого типа: среди всех замкнутых кривых с одним и тем же периметром, т. е. одной длины l, найти ту, которая ограничивает наибольшую площадь.

Вариационные проблемы в XVII в.

Некоторые изопериметрические задачи были поставлены и изучены еще в древности. Как говорилось, древнегреческие математики установили, что из всех плоских изопериметрических фигур наибольшую площадь имеет круг, а среди тел с одной и той же площадью поверхности (изоповерхностных) наибольший объем имеет шар (см. т. 1, стр. 139). В древности были высказаны первые вариационные принципы физики. Так, Герон Александрийский доказывал, что при движении луча света угол падения равен углу отражения, опираясь на то, что луч света должен идти наикратчайшим путем. «Если,— писал Герон,— природа не хочет попусту обводить кругом (луч) нашего зрения, то она изломит его под равными углами»[1]. Идеи Герона стимулировали в известной мере оптические изыскания Ферма.

---

[1] *Hero von Alexandrien.* Mechanik und Katoptrik, herausg. und übers. L. Nix und W. Schmidt. *Heroni Alexandrini.* Opera omnia, Bd. 2. Leipzig, 1900, S. 305.

В XVII в. теория изопериметров привлекла внимание Кеплера и затем Галилея. Упомянем, что в связи с изучением падения тел Галилей поставил задачу о брахистохроне — кривой линии, падая по которой с нулевой начальной скоростью тяжелая точка скорее всего опустится из одной данной точки в другую. Опираясь на данные опыта, Галилей доказал, что скатывание по дуге круга происходит быстрее, чем по стягивающей ее хорде. Но он ошибался, когда утверждал, что брахистохрона является дугой круга.

Пьер Ферма в 1662 г. положил в основу исследования закона преломления света принцип кратчайшего времени. По мнению Ферма, «природа действует наиболее легкими и доступными путями». Конкретизируя эту идею, он писал: «Подобно тому, как Галилей, рассматривая движение тяжелых тел в природе, измерял отношение его не столько расстоянием, сколько временем, мы также рассматриваем не кратчайшие расстояния или линии, а те, которые могут быть пройдены легче, удобнее и за более короткое время» [1]. Так в геометрической оптике был разработан принцип кратчайшего времени. Рассмотрение аналогичных задач привело в дальнейшем к принципу наименьшего действия в механике.

Мы не будем останавливаться подробно на отдельных вариационных задачах вплоть до конца XVII в., так как до этого времени способы их решения были индивидуальными и не могли еще составить специального исчисления.

Принципиально новая обстановка сложилась в конце XVII в. Успехи в решении экстремальных задач дифференциального исчисления позволили приступить к успешному исследованию вариационных задач и разработать специфический аппарат их решения. Само возникновение вариационного исчисления и его выделение в самостоятельную математическую дисциплину было вызвано необходимостью решить ряд экстремальных задач геометрии, механики, физики.

Первой из вариационных задач этого периода была задача, рассмотренная Ньютоном в поучении к 34-му предложению VII отдела его «Математических начал натуральной философии»: найти тело вращения, которое при движении в жидкости по направлению своей оси испытывает наименьшее сопротивление. При этом предполагается, что сопротивление жидкости пропорционально квадрату скорости. Ньютон нашел решение задачи в виде некоторой пропорции, которую в наших обозначениях можно выразить дифференциальным уравнением

$$\frac{yy'^3}{(1+y'^2)^2}=\frac{a}{4}.$$

Уравнение можно проинтегрировать подстановкой $y' = p$. В результате

$$y=\frac{a}{4}\,\frac{(1+p^2)^2}{p^3}, \qquad x=\int\frac{dy}{p}=\frac{a}{4}\left[\frac{3}{4p^4}+\frac{1}{p^2}+\ln p\right]+C.$$

Ньютон указал на практическую ценность рассматриваемой задачи: «Я считаю, что это замечание может быть небесполезно при построении судов» [2]. Сам Ньютон не дал никакого указания на метод, которым он

---

[1] *П. Ферма.* Синтез для рефракции. Перевод Ю. Х. Копелевич.— В кн.: Вариационные принципы механики. М., 1959, стр. 7.

[2] *И. Ньютон.* Математические начала натуральной философии, стр. 429.

получил свою пропорцию. Быть может, именно этим объясняется то обстоятельство, что задача Ньютона не привлекла к себе вначале внимания ученых и не оказала заметного влияния на возникновение вариационного исчисления.

Исторически первой задачей, возбудившей к себе общий интерес среди математиков, была задача о брахистохроне, опубликованная И. Бернулли в «Acta Eruditorum» в 1696 г. Еще раньше И. Бернулли сообщил эту задачу Лейбницу. Последний решил ее тотчас по получении письма и предложил И. Бернулли опубликовать эту «прекрасную и до сих пор неслыханную задачу» для состязания между математиками, предоставив

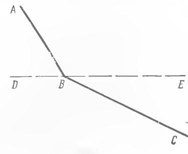


Рис. 32

годичный срок для решения. На конкурс было представлено три решения. Одно из них принадлежало Лопиталю, другое — Я. Бернулли, третье было опубликовано в «Philosophical Transactions» без подписи автора. Но И. Бернулли тотчас угадал в неизвестном авторе Ньютона: по его выражению, «льва узнают по его когтям». Из предложенных решений, показавших, что искомая кривая является циклоидой, наиболее интересны решения И. Бернулли, Лейбница и Я. Бернулли. Ньютон дал ответ, не приведя доказательства. Решение Лейбница представляет собой попытку приложить методы дифференциального исчисления к решению вариационных задач. Он пишет И. Бернулли об основах своего метода: «Заменив кривую многоугольником с бесконечно большим числом сторон, я вижу, что из всех возможных случаев (кривой) легчайшего ската будет, если взять на ломаной три какие-нибудь точки, или вершины A, B, C, причем точка B будет такой, что из всех точек, расположенных на горизонтальной прямой DE, эта единственная дает легчайший путь от A к C. Таким образом, дело сводится к решению легкой задачи: даны две точки A и C и проходящая между ними горизонтальная прямая DE; найти на этой прямой такую точку, чтобы путь ABC был наилегчайшим»[1] (рис. 32).

Следовательно, метод, предложенный Лейбницем, состоит в том, что кривая заменяется ломаной. Затем выбираются три смежные вершины ломаной и рассматривается, как должна быть расположена на данной прямой средняя вершина B при неподвижно закрепленных крайних вершинах A и C, чтобы падение по ломаной ABC происходило в кратчайшее время. Таким образом, вариационная задача сведена к задаче на отыскание обыкновенного экстремума.

---

[1] *G. W. Leibniz.* Mathematische Schriften, Bd. 3. Halle, 1855, S. 310.

Этим методом Лейбниц решил одну конкретную задачу — задачу о брахистохроне. В работах Лейбница не рассматриваются вариационные задачи, поставленные в общем виде, не изучается какой-либо класс задач.

Первое опубликованное решение задачи о брахистохроне принадлежит И. Бернулли. Оно не носит характера развития идей Лейбница. Возникшая как конкретная механическая задача, задача о брахистохроне решалась с помощью физических и механических аналогий. Руководящей идеей в этом доказательстве была идея оптико-механической аналогии. Он пишет: «Я укажу, что мною открыто удивительное совпадение между кривизной луча света в непрерывно изменяющейся среде и нашей брахистохронной кривой» [1].

И. Бернулли рассматривает движение луча из одной точки до другой в некоторой среде с непрерывно меняющейся плотностью. Путь луча является в силу принципа Ферма брахистохроной — кривой быстрейшего прохождения луча. В силу оптико-механической аналогии рассуждения в точности повторяются, если говорить не о луче света, а о шарике, падающем по брахистохроне. Поэтому И. Бернулли мог использовать известное свойство кривой наибыстрейшего прохождения луча — синусы углов наклона к вертикальной линии повсюду находятся в отношении скоростей. Это свойство брахистохроны Бернулли выражает дифференциальным уравнением

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{x}{a-x}},$$

интегрирование которого показывает, что искомая кривая является циклоидой.

Решение Я. Бернулли (Acta Eruditorum, 1697) интересно, поскольку оно представляет первую попытку приложения общих идей Лейбница к решению конкретной вариационной задачи. В нем Я. Бернулли дает по существу вывод того свойства брахистохроны, которым И. Бернулли воспользовался как готовым, взяв его из сочинений Гюйгенса и Ферма. Наконец, в этом решении впервые в явной форме был высказан принцип, хотя и не обладающий полной общностью, но приложимый к широкому классу задач. Этот принцип, сыгравший значительную роль в первоначальном периоде развития вариационного исчисления, утверждает, что если какая-нибудь кривая обладает свойством максимума или минимума, то каждая ее бесконечно малая часть обладает тем же свойством. И. Бернулли и Лейбниц в своих доказательствах опирались на этот принцип, но явно его не высказывали. В дальнейшем были рассмотрены большие классы задач, к которым принцип Бернулли неприменим.

Вместе с решением задачи о брахистохроне Я. Бернулли сформулировал более общую задачу о кривой, по которой материальная точка в кратчайшее время достигнет данной вертикальной прямой (рис. 33). Так впервые была поставлена задача с подвижным концом. Я. Бернулли не дал ее решения.

Одновременно он сформулировал изопериметрическую задачу: «Среди всех кривых BFN (рис. 34) равной длины найти ту, произвольные степени или корни ординат PF или дуг BF которой образуют другую кривую BZN, для которой площадь $BPNZB$ будет наибольшей или наименьшей».

---

[1] *И. Бернулли.* Избранные сочинения по механике. Под редакцией и с примечаниями В. П. Егоршина. М.—Л., 1937, стр. 23.

Решение задачи дал Я. Бернулли (Acta Eruditorum, 1700 и 1701). При этом он впервые заметил, что, для того чтобы удовлетворить добавочному, по сравнению с простейшей задачей, условию, необходимо варьировать уже не одну ординату, как предложил Лейбниц, а две бесконечно близкие ординаты искомой кривой.

В 1697 г. И. Бернулли в «Journal des Savants» была поставлена еще одна экстремальная задача: провести кратчайшую линию между двумя заданными точками на произвольной поверхности. Первые исследования были выполнены Лейбницем и Я. Бернулли, но наиболее важный результат

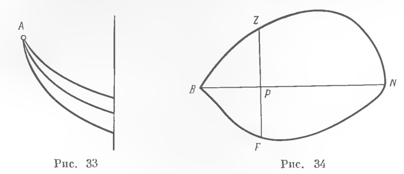


Рис. 33

Рис. 34

был найден самим И. Бернулли. Он установил, что в любой точке кратчайшей линии соприкасающаяся плоскость перпендикулярна к касательной плоскости поверхности, что, как известно, есть основное свойство геодезических. Об этом И. Бернулли сообщил Лейбницу в письме 26 августа 1698 г. Как пришел он к своему выводу и каково было полученное им дифференциальное уравнение, о котором он упоминает в том же письме, неизвестно. Изучение геодезических линий пополнило класс вариационных задач и одновременно дало толчок развитию аналитической геометрии в пространстве, так как потребовалось изучать поверхности в пространстве.

По мере накопления решенных вариационных задач выявилось и то общее, что объединяло эти разные по содержанию задачи, и то особенное, что выделяло их среди всех экстремальных задач математического анализа. Создавалось все больше предпосылок для создания вариационного исчисления. Основы этой дисциплины были заложены в первую очередь в работах Лейбница и братьев Бернулли. Вариационное исчисление было создано в начале XVIII в. Л. Эйлером.

Вариационное исчисление Эйлера

Общий метод решения вариационных задач был разработан Эйлером в 1726—1744 гг. Вначале в 1726 г. Эйлер поставил задачу о брахистохроне в сопротивляющейся среде. В 1728 г. И. Бернулли, понимая всю важность задачи о геодезических линиях, предложил ему заняться и этой проблемой.

В том же 1728 г. Эйлер дал общее решение этой задачи — вывел дифференциальное уравнение геодезической линии на поверхности (ср. стр. 188). Однако Эйлера не удовлетворяла малая общность приемов, применяемых для решения вариационных задач. Он стал искать общий метод для их решения. И вот в статье Эйлера «Общее решение изопериметрической

проблемы, поставленной в самом широком смысле» (Problematis isoperimetrici in latissimo sensu accepti solutio generalis. Commentarii, (1732—1733) 1736) впервые появляется общая постановка вариационной задачи.

Из первых же слов трактата видно, что Эйлер выделяет в качестве предмета исследования не отдельные конкретные задачи, а построение общей теории. В работе впервые дается общий метод решения вариационных задач, который затем в течение 12 лет Эйлер только совершенствовал, не затрагивая его принципиальных основ.

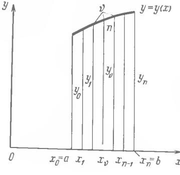


Рис. 35

Наконец, в 1744 г. отдельным изданием вышел трактат, в котором Эйлер собрал почти все свои исследования предыдущих лет. В этом сочинении «Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума либо минимума, или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле» (Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti. Lausannae et Genevae), Эйлер изложил общий «метод максимумов и минимумов в применении к кривым линиям» и решил с его помощью как все поставленные до него вариационные задачи, так и многие другие.

Эйлер сводит вариационную задачу к задаче на экстремум функций многих переменных следующим образом. Пусть требуется найти экстремум интеграла

$$\int z(x, y, y')\, dx$$

с закрепленными концами, Эйлер делит отрезок интегрирования $[a, b]$ на n частей $[dx = \frac{b-a}{n}]$ (рис. 35). Обозначим точки деления $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ и соответствующие ординаты $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$. Производные в точках y_i Эйлер заменяет конечными разностями

$$y_i' = \frac{y_{i+1} - y_i}{dx},$$

а рассматриваемый интеграл $\left[\int Z(x, y, y')\, dx\right]$ суммой

$$\sum_{i=0}^{n} Z\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{dx}\right) dx, \qquad (1)$$

которая представляет собой функцию $n+1$ переменных (ординат y_0, y_1, $y_2, \ldots, y_n$).

Затем Эйлер переходит от искомой кривой к соседней, придавая ординате y_ν некоторое бесконечно малое приращение $n\nu$. Теперь, согласно правилам дифференциального исчисления, нужно найти дифференциал суммы (1) и приравнять его нулю. Но в сумме (1) от y_ν зависят только два слагаемых:

$$Z\left(x_{\nu-1}, y_{\nu-1}, \frac{y_\nu - y_{\nu-1}}{dx}\right)dx, \qquad Z\left(x_\nu, y_\nu, \frac{y_{\nu+1} - y_\nu}{dx}\right)dx.$$

Дифференцируя их, Эйлер получает

$$dZ(x_{\nu-1}, y_{\nu-1}, p_{\nu-1}) = M dx_{\nu-1} + N dy_{\nu-1} + P dp_{\nu-1},$$
$$dZ(x_\nu, y_\nu, p_\nu) = M' dx_\nu + N' dy_\nu + P' dp_\nu,$$

где $y_i' = p_i$.

Непосредственный подсчет дает:

$$dx_{\nu-1} = dx_\nu = dy_{\nu-1} = 0, \qquad dy_\nu = +n\nu,$$
$$dp_{\nu-1} = +\frac{n\nu}{dx}, \qquad dp_\nu = -\frac{n\nu}{dx}.$$

Отсюда следует

$$d\left[\sum_{i=0}^{n} Z\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{dx}\right)dx\right] = Pn\nu + N'n\nu dx - P'n\nu =$$
$$= Pn\nu + Nn\nu dx - P'n\nu = n\nu(-dP + Ndx) = 0$$

(Эйлер заменяет $P' - P = dP$, $N' = N$, так как он считает равными величины, отличающиеся на бесконечно малые второго порядка), откуда

$$N - \frac{dP}{dx} = 0 \quad \text{или} \quad Z_y - \frac{d}{dx} Z_{y'} = 0.$$

Так с помощью метода, позже названного прямым, Эйлер привел задачу об экстремуме интеграла

$$\int Z(x, y, y')\, dx$$

к решению дифференциального уравнения

$$Z_y - \frac{d}{dx} Z_{y'} = 0.$$

Затем Эйлер нашел дифференциальное уравнение

$$Z_y - \frac{d}{dx} Z_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} Z_{y''} - \ldots = 0$$

и для задачи об экстремуме интеграла

$$\int Z(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})\, dx,$$

в котором подынтегральная функция содержит производные любого порядка.

На большом числе примеров (свыше 60) Эйлер продемонстрировал силу своего метода. Рассматривая вариационные задачи (уже решенные ранее, как задача о брахистохроне, задача Ньютона и другие, и задачи более сложные, которые прежде решить не удавалось), Эйлер записывал для них соответствующие дифференциальные уравнения, а затем искусными путями решал эти уравнения.

Эйлер разработал также метод решения задач на условный экстремум, когда искомая кривая разыскивается в классе кривых, обладающих некоторым общим свойством. Эту обобщенную изопериметрическую задачу Эйлер решает, придавая приращения уже не одной ординате, как раньше, а двум соседним ординатам.

Эйлер решил большое число механических задач с помощью созданного им вариационного исчисления. Он исследует свойства упругих кривых, решает задачи об изгибе упругой пластинки, о критической нагрузке колонн, о движении в несопротивляющейся среде и в жидкости. При этом Эйлер впервые дал четкую математическую формулировку принципу наименьшего действия, который в то время стоял в центре внимания математиков, механиков и философов:

$$\int mvds = \min.$$

Создание метода вариаций

Существенным недостатком метода Эйлера была его громоздкость. Уже в случае простейшей задачи на экстремум интеграла

$$\int_a^b f(x, y, y')\,dx$$

для получения соответствующего дифференциального уравнения Эйлеру приходится проводить трудные вычисления. Выводы значительно усложняются, если перейти к более общим вариационным задачам.

Эйлер не рассматривал в своей книге пространственной задачи на экстремум интеграла

$$\int_a^b f(x, y, z, y', z')\,dx$$

и задач на экстремумы кратных интегралов. А именно такие сложные задачи возникали в практике, и прежде всего в механике. При распространении на эти задачи своего метода, весьма громоздкого уже в простейшем случае, Эйлер встречал значительные трудности. Необходимо было усовершенствовать математический аппарат. Эйлер хорошо понимал это. Так, решая пространственную задачу о движении жидкости, он пишет, что созданный им «метод достаточно разработан только для фигур на плоскости». Эйлер продолжал искать новые методы решения вариационных задач. Он стремился решить вариационные задачи, используя аналогию с дифференциальным исчислением. Эйлер понимал, что речь идет об объектах более общей природы, о функциях, зависящих от линии (по современной терминологии, о функционалах).

И вот на эти более общие функции Эйлер хочет распространить основной принцип, с помощью которого строится теория экстремума функций конечного числа переменных: в точке экстремума производная равна нулю. В «Методе нахождения» Эйлер ищет метод, который позволил бы к решению вариационных задач непосредственно применить аппарат дифференциального исчисления. При этом Эйлер пришел к необходимости доказать некоторое соотношение, послужившее исходным пунктом в исследованиях Лагранжа:

$$f_{y'}\,dy' + y'df_{y'} = 0 \qquad (2)$$

или в обозначениях Эйлера

$$Pdp + pdP = 0.$$

Лагранж доказал соотношение (2), применяя интегрирование по частям, и таким образом получил недостающее звено в рассуждениях Эйлера, посвященных созданию нового вариационного метода. Изучение работ Эйлера и Лагранжа и их переписки делает совершенно очевидной тесную связь работ Лагранжа по созданию метода вариаций с исследованиями Эйлера. Лагранж впервые изложил свой метод в письме к Эйлеру в 1755 г. В это время Эйлер был уже всемирно известным ученым, а Лагранжу было девятнадцать лет, и он еще не опубликовал ни одной работы. Эйлер немедленно ответил на письмо Лагранжа, и между ними установилась переписка, продолжавшаяся много лет. В первом письме Лагранж ограничился изложением своего метода. Он написал, что мог бы решить отдельные задачи новым методом, но для начала не входит в частности. Эйлер горячо одобрил новый метод, увидев в нем значительный шаг вперед, и призвал Лагранжа развивать его.

В переписке Лагранжа с Эйлером рассматривались конкретные вариационные задачи. Лагранж рассмотрел задачу о брахистохроне в обобщенной постановке. Эйлер и его предшественники решали эту задачу в случае, когда материальная точка под действием силы тяжести движется из точки A в фиксированную точку B. Лангранж исходил из условия: материальная точка движется из данной точки A в какую-нибудь точку на фиксированной кривой Ф. В качестве брахистохроны он получил циклоиду, пересекающуюся с кривой Ф под прямым углом. Затем он поставил задачу о движении материальной точки под действием силы тяжести из A в B через заданную точку C. Эйлер указал в ответном письме, что искомая кривая должна состоять из дуг циклоиды, так что каждый отрезок пути она будет пробегать в кратчайшее время.

Ознакомившись с методом Лагранжа, Эйлер начала работать над его усовершенствованием и развитием. В письмах юного Лагранжа он нашел то, что давно искал. Уже в 1756 г. Эйлер сообщил Берлинской академии о двух работах, посвященных методу вариаций. Однако он не спешил с публикацией своих сочинений. Причина выяснилась вскоре: в письме от 2 октября 1759 г. Эйлер написал Лагранжу, что у него имеются новые работы по вариационному исчислению, но он пока не хочет их опубликовать, чтобы не умалить заслуг Лагранжа в этом вопросе.

Первой работой Лагранжа по вариационному исчислению был «Опыт нового метода для определения максимумов и минимумов неопределенных интегральных формул» (Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies. Miscellanea Taurinensia, (1760—1761) 1762).

Во вводной части Лагранж, отправляясь от «Метода нахождения» Эйлера, отмечает те главы книги, которые Эйлер посвятил поискам нового метода. Непосредственно за этим Лагранж в нескольких предложениях излагает основы метода вариаций. Для решения задачи об экстремуме интеграла Лагранж предлагает по аналогии с теорией экстремума в дифференциальном исчислении найти производную рассматриваемого выражения и приравнять ее нулю. Для отыскания производной он вводит новый знак дифференцирования δ. В случае простейшей задачи об экстремуме интеграла

$$\int_a^b f(x, y, y')\,dx$$

имеем

$$\delta \int_a^b f(x, y, y')\,dx = 0 \text{ и } \int_a^b \delta f(x, y, y')\,dx = 0.$$

Аналогично соотношению

$$df = f_y dy + f_{y'} dy'$$

Лагранж пишет

$$\delta f = f_y \delta y + f_{y'} \delta y'.$$

Отсюда он получает

$$\int [f_y \delta y + f_{y'} \delta y']\,dx = 0.$$

Далее Лагранж применяет интегрирование по частям

$$\int_a^b f_{y'} \delta y' dx = f_{y'} \delta y \Big|_a^b - \int_a^b \delta y \frac{d}{dx} f_{y'} dx,$$

$$\int_a^b \left(f_y - \frac{d}{dx} f_{y'}\right) \delta y dx + f_{y'} \delta y \Big|_a^b = 0. \quad (3)$$

Подынтегральное выражение, приравненное нулю, дает искомое уравнение Эйлера

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = 0,$$

а внеинтегральные члены — условия для концов кривой.

Так Лагранж чрезвычайно просто вывел уже известное дифференциальное уравнение Эйлера для задачи об экстремуме интеграла $\int f(x, y, y')\,dx$. Затем Лагранж показал, что его методом легко найти дифференциальное уравнение и для более сложной пространственной задачи об экстремуме интеграла

$$\int f(x, y, z, y', z', y'', z'', \ldots)\,dx.$$

Для этого случая он получил систему двух дифференциальных уравнений:

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} f_{y''} - \ldots = 0,$$

$$f_z - \frac{d}{dx} f_{z'} + \frac{d^2}{dx^2} f_{z''} - \ldots = 0.$$

Метод Лагранжа позволяет непосредственно применять к вариационным задачам аппарат дифференциального исчисления и решать таким образом много новых вариационных задач, например задачу об экстремуме кратного интеграла. Был рассмотрен интеграл

$$\iint \sqrt{1 + p^2 + q^2}\ dxdy,$$

где $dz = pdx + qdy$, соответствующий некоторой поверхности. Для искомой поверхности Лагранж получил уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = 0.$$

До Лагранжа удавалось решать только задачи с закрепленными концами. Он заметил, что внеинтегральные члены уравнения (3) доставляют соотношения для концов кривой. Это дало Лагранжу возможность решать задачи с подвижными концами.

Исследования Лагранжа по вариационному исчислению тесным образом связаны с его работой в области механики. Одновременно с первым мемуаром, излагающим метод вариаций, Лагранж опубликовал статью «Приложение метода, изложенного в предыдущем мемуаре, для решения различных задач динамики» (Application de la méthode exposée dans le mémoire précédent à la solution de différents problèmes de dynamique).

Исчисление вариаций позволило Лагранжу решить новые классы задач механики. В первой же задаче, которую он рассматривает в статье, требуется найти движение тела, притягиваемого к произвольному числу неподвижных центров силами, являющимися функциями расстояний. Принцип наименьшего действия приводит к задаче отыскания экстремума интеграла вида

$$\int f(x, y, z, y', z')\, dx$$

в классе пространственных кривых $y(x)$, $z(x)$, метод решения которой до Лагранжа был неизвестен.

Владея гибкими методами решения вариационных задач, Лагранж мог решать задачи механики, приводящиеся к кратным интегралам. К таким задачам он пришел, изучая движение неупругих жидкостей.

Лагранж обобщил принцип наименьшего действия на систему сил

$$\int mvds + \int m_1 v_1 ds + \int m_2 v_2 ds + \ldots + \int m_k v_k ds = \min.$$

Таким образом, оказалось возможным применить принцип наименьшего действия к динамике системы. Якоби позже писал, что лагранжев принцип наименьшего действия есть мать всей нашей аналитической механики. Возможность широкого применения принципа основывается на методе вариаций.

В 1788 г. выходит в свет «Аналитическая механика» (Mécanique analytique) Лагранжа, открывшая новый этап в развитии механики. В этом произведении, написанном через сто лет после «Начал» Ньютона, вся мощь усовершенствованного математического аппарата была использована для построения механики. Результаты Эйлера, Даламбера и других ученых XVIII в. здесь обработаны и развиты с единой точки зрения. Основная для Лагранжа идея построения механики как систематического и гармоничного здания, возводимого на фундаменте единой общей предпосылки, пронизывает «Аналитическую механику».

Лагранж подчеркнул, что в основе решения задач механики лежит соединение принципа наименьшего действия с методом вариаций. Он пишет: «Таков тот принцип, которому, хотя и не вполне точно, я даю здесь название принципа наименьшего действия и на который я смотрю не как на метафизический принцип, а как на простой и общий вывод из законов механики. Этот принцип, будучи соединен с принципом живых сил и развит по правилам вариационного исчисления, дает тотчас же все уравнения, необходимые для разрешения каждой проблемы; отсюда возникает столь же простой, сколь и общий метод разрешения проблем, касающихся движения тел» [1].

Таким образом, с Лагранжа началась новая эпоха в развитии вариационного исчисления. Используя метод вариаций, Лагранж значительно усовершенствовал аппарат аналитической механики. Это были открытия большого значения. Однако вначале они встретили холодный прием, так как исчисление вариаций не было понято современниками Лагранжа, и вскоре после выхода в свет его первого мемуара появились неодобрительные отзывы о методе Лагранжа, попытки заменить его или усовершенствовать. Этот холодный прием становится понятным, если учесть, что Лагранж ни при опубликовании своего метода, ни позже не выяснил его сущности, он только утверждал, что его метод основан исключительно на дифференцировании. Естественно, возникали сомнения в возможности применения дифференцирования к новому кругу задач.

Эйлер разъяснил исчисление вариаций, разработал его и ввел в широкую практику. Его работы «Элементы исчисления вариаций» и «Аналитическое изложение метода максимумов и минимумов» (Elementa calculi variationum; Analytica explicatio methodi maximorum et minimorum. Novi Commentarii, (1764) 1766) сыграли большую роль в развитии нового метода. В них Эйлер назвал новый алгоритм методом вариаций, а математическую дисциплину, изучающую экстремумы интегралов,— вариационным исчислением.

Идеи первого периода творчества Эйлера были надолго забыты. Однако они имеют не только исторический интерес. В конца XIX в. и XX в. прямой метод Эйлера, идея которого состоит в трактовке вариационной задачи как предельной для некоторой задачи на экстремум функции многих переменных, приобрел основное значение. Наряду с конечно-разностным приемом Эйлера развитие получили и другие прямые методы. Эти методы успешно применяются в тех вариационных задачах, для которых уравнение Эйлера не интегрируется в конечном виде, а также для решения самих дифференциальных уравнений, которые удается представить как уравнение Эйлера для некоторой вариационной задачи.

---

[1] *Ж.-Л. Лагранж.* Аналитическая механика, т. I. 1950, стр. 320.

С помощью метода вариаций Эйлер в третьем томе «Интегрального исчисления» нашел дифференциальное уравнение для задачи об экстремуме двойного интеграла с закрепленными границами. Однако ему не удалось решить эту задачу в случае подвижных концов.

В своих работах Эйлер постоянно подчеркивал, что метод вариаций принадлежит Лагранжу.

Эйлер сделал ясным понятие вариации. Он указал, что в вариационном исчислении искомая кривая сравнивается с бесконечно близкой к ней кривой, причем δy, $\delta y'$ не что иное, как бесконечно малые приращения величин y, y', получающиеся при переходе от искомой кривой к соседней

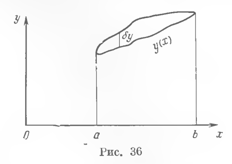


Рис. 36

(рис. 36), т. е. δy — приращение ординаты, $\delta y'$ — приращение производной. Выяснилось, что в методе вариаций изучается разность между значениями интегралов, взятых вдоль искомой кривой $y(x)$ и соседней с ней кривой

$$\int_a^b f(x, y+\delta y, y'+\delta y')\,dx - \int_a^b f(x, y, y')\,dx. \tag{4}$$

Очевидно, что эта разность должна быть положительна в случае, когда на кривой $y(x)$ интеграл принимает минимальное значение, отрицательна — когда интеграл принимает максимальное значение.

Разность (4) разлагается по формуле Тейлора

$$\int_a^b f(x, y+\delta y, y'+\delta y')\,dx - \int_a^b f(x, y, y')\,dx =$$

$$= \int_a^b [f_y\delta y + f_{y'}\delta y']\,dx + \frac{1}{2}\int_a^b [f_{yy}\delta y^2 + 2f_{yy'}\delta y\delta y' + f_{y'y'}\delta y'^2]\,dx, \tag{5}$$

причем величины первого порядка малости относительно δy, $\delta y'$ составляют первую вариацию интеграла δJ, имеющую вид

$$\delta J = \int_a^b [f_y\delta y + f_{y'}\delta y']\,dx.$$

Для того чтобы на некоторой кривой $y(x)$ интеграл принимал экстремальное значение, необходимо, чтобы на этой кривой первая вариация обращалась в нуль:

$$\delta J = 0$$

или

$$\int_a^b [f_y \delta y + f_{y'} \delta y']\, dx = 0.$$

Так было получено исходное для рассуждений Лагранжа соотношение $\int_a^b [f_y \delta y + f_{y'} \delta y']\, dx = 0$, которое он получал простым дифференцированием. Таким образом, Эйлер выяснил сущность метода вариаций. Новое исчисление перестало выглядеть как таинственное дифференцирование, которое неизвестно почему дает правильные результаты для вариационных задач.

Изучение разности (5) с точностью до бесконечно малых второго порядка дало основу для создания теории второй вариации и привело к отысканию достаточных условий экстремума интегралов. Рассмотрение второй вариации явилось новым этапом в развитии вариационного исчисления.

Вторая вариация и условие Лежандра

Задача отыскания условий, достаточных для существования экстремума, тесно связана с вопросом о классификации экстремумов.

Напомним несколько определений. Интеграл J имеет абсолютный максимум на кривой $y(x)$, если выполняется неравенство

$$J[y(x)] \geqslant J[\bar{y}(x)]$$

для всех кривых $\bar{y}(x)$ из рассматриваемого класса. Аналогично определяется абсолютный минимум.

Вариационное исчисление изучает также относительные экстремумы, которые подразделяются на слабый и сильный. Интеграл J достигает на кривой $y(x)$ сильного максимума, если неравенство

$$J[y(x)] \geqslant J[\bar{y}(x)]$$

выполняется для всех кривых $\bar{y}(x)$, удовлетворяющих условию

$$|\bar{y}(x) - y(x)| < \varepsilon,$$

где ε — некоторое положительное число. Таким образом, в случае сильного экстремума искомая кривая сравнивается с кривыми, которые от нее мало отличаются по положению в пространстве, но могут как угодно отличаться по величине производной. Заметим также, что в случае сильного экстремума величину δy можно рассматривать как бесконечно малую, а величина $\delta y'$ может принимать любые значения.

Интеграл J достигает на кривой $y(x)$ слабого максимума, если неравенство

$$J[y(x)] \geqslant J[\bar{y}(x)]$$

выполняется для всех кривых $\bar{y}(x)$, удовлетворяющих условиям:

$$|\bar{y}(x) - y(x)| < \varepsilon, \quad |\bar{y}'(x) - y'(x)| < \varepsilon.$$

Таким образом, в случае слабого экстремума искомая кривая $y(x)$ сравнивается с кривыми, мало отличающимися от нее как по положению в пространстве, так и по величине производной, т. е. по направлению касательной. В этом случае обе величины δy и $\delta y'$ можно рассматривать как бесконечно малые.

В методе вариаций разность (4) разлагается по формуле Тейлора, причем величины δy и $\delta y'$ необходимо считать бесконечно малыми, что в XVIII в. молчаливо предполагалось. Поэтому метод вариаций можно применять только для изучения слабого экстремума. Заметим, что всякое условие, необходимое для слабого экстремума, необходимо для сильного и для абсолютного экстремумов, и, в частности, для всех видов экстремумов необходимо, чтобы искомая кривая удовлетворяла уравнению Эйлера. Напротив, достаточные условия, найденные в предположении, что δy и $\delta y'$ бесконечно малы, обеспечивают существование только слабого экстремума и недостаточны для сильного и абсолютного экстремумов.

Понятие о различных видах экстремума складывалось в математике постепенно. Различие между абсолютным и относительным экстремумами было замечено в конце XVIII в. Различие между сильным и слабым экстремумами было обнаружено только во второй половине XIX в. Формирование этих понятий происходило в связи с рассмотрением новых вариационных задач.

В конкретных вариационных задачах, которые рассматривались на первых этапах развития вариационного исчисления, физические, механические или геометрические соображения обычно давали возможность установить, что кривая, полученная как решение уравнения Эйлера, дает экстремум и что это абсолютный экстремум. Это заключение распространялось на все вариационные задачи.

Между тем появился ряд вариационных задач, рассмотрение которых ставило под сомнение справедливость этих взглядов. Прежде всего опровергалось представление о том, что экстремум, который дает кривая, удовлетворяющая уравнению Эйлера, является абсолютным.

В мемуаре «О замечательном парадоксе, встречающемся в анализе максимумов и минимумов» (De insigni paradoxo quod in analysi maximorum et minimorum occurrit, Mém. Ac. St. Pétersbourg, (1809—1810) 1811), Эйлер искал экстремум интеграла

$$\int \sqrt{x(1+y'^2)}\, dx.$$

Уравнение Эйлера в этом случае имеет вид

$$d\frac{y'\sqrt{x}}{\sqrt{1+y'^2}} = 0. \quad (6)$$

Его решение $y = 2\sqrt{ax-a^2}+b$ при $b = 0$ является параболой $y = 2\sqrt{ax-a^2}$ с вершиной в точке $y = 0$, $x = a$ (рис. 37).

Эйлер подсчитал значение интеграла, соответствующее отрезку параболы EF, и значение этого интеграла на ломаной $EAVF$. Оказалось, что значение интеграла вдоль ломаной при определенных x и a меньше, чем значение интеграла вдоль параболы. В этом и состоит парадокс — ведь парабола должна давать минимум интегралу. Эйлер заметил, что ломаная также удовлетворяет дифференциальному уравнению (6). Для объяснения

парадокса Эйлер использовал аналогию с дифференциальным исчислением. Он указал, что изучаемый там экстремум функции носит локальный характер. Эйлер писал: «Впрочем, достаточно известно, что одна и та же кривая линия часто может содержать много минимальных ординат, которые между собой весьма различаются, только бы каждая ордината была меньше, чем обе близлежащие к ней. Отсюда также можно понять, что, поскольку исчисление приводит нам две кривые между точками F и H, значение для той и другой должно быть минимальным, хотя между собой они весьма различаются» [1].

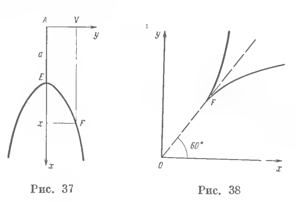


Рис. 37 Рис. 38

Таким образом, Эйлер по существу пришел к тому, что экстремумы вариационных задач могут и не быть абсолютными, но смысл относительного экстремума он еще не выяснил.

Затруднения, связанные с характером экстремума, возникли в свое время также в задаче о теле наименьшего сопротивления (см. стр. 454). Кривая, удовлетворяющая уравнению Эйлера, здесь состоит из двух ветвей с общей вершиной в точке F, в которой общая касательная наклонена к оси ox под углом 60°. Ветви кривой неограниченно удаляются; на одной из них $p = y'$ уменьшается от $\sqrt{3}$ до нуля, на второй — растет от $\sqrt{3}$ до ∞ (рис. 38). Между тем было замечено, что минимум может быть уменьшен, а максимум увеличен, если кривую заменить зигзагообразной линией.

В «Мемуаре о способе различения максимумов и минимумов в вариационном исчислении» (Mémoire sur la manière de distinguer les maxima et les minima dans le calcul des variations. Mém. Ac. Paris, 1786) Лежандр доказал, что можно построить ломаные, на которых интеграл

$$\int \frac{y\,dy^3}{dx^2 + dy^2} = \int \frac{yy'^3}{1 + y'^2}\,dx,$$

изучаемый в задаче, взятый между двумя фиксированными точками, будет принимать сколько угодно малые значения (а также и ломаные, на которых он будет принимать сколько угодно большие значения). О кривых, удовлетворяющих уравнению Эйлера в данной задаче, Лежандр пишет, что они дают интегралу «относительные или случайные экстремумы».

[1] «Mémoires de l'Acad. sci. St.-Pétersb.», v. 3, (1809—1810) 1811, p. 25.

Таким образом, в XVIII в. еще не был ясен смысл понятия относительного экстремума, Ученые ограничивались общими замечаниями об аналогии с дифференциальным исчислением. Проблема была впервые уточнена только полвека спустя Гамильтоном и Якоби, указавшими, что в вариационных задачах искомая кривая сравнивается с «бесконечно близко лежащими линиями». Но и они еще не различали слабый и сильный экстремумы. Между тем в задаче о теле наименьшего сопротивления при замене кривой ломаной не выполняется условие малости $\delta y'$. Поэтому достаточные условия, найденные методом вариаций в предположении, что δy и $\delta y'$ бесконечно малы, не обеспечивают экстремумов в этой задаче.

В 1786 г. А. М. Лежандр в упомянутом выше «Мемуаре о способе различения максимумов и минимумов в вариационном исчислении» нашел критерий, позволяющий установить, дает ли кривая, удовлетворяющая уравнению Эйлера, экстремум рассматриваемому интегралу, и различить, имеют место максимум или минимум. Лежандр использовал аналогию с дифференциальным исчислением. Именно для того, чтобы функция достигла минимума в некоторой точке, достаточно. чтобы в этой точке выполнялись условия:

$$y' = 0, \quad y'' > 0.$$

Лежандр также исходит из того, что для того, чтобы интеграл достигал минимума на некоторой кривой, достаточно, чтобы на этой кривой выполнялись условия:

$$\delta J = 0, \quad \delta^2 J > 0.$$

Чтобы получить достаточные условия экстремума, Лежандр представляет разность (4) двух значений интеграла

$$\int_a^b f(x, y + \delta y, y' + \delta y')\,dx - \int_a^b f(x, y, y')\,dx,$$

соответствующих произвольной кривой и рассматриваемой кривой $y(x)$, по формуле Тейлора до членов второго порядка малости в виде (5). Первый интеграл в правой части (5) Лежандр интегрированием по частям привел к виду

$$(f_{y'}\delta y)_b - (f_{y'}\delta y)_a + \int_a^b \delta y dx \left(f_y - \frac{d}{dx} f_{y'}\right). \quad (7)$$

Так как границы a и b закреплены, то $\delta y = 0$ на концах кривой $y(x)$, поэтому в (7) обращаются в нуль члены $(f_{y'}\,\delta y)_b$ и $(f_{y'}\delta y)_a$.

Кривая $y(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера, следовательно,

$$\int_a^b \delta y dx \left(f_y - \frac{d}{dx} f_{y'}\right) = 0.$$

Таким образом, Лежандр пришел к необходимости исследовать знак интеграла

$$\delta^2 J = \int_a^b (f_{yy}\delta y^2 + 2f_{yy'}\delta y \delta y' + f_{y'y'}\delta y'^2)\,dx.$$

Для этого он прибавляет к подынтегральной функции слагаемое

$$\frac{d}{dx}(v\delta y^2) = \frac{dv}{dx}\delta y^2 + v2\delta y\delta y'$$

и, чтобы величина интеграла не изменилась, добавляет

$$-(v\delta y^2)_b + (v\delta y^2)_a.$$

Таким образом,

$$\delta^2 J = -(v\delta y^2)_b + (v\delta y^2)_a + \\ + \int \left[\left(f_{yy} + \frac{dv}{dx}\right)\delta y^2 + 2\,(f_{yy'} + v)\;\delta y\delta y' \;+ f_{y'y'}\delta y'^2\right] dx,$$

где v — некоторая функция.

Далее функция $v(x)$ выбирается так, чтобы под знаком интеграла стоял полный квадрат. Лежандр заметил, что для этого можно взять всякую функцию, удовлетворяющую дифференциальному уравнению:

$$f_{y'y'}\left(f_{yy} + \frac{dv}{dx}\right) = (f_{yy'} + v)^2. \qquad (8)$$

Лежандр утверждает, что постоянные, входящие в решение v этого уравнения, всегда можно подобрать так, чтобы обращалась в нуль разность

$$-(v\delta y^2)_b + (v\delta y^2)_a. \qquad (9)$$

Итак, Лежандр привел вторую вариацию δJ к виду

$$\delta^2 J = \int_a^b f_{y'y'}\left(\delta y' + \frac{f_{yy'} + v}{f_{y'y'}}\,\delta y\right)^2 dx.$$

Отсюда он сделал вывод: для того чтобы экстремаль давала минимум рассматриваемому интегралу, достаточно, чтобы выполнялось условие

$$f_{y'y'} > 0$$

(для максимума достаточно $f_{y'y'} < 0$).

Лежандр вскоре сам указал, что его исследования нельзя считать строгими, потому что необходимо еще дополнительно доказать, что всегда существует функция v, удовлетворяющая дифференциальному уравнению (8), и что постоянные в функции v можно выбрать так, чтобы обращалось в нуль выражение (9).

Решающее возражение против теории Лежандра выдвинул Лагранж в своей «Теории аналитических функций» (1797). Он заметил, что Лежандр опирался на то, что если подынтегральная функция на некотором отрезке имеет постоянный знак, то и интеграл на этом отрезке имеет тот же знак. Чтобы опровергнуть это утверждение, Лагранж привел пример

$$\int \frac{dx}{(1-x)^2} = \frac{x}{1-x}.$$

Здесь подынтегральное выражение всегда положительно, а сам интеграл меняет знак, например, при переходе от $x = 1/2$ к $x = 2$.

Лагранж отметил, что утверждение Лежандра справедливо, если подынтегральная функция конечна. Таким образом, чтобы сохранить результаты Лежандра, необходимо было показать, что уравнение (8) имеет конечное решение на отрезке $[a, b]$ интегрирования. Но никаких методов для решения уравнения (8) в это время не было, и Лагранж выразил сомнение в том, что их удастся найти.

Таким образом, вопрос об общем критерии существования экстремума в вариационном исчислении в конце XVIII в. оставался нерешенным.

Дальнейшее развитие вариационного исчисления

Критерий Лежандра, полученный по аналогии с достаточными условиями существования экстремума в дифференциальном исчислении, не обеспечивал экстремума в вариационных задачах. Необходимы были более сильные методы, не имеющие аналогов в дифференциальном исчислении.

Эта задача была решена в XIX в. К. Г. Якоби (1837) впервые рассмотрел совокупность всех экстремалей данной вариационной задачи, т. е. интегральных кривых соответствующего дифференциального уравнения, создав тем самым предпосылки для теории так называемого «поля экстремалей», построенной К. Вейерштрассом. С помощью этой теории Вейерштрасс нашел необходимые и достаточные условия для обоих видов экстремума, различие между которыми было обнаружено в середине века,— эти два вида экстремума получили название слабого и сильного экстремумов.

В начале XIX в. Гауссом и Пуассоном было найдено необходимое условие экстремума для двойного интеграла, а в 1861 г. М. В. Остроградский нашел такое же условие для интегралов любой кратности.

В конце XIX в. результаты Вейерштрасса были перенесены на более общие вариационные задачи. Основным инструментом решения вариационных задач стала теория поля экстремалей, значительно развитая работавшим в Дерпте А. Кнезером и Д. Гильбертом, поставившим задачу развития этой теории в 23-й из своих знаменитых «Математических проблем» (1900). Рассматривая различного вида расстояния между экстремалями, Гильберт тем самым рассматривал различные частные случаи функционального пространства — основного понятия функционального анализа, созданного им вместе с М. Фреше и другими математиками в начале XX в.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы проследили развитие математики до конца XVIII в., лишь в редких случаях незначительно выйдя за эту границу. Разумеется, 1800 г. не представлял собой характерного рубежа ни в общей истории человечества, ни в истории науки и, в частности, математики. Тем не менее приблизительно к этому времени в математике наметился перелом, по своему значению не уступающий революционным идейным сдвигам Нового времени. В целом XVIII столетие продолжало без существенных перемен линию развития эпохи Декарта, Ферма, Ньютона и Лейбница. Но в это же столетие, особенно к концу его, уже наметились проблемы, а иногда и подходы к их решению, которые привели к новым коренным изменениям в предмете и методе математических исследований. Еще на рубеже XVIII и XIX вв. выступили двое из первого десятка ученых, которым предстояло возглавить дальнейшие пионерские поиски,— мы имеем в виду К. Ф. Гаусса и Б. Больцано. А вскоре за тем начали свою деятельность О. Коши и Н. Г. Абель, Н. И. Лобачевский и Я. Бояи, Э. Галуа и У. Гамильтон, Г. Грассман и А. Кэли.

Темп общественного прогресса и научного развития в XIX в., прежде всего в странах Европы, значительно ускоряется. Под влиянием растущих запросов капиталистического производства и обмена, а также государственных потребностей наука приобретает все большее значение в различных областях человеческой деятельности. Если ранее математизации подверглась главным образом механика, то теперь математические методы находят все более широкое применение во всей физике, во многих вопросах техники, экономической и финансовой деятельности. Важные перемены произошли в организации подготовки научных и технических кадров, исследовательской работы и научной информации. Академии, сохраняя значение крупных научных центров, утрачивают монопольное положение, которое прежде имели в ряде стран. Быстро возрастают число и роль университетов и высших технических школ. Университетский профессор все чаще становится одновременно исследователем; академик все чаще выступает с кафедры перед студентами. Такие перемены неизбежно сопровождались реформой преподавания, охватившей все звенья системы образования. Пример Парижских Политехнической и Нормальной школ с их богатыми программами по физико-математическим наукам оказался убедительным. В университетах создаются физико-математические факультеты или отделения для подготовки специалистов высокой квалификации и вместе с тем более определенного профиля. Почти все круп-

ные математики XIX в. вышли из университетов и других высших школ. Типичной фигурой математика становится состоящий на государственной службе профессор или доцент.

Количественный рост исследований потребовал новых, более специализированных периодических изданий, которые стали выпускать академии, высшие школы и отдельные группы ученых, субсидируемые из государственных или частных средств. Назовем некоторые старейшие журналы: «Annales des mathématiques pures et appliquées» (Ним, 1810—1831), «Journal des mathématiques pures et appliquées» (Париж, с 1836), «Journal für die reine und angewandte Mathematik» (Берлин, с 1826), «Quarterly journal of pure and applied mathematics» (Лондон, 1857—1929), «Annali di matematica pura ed applicata» (Рим, с 1858), «Математический сборник» (Москва, с 1866). В Париже с 1835 г. стали еженедельно выходить «Comptes rendus de l'Académie des sciences». Все это, естественно, содействовало ускорению темпа исследований. Несколько позднее существенную роль стали играть национальные и — в последние 75 лет — международные съезды.

Мы здесь отметили несколько преимущественно внешних особенностей развития математики в XIX в. В идейном отношении математика перешла на новую, более высокую ступень абстракции, предмет ее стал гораздо более общим, и благодаря этому выросли вширь и вглубь возможности ее приложений. Вплоть до конца XVIII в. практически безраздельно господствовало представление, что теоретическая математика есть наука о величинах, об их порядке и мере, как выразился Декарт. При этом два основных понятия — геометрической величины и отвлеченного количества — считали определенными строго однозначно, в том смысле, что первая может принадлежать только евклидову пространству не выше трех измерений, а второе должно обладать основными свойствами элементов поля действительных чисел. Все понятия, не укладывавшиеся в такие рамки, например многомерных образов или комплексных мнимых чисел, относили к разряду удобных фикций, допустимых лишь в роли промежуточных звеньев рассуждений. Отдельные ученые иногда задумывались над отвлеченной возможностью нестандартных геометрических или арифметических конструкций, но никто не развил такие мысли последовательно, до конца. В философском плане единственность геометрии и арифметики обосновывалась либо однородностью всех математических свойств реального мира, либо объявлялась следствием априорной однородности всех врожденных математических идей. Революционный переворот в математике XIX в. заключался прежде всего в том, что этим метафизическим представлениям был нанесен сокрушительный удар.

В области геометрии такой удар был нанесен открытием первой системы неевклидовой гиперболической геометрии, с которой в печати выступили Н. И. Лобачевский (1829) и Я. Бояи (1831) и к которой еще раньше пришел Гаусс, оставивший, впрочем, свои мысли, казавшиеся ему слишком смелыми, при себе. Это великое открытие, отчасти подготовленное двухтысячелетними попытками доказать евклидов постулат о параллельных, особенно усилившимися в XVIII в., опровергло догму о единственности геометрии и указало пути построения других геометрических систем, которые не только обогатили саму математику, но и стали служить как новые могучие средства математического естествознания. Методологическое значение открытия Лобачевского и Бояи состояло, в частности, и в том, что априорное убеждение в евклидовости реального мира уступило место чисто науч-

ной проблеме геометрических свойств Вселенной и отдельных ее частей — проблеме, решение которой принадлежит физике и астрономии, опирающимся как на опыт и наблюдения, так и на математику. Следующим после открытия гиперболической геометрии шагом вперед явилось создание в 40-е годы Кэли и Грассманом многомерной евклидовой геометрии, получившей в 50-х годах значительное развитие в работах Л. Шлефли, а затем и многомерной проективной и аффинной геометрии, в которых было обобщено учение о проективных и аффинных свойствах фигур трехмерного пространства, развитое Дезаргом и Паскалем, Клеро и Эйлером, Карно, Понселе, Мёбиусом и другими геометрами начала XIX в. Учение о многомерных пространствах вместе с гауссовой внутренней геометрией поверхностей (1827) привели Римана к идее многомерного искривленного пространства (1854). Риман же и Кэли с разных точек зрения подошли к эллиптической геометрии, которая для Римана была пространством постоянной положительной кривизны, а для Кэли — простейшей из проективных метрик. Вскоре Э. Бельтрами показал, что пространство Лобачевского — пространство постоянной отрицательной кривизны, а Ф. Клейн — что оно также есть пространство с проективной метрикой. Идеи Клейна и Римана легли в основу геометрии пространства — времени соответственно специальной и общей теории относительности Эйнштейна. Если Л. Карно и Грассман рассматривали свои проективные и аффинные построения как реализации идей Лейбница о «геометрии положения», то И. Б. Листинг и Риман, развивая ту же идею Лейбница в более широком понимании, положили начало топологии соответственно линий и поверхностей; к Риману же восходят результаты Э. Бетти по топологии многомерных многообразий, развитой в конце XIX в. А. Пуанкаре.

В области арифметики и алгебры первый удар по традиционным представлениям о количестве был нанесен открытием кватернионов Гамильтона и чисел со многими единицами Грассмана (1843—1844). Если гиперболическая геометрия доказала возможность абстрактного неевклидова пространства, то эти гиперкомплексные числовые системы свидетельствовали о возможности некоммутативных алгебр; алгебру же составляют матрицы, теория которых, восходящая к «Арифметическим исследованиям» Гаусса, была построена Кэли. Общую теорию линейных ассоциативных алгебр разрабатывал с 60-х годов Б. Пирс, а затем его сын Ч. Пирс и другие ученые. Работы в этом направлении, значение которых теперь очевидно, сыграли огромную роль в создании векторного и тензорного исчисления; последнее вместе с теорией матриц и теорией групп широко применяется в различных отделах современной физики.

Другим событием величайшей важности в алгебре явилась разработка теории групп Галуа (1830—1832), подготовленная работами Лагранжа, Руффини и Гаусса, а также Абеля (1824), по проблеме решения в радикалах уравнений выше четвертой степени. С помощью своей теории Галуа сумел установить условие, которому удовлетворяют уравнения данной степени, разрешимые в радикалах. Но важность этой теории определялась не только решением труднейшей задачи, для которого она была сперва создана. Галуа выделил и общее понятие поля. Теория целых алгебраических чисел, с одной стороны, и многочленов — с другой, образующих частные случаи общего понятия кольца, привела Р. Дедекинда к выделению и этого важнейшего понятия новейшей математики. Алгебры, о которых мы только что говорили, развивались на первых порах независимо от общей теории колец, примерами которых они являются. Начиная с 70-х

годов XIX в. влияние теоретико-групповых идей со все большей силой сказывается на развитии математики в целом, включая геометрию и анализ (Ф. Клейн, С. Ли и др.), а затем оно распространилось, как было упомянуто. и на теоретическую физику.

Несколько ранее, чем в геометрии и алгебре, важные сдвиги произошли и в области математического анализа. Мы касались этого вопроса несколько раз, особенно в седьмой главе, когда говорили о реформе оснований исчисления бесконечно малых, начатой Больцано и Коши и тотчас продолженной Абелем. Через постановку ряда «проблем существования» (интеграла, производной, суммы ряда и т. д.) эта реформа привела к разработке теории функций действительного переменного и в 70-е и 80-е годы к теории множеств Г. Кантора. И здесь имело место своеобразное переплетение чисто теоретических проблем, переходящих в труднейшие проблемы математической логики, с приложениями к естествознанию. Как и теория групп, теория множеств позволила рассмотреть и развить с новой точки зрения многие отделы математики, в том числе (уже в XX в.) теорию вероятностей, получившую благодаря этому не только новое обоснование, но и новые мощные методы исследования. Особо следует заметить, что в ходе изучения множеств функций обнаружились существенные свойства, аналогичные свойствам многомерных пространств, почему их назвали «функциональными пространствами». Возникший на рубеже XIX и XX вв. функциональный анализ оказался с самого начала тесно связанным с разнообразными отделами анализа, геометрии и алгебры, а в наше время служит основным аппаратом квантовой физики.

Наш беглый обзор нескольких направлений математической мысли XIX и отчасти XX в., весьма далекий от полноты, имеет целью показать, сколь глубокие изменения претерпели в течение этого времени фундаментальные понятия пространства и количества. Математика не перестала быть общим учением о пространственных формах и количественных отношениях действительного мира, как ее охарактеризовал почти сто лет назад в «Анти-Дюринге» (1877) Ф. Энгельс, но самые эти формы и отношения наполнились новым богатейшим содержанием. В Древней Греции математика впервые приобрела привычные нам со школьной скамьи черты точной дедуктивной науки и в форме зачатков уже содержала начала многих теорий, получивших развитие в Новое время (включая элементы аналитической и проективной геометрии и анализа). В средние века в математике решительное преобладание получили элементарные дисциплины, и она в главном являлась наукой о постоянных величинах и неизменных геометрических фигурах. В XVII—XVIII вв. в ходе научной революции на первое место выдвинулась математика переменных величин и геометрических преобразований. Наконец, уже в первой половине XIX столетия наша наука стала, если воспользоваться выражением Н. Бурбаки, системой или иерархией структур, восходящей от простого к сложному, от общего к частному. Здесь термин структура означает множество элементов, определяемое только заданием отношения или отношений между его элементами или подмножествами; «природа» элементов в соображение при этом не принимается [1]. При этом место единственного трехмерного евклидова пространства (с его частными случаями

[1] См. статью «Архитектура математики» в книге: *Н. Бурбаки.* Очерки по истории математики. Перевод И. Г. Башмаковой под редакцией К. А. Рыбникова. М., 1963, стр. 245—259.

пространств двух, одного и нулевого измерений) заняли пространства различной геометрической структуры, место поля действительных (или комплексных) чисел — множества элементов с различными алгебраическими структурами; более того, потребовалось введение структур, имеющих уже мало сходства с пространством и числами в узком смысле слова. Понимание предмета математики как иерархии структур не вполне определенно. Зато такое понимание охватывает все известные структуры, как частные случаи, и вместе с тем оставляет открытой возможность дальнейшего присоединения новых математических структур. В конце концов, можно ли и нужно ли дать жесткое, раз навсегда застывшее определение науки, которая постоянно находится в состоянии живого развития и диалектического взаимодействия со всем комплексом других отраслей познания?

БИБЛИОГРАФИЯ

Литература к III тому[1]

1. Общие сочинения

Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины XIX столетия. Изд. 2. Перевод под редакцией А. П. Юшкевича. М., 1966.

Cantor M. Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik, Bd. 3—4 (Bd. 4 — unter Mitwirkung der Herren V. Bobynin, A. v. Braunmühl, F. Cajori, S. Günther, V. Kommerell, G. Loria, E. Netto, G. Vivanti, C. R. Wallner). 3 Aufl. Leipzig, 1907—1913.

2. Издания классиков

Бернулли Д. Гидродинамика, или Записки о силах и движениях жидкостей. Перевод В. С. Гохмана, комментарии и редакция А. И. Некрасова и К. К. Баумгарта, статья В. И. Смирнова. Л., 1959.

Бернулли И. Новая задача, к разрешению которой приглашаются математики. Кривизна луча в неоднородных прозрачных телах и решение задачи, предложенной мной в Acta за 1696 г., стр. 26, о нахождении брахистохронной линии.— В сб.: Вариационные принципы механики. М., 1959. стр. 6—17.

Бернулли И. Избранные сочинения по механике. Редакция и примечания В. П. Егоршина. М.—Л., 1937.

Гаусс К. Ф. Труды по теории чисел. Перевод В. Б. Демьянова, общая редакция И. М. Виноградова, комментарии Б. Н. Делоне. М., 1959.

Даламбер Ж. Динамика. Перевод и примечания В. П. Егоршина. М.—Л., 1950.

Карно Л. Размышления о метафизике исчисления бесконечно малых. Перевод Н. М. Соловьева, редакция, статья и примечания А. П. Юшкевича. Изд. 2. М.—Л., 1936.

Клеро А. Теория фигуры Земли. Перевод Н. С. Яхонтовой, редакция, статья и комментарии Н. И. Идельсона. М.—Л., 1947.

Лагранж Ж. Л. Аналитическая механика. Т. I. Перевод В. С. Гохмана, редакция и примечания Л. Г. Лойцянского и А. М. Лурье. Т. II. Перевод В. С. Гохмана, редакция и примечания Г. Н. Дубошина. М.—Л., 1950.

Лаплас П. Изложение системы мира. Перевод М. С. Хотимского. СПб., 1861.

Лаплас П. Опыт философии теории вероятностей. Перевод А. I. В.; редакция А. К. Власова. М., 1908.

Монж Г. Начертательная геометрия. Перевод В. Ф. Газе, комментарии и редакция Д. И. Каргина, общая редакция Т. П. Кравца. М., 1959.

Монж Г. Приложение анализа к геометрии. Перевод В. А. Гуковской, редакция, предисловие и примечания М. Я. Выгодского. М.—Л., 1936.

Эйлер Л. Универсальная арифметика, т. I—II. Перевод П. Иноходцева и И. Юдина. СПб., 1768—1769.

Эйлер Л. Введение в анализ бесконечных. Т. I. Перевод Е. Л. Пацановского, статья А. Шпайзера, редакция И. Б. Погребысского. Т. 2. Перевод В. С. Гохмана, редакция, статья и примечания И. Б. Погребысского. М., 1961.

Эйлер Л. Дифференциальное исчисление. Перевод, статья и примечания М. Я. Выгодского. М.—Л., 1949.

Эйлер Л. Интегральное исчисление. Т. I. Перевод С. Я. Лурье и М. Я. Выгодского, предисловие М. Я. Выгодского. М., 1956. Т. II. Перевод и предисловие И. Б. Погребысского. М., 1957. Т. III. Перевод и комментарии Ф. И. Франкля. М., 1958.

[1] См. также литературу ко всем трем томам, приведенную в т. I, стр. 327—330.

Эйлер Л. Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума либо минимума, или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле. Редакция и статья Н. С. Кошлякова. М.—Л., 1934.
Эйлер Л. Основы динамики точки. Редакция и примечания В. П. Егоршина. М.—Л. 1938.
Эйлер Л. Исследования по баллистике. Перевод П. Д. Львовского и Л. С. Полака, редакция и предисловие Б. Н. Окунева. М., 1961.
Эйлер Л. Избранные картографические статьи. Перевод Н. Ф. Булаевского, редакция и вступительная статья Г. В. Багратуни. М.—Л., 1959.
Эйлер Л. Письма о различных физических и философических материях, писанные к некоторой немецкой принцессе, тт. 1—3. Перевод С. Я. Румовского. СПб., 1768—1774 (изд. 4, 1796).
Euler L. Opera omnia. Series I: Opera mathematica, v. 1—29. Series II: Opera mechanica et astronomica, v. 1—15, 18, 19, 22, 25, 28—30; Series III: Opera physica, miscellanea, v. 1—8, 11—12, Ed. F. Rudio, A. Speiser, W. Habicht et al., 1911—...
Fagnano G. C. Opere matematiche, v. 1—3. Ed. V. Volterra, G. Loria, D. Gambioli. Roma, 1912.
Gauss C. F. Werke, Bd. 1—12. Göttingen, 1863—1933.
Lagrange J. L. Oeuvres, v. 1—14. Publiées par J. A. Serret et G. Darboux. Paris, 1867—1892.
Lambert J. H. Opera mathematica, v. 1—2. Ed. A. Speiser, Zürich. 1946—1948.
Laplace P. S. Oeuvres complètes, v. 1—14. Paris, 1878—1912.
Riccati J. Opere, v. 1—4. Lucca, 1761—1765.
Ruffini P. Opere matematiche, v. 1—2. Pubbl. da E. Bortolotti. Palermo, 1915—1943.
Wronsky H. Oeuvres mathematiques, v. 1—4. Paris, 1925.

3. Рукописные материалы и переписка ученых

Копелевич Ю. Х., Крутикова М. В., Михайлов Г. К., Раскин М. Рукописные материалы Л. Эйлера в Архиве АН СССР, т. I. М.—Л., 1962.
Михайлов Г. К. Записные книжки Эйлера в Архиве АН СССР.— ИМИ, 1957, т. X, стр. 67—94.
Михайлов Г. К., Смирнов В. И. Неопубликованные материалы Леонарда Эйлера в Архиве Академии наук СССР.— В сб.: Леонард Эйлер. М., 1958, стр. 17—79.
Эйлер Л. Переписка. Аннотированный указатель под редакцией В. И. Смирнова и А. П. Юшкевича. Л., 1967.
Эйлер Л. Письма к ученым. Перевод Т. Н. Кладо, Т. А. Лукиной и Ю. Х. Копелевич под редакцией В. И. Смирнова. М.—Л., 1963.
Commercium epistolicum D. Johannis Collins et aliorum de analysi promota. Londini, 1712 (1713).
Euler L. und *Goldbach C.* Briefwechsel (1729—1764), herausg. von A. P. Juškevič und E. Winter. Berlin, 1968.
Die Berliner und die Petersburger Akademie der Wissenschaften im Briefwechsel Leonhard Eulers, herausg. von A. P. Juškevič und E. Winter, Bd. 1—2. Berlin, 1959—1962.
Fuss P. H. Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du 18-ème siècle, v. 1—2. St.-Pétersbourg, 1843.
Lagrange J. L. Oeuvres, t. XIII—XIV (содержит переписку Лагранжа с Даламбером, Кондорсе, Лапласом и другими учеными).
Lambert J. H. Deutscher Gelehrter Briefwechsel. Bd. 1—5. Herausg. von J. Bernoulli. Berlin, 1781—1784.
Wollenschläger K. Der mathematische Briefwechsel zwischen Johann I Bernoulli und Abraham de Moivre.— Verhandl. Naturforsch. Gesellschaft in Basel,1933, Bd. 43, S. 151—317.

4. Биографии

Башмакова И. Г., Юшкевич А. П. Леонард Эйлер.— ИМИ, 1954, т. VII, стр. 453—512.
Воронцов-Вельяминов Б. А. Лаплас. М., 1937.
Кольман Э. Бернард Больцано. М., 1953.
Копелевич Ю. Х. Материалы к биографии Л. Эйлера.— ИМИ, 1957, т. X, стр. 9—65.
Крылов А. Н. Жозеф Луи Лагранж.— В сб.: Жозеф Луи Лагранж. М.—Л., 1937, стр. 1—16.
Крылов А. Н. Леонард Эйлер.— В сб.: Леонард Эйлер. М.— Л., 1935, стр. 1—28.

Пекарский П. История императорской Академии наук в Петербурге. т. I. СПб., 1870 (содержит, в частности, биографии Я. Германа, Николая II Бернулли, Д. Бернулли, Х. Гольдбаха, Г. В. Крафта, Ф. Х. Мейера, Л. Эйлера).
Прудников В. Е. Русские математики-педагоги. М., 1957.
Смирнов В. И. Даниил Бернулли (1700—1782).— В кн.: *Д. Бернулли.* Гидродинамика. Л., 1959, стр. 433—501.
Auchter H. Brook Taylor, der Mathematiker und Philosoph. Würzburg, 1937.
Brunet P. Maupertuis. Etude biographique. Paris, 1929.
Brunet P. La vie et l'oeuvre de Clairaut (1713—1765). Paris, 1952.
Lebesgue H. L'oeuvre mathématique de Vandermonde. Dans: Notices d'histoire des mathématiques. Genève, 1958, p. 18—39.
Gillispie Ch. C. Lazare Carnot savant. A monograph on Carnot's work with facsimile reproduction of his unpublished writings on mechanics and the calculus and an essay on the latter by A. P. Youschkevitch. Princeton, 1971.
Marcović Z. Rudje Bošcović, t. I—II. Zagreb, 1968—1969.
Nielsen N. Géomètres français sous la Révolution. Copenhague, 1929.
Du Pasquier L. G. Léonard Euler et ses amis. Paris, 1927.
Schneider I. Der Mathematiker Abraham de Moivre.— AHES, 1968, v. 5, N 3/4, p. 177—317.
Spiess O. Leonhard Euler. Frauenfeld — Leipzig, 1929.
Taton R. L'oeuvre scientifique de Monge. Paris, 1951.
Tweedie Ch. James Stirling. A sketch of his life and works, along with his scientific correspondence. Oxford, 1922.
Worbs E. C. F. Gauss, 2. Aufl. Leipzig, 1955.
Zimmermann K. Arbogast als Mathematiker und Historiker der Mathematik. Heidelberg, 1934.
Биографии многих математиков имеются также в Большой Советской Энциклопедии и других аналогичных изданиях, а также в «Dictionary of scientific biography». Ch. C. Gillispie, editor in chief. До настоящего времени изданы пять томов (New York, 1970—1972).

5. Мемориальные сборники

Карл Фридрих Гаусс. Сборник статей под общей редакцией И. М. Виноградова. М., 1956.
Жозеф Луи Лагранж. 1736—1936. Сборник статей. М.—Л., 1937.
Гаспар Монж. Сборник статей к двухсотлетию со дня его рождения. Под редакцией В. И. Смирнова. Л., 1947.
Леонард Эйлер (1707—1783). Сборник статей и материалов к 150-летию со дня смерти. М.—Л., 1935.
Леонард Эйлер. Сборник статей в честь 250-летия со дня рождения. Под редакцией М. А. Лаврентьева, А. П. Юшкевича и А. Т. Григорьяна. М., 1958.
Festschrift zur Feier des 200. Geburtstages L. Eulers.— AGMW, 1907. Bd. 25.
Sammelband der zu Ehren des 250. Geburtstages Leonhard Eulers der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vorgelegten Abhandlungen. Unter. Red. von K. Schröder. Berlin, 1959.
C. F. Gauss. Gedenkband anlässlich des 100. Todestages am 23 Februar 1955, herausg. von H. Reichardt. Leipzig, 1957.

6. Литература ко II главе

Башмакова И. Г. О доказательстве основной теоремы алгебры.— ИМИ, 1957, т. X, стр. 257—304.
Башмакова И. Г. О некоторых особенностях развития алгебры XVIII века.— ИМИ, 1966, т. XVII, стр. 317—323.
Вуссинг Г. О генезисе абстрактного понятия группы.— ИМИ, 1966, т. XVII, стр. 11—30.
Галченкова Р. И. Алгебра в неопубликованных рукописях Л. Эйлера. История и методология естеств. наук. М., 1966, вып. V, стр. 45—61.
Крамар Ф. Д. Векторное исчисление конца XVIII и начала XIX века.— ИМИ, 1963, т. XV, стр. 225—290.
Молодший В. Н. Основы учения о числе в XVIII и начале XIX в. М., 1963.

Петрова С. С. О первом доказательстве основной теоремы алгебры. История и методология естеств. наук. М., 1971, вып. XI, стр. 123—127.
Таннери Ж., Мольк Ж. Основные принципы арифметики, «Новые идеи в математике», № 4, «Учение о числе». Перевод П. С. Юшкевича, СПб., 1913.
Burkhardt H. Die Anfänge der Gruppentheorie und Paolo Ruffini.— Z. Math. Phys., 1892, Bd. 27, Suppl., S. 119—159.
Cajori F. Fouriers improvement of the Newton — Raphson method of approximation anticipated by Mourraille.— BM (3), 1911, Bd. II, S. 132—137.
Eneström G. Die geometrische Darstellung imaginärer Grössen bei Wallis.— BM(3), 1907, Bd. 7, S. 263—269.
Lampe E. Zur Entstehung der Begriffe der Exponentialfunktion und der logarithmischen Funktion eines komplexen Arguments bei Leonhard Euler.— AGMW, 1907, Bd. 25, S. 117—137.
Loria G. Esame di alcune ricerche concernenti l'esistenza di radici nelle equazioni algebraiche. BM (2), 1891, Bd. 5, S. 99—112; 1893, Bd. 7, S. 47—50.
Mitchell V. G., Strain M. The number *e*.— Osiris, 1936, v. I.
Pierpont J. Zur Geschichte der Gleichung 5. Grades (bis 1858).—Monatsh. f. Math., 1895, Bd. 6, S. 15—68.
Wussing H. Die Genesis des abstrakten Gruppenbegriffs. Berlin, 1969.

7. Литература к III главе

Башмакова И. Г. Обоснование теории делимости в трудах Е. И. Золотарева.— ИМИ, 1949, т. II, 233—351.
Венков Б. А. О работах Эйлера по теории чисел.— В сб.: Леонард Эйлер. М.—Л., 1935, стр. 81—87.
Гельфонд А. О. Очерк истории и современного состояния теории трансцендентных чисел.— Естествознание и марксизм, 1930, т. 1 (5), стр. 33—55.
Гельфонд А. О. Трансцендентные числа.— Труды Второго Всесоюзного математического съезда, т. I. Л.—М., 1935, стр. 141—164.
Гельфонд А. О. Роль работ Л. Эйлера в теории чисел.— В сб.: Леонард Эйлер. М., 1958, стр. 80—97.
Делоне Б. Н. Петербургская школа теории чисел. М.—Л., 1947.
Делоне Б. Н. Работы Гаусса по теории чисел.— В сб.: Карл Фридрих Гаусс. М., 1956, стр. 11—112.
Киселев А. А., Матвиевская Г. П. Неопубликованные записи Л. Эйлера по partitio numerorum.— ИМИ, 1965, т. XVI, стр. 145—180.
Матвиевская Г. П. О неопубликованных рукописях Л. Эйлера по диофантову анализу.— ИМИ, 1960, т. XIII, стр. 107—186.
Матвиевская Г. П. Заметки о совершенных числах в записных книжках Л. Эйлера.— Труды ИИЕТ, 1960, т. 34, стр. 415—427.
Матвиевская Г. П. Постулат Бертрана в записях Л. Эйлера.— ИМИ, 1961, т. XIV, стр. 285—288.
Мельников И. Г. Эйлер и его арифметические работы.— ИМИ, 1957, т. X, стр. 211—218.
Мельников И. Г., Киселев А. А. К вопросу о доказательстве Эйлером теоремы существования первообразного корня.— ИМИ, 1957, т. X, стр. 229—256.
Мельников И. Г. Открытие Эйлером удобных чисел.— ИМИ, 1960, т. XIII, стр. 187—216.
Хованский А. Н. Работы Л. Эйлера по теории цепных дробей.— ИМИ, 1957, т. X, стр. 305—326.
Archibald R. C. Goldbach's theorem.— Scripta mathematica, 1935, v. 3, p. 44—50, 153—167.
Baumgart O. Über die quadratische Reziprozitätsgesetze.— Z. Math. und Phys., 1885, Bd. 30, S. 169—236, 241—277.
Hofmann J. E. Über zahlentheoretische Methoden Fermats und Eulers, ihre Zusammenhänge und ihre Bedeutung.— AHES, 1961, v. 1—2, p. 122—159.
Konen H. Geschichte der Gleichung $t^2 - Du^2 = 1$. Leipzig, 1901.
Pringsheim A. Über die ersten Beweise der Irrationalität von e und π.— Sitzungsberichte Akad. Wiss. München, Math.-phys. Klasse, 1898, Bd. 28, S. 325—327.

8. Литература к IV главе

Бирман К.—Р. Задачи генуэзского лото в работах классиков теории вероятностей.— ИМИ, 1957, т. X, стр. 649—670.

Гнеденко Б. В. О работах Гаусса по теории вероятностей.—В сб.: Карл Фридрих Гаусс М., 1956, стр. 113—144.

Гнеденко Б. В. О работах Леонарда Эйлера по теории вероятностей, теории обработки наблюдений, демографии и страхованию.— В сб.: Леонард Эйлер. М., 1958, стр. 184—208.

Шейнин О. Б. К истории предельных теорем Муавра — Лапласа.— В сб.: История и методология естественных наук, т. IX. М., 1970, стр. 199—211.

Todhunter I. History of the mathematical theory of probability. Cambridge, 1865.

9. Литература к V главе

Белый Ю. А. Об учебнике Л. Эйлера по элементарной геометрии.— ИМИ, 1961, т. XIV, стр. 237—284.

Бобынин В. В. Элементарная геометрия и ее деятели во второй половине XVIII века.— Журн. Мин. нар. просв., 1907, ч. XII, отд. II, стр. 53—113; 1908, ч. XIII, отд. II, стр. 1—50.

Делоне Б. Н. Гаспар Монж как математик.— В сб.: Гаспар Монж. М., 1947, стр. 7—16.

Делоне Б. Н. Эйлер как геометр.— В сб.: Леонард Эйлер. М., 1958, стр. 133—183.

Каргин Д.И. Гаспар Монж — творец начертательной геометрии.— В сб.: Гаспар Монж. М., 1947, стр. 17—43.

Литолетов И. И. и *Яновская С. А.* Из истории преподавания в Московском университете (1804—1860).— ИМИ, 1955, т. VIII, стр. 127—480.

Лысенко В. И. Работы по полигонометрии в России в XVIII в.— ИМИ, 1959, т. XII, стр. 161—178.

Лысенко В. И. О работах петербургских академиков А. И. Лекселя, Н. И. Фусса и Ф. И. Шуберта по сферической геометрии и сферической тригонометрии.— Труды ИИЕТ, 1960, т. 34, стр. 384—414.

Лысенко В. И. Из истории первой петербургской математической школы.— Труды ИИЕТ, 1961, т. 43, стр. 182—205.

Лысенко В. И. Из истории вопроса о точках возврата плоской кривой.— ИМИ, 1961, т. XIV, стр. 517—526.

Лысенко В. И. Геометрические работы Якоба Германа.— ИМИ, 1966, т. XVII, стр. 299—308.

Розенфельд Б. А. Геометрические преобразования в работах Леонарда Эйлера.—ИМИ, 1957, т. X, стр. 371—422.

Розенфельд Б. А. Аналитический принцип непрерывности в геометрии.— ИМИ, 1965, т. XVI, стр. 273—294.

Юшкевич А. П. Леонард Эйлер о квадратуре круга.— ИМИ, 1957, т. X, стр. 159—210.

Юшкевич А. П. Математика в Московском университете за первые сто лет.— ИМИ, 1948, т. I, стр. 43—140.

Braunmühl A. Historische Studien über die organische Erzeugung ebener Curven von den ältesten Zeiten bis zum Ende des achtzehnten Jahrhunderts. Katalog math. und math.-phys. Modelle usw. herausg. v. W. Dyck, München, 1892, S. 54—88.

Braunmühl A. Die Entwicklung der Zeichen- und Formensprache in der Trigonometrie.— BM (3), 1900, Bd. 1, S. 64—74.

Braunmühl A. Zur Geschichte der Trigonometrie in 18. Jahrhundert.— BM (3), 1901, Bd. 2, S. 103—110.

Brückner M. Vielecke und Vielfläche. Theorie und Geschichte. Leipzig, 1900.

Gomes Teixeira F. Traité des courbes spéciales remarquables planes et gauches, I—II, III. Coimbra, 1908/09, 1915 (Obras, v. 4—5, 7).

10. Литература к VI главе

Лихин В. В. Исследование Эйлера и Лагранжа по теории конечных разностей. История и методология естеств. наук. М. 1966, вып. V, стр. 35 — 44.

Braunmühl A. Historische Untersuchung der ersten Arbeiten über Interpolation.— BM (3), 1901, Bd. 2, S. 86—96.

Hofmann J. E., *Wieleitner H.* Die Differenzenrechnung bei Leibniz, mit Zusätzen von D. Mahnke. Berlin, 1931.

11. Литература к VII главе

Белозеров С. Е. Основные этапы развития общей теории аналитических функций. Ростов-на-Дону, 1962.

Выгодский М. Я. Математическая строгость в XVIII в.— Труды совещ. по истории естествозн. 24—26 дек. 1946. М.—Л., 1948, стр. 183—190.

Лурье С. Я. Эйлер и его «исчисление путей».— В сб.: Леонард Эйлер. М.—Л., 1935, стр. 51—79.

Маркушевич А. И. Основные понятия математического анализа и теории функций в трудах Эйлера.— В сб.: Леонард Эйлер. М., 1958, стр. 98—132.

Мордухай-Болтовской Д. Д. Генезис и история теории пределов. — Изв. Сев.-Кавк. гос. университета, 1928, т. III (XV), стр. 103—117.

Паплаускас А. Б. Тригонометрические ряды от Эйлера до Лебега. М.. 1966.

Фихтенгольц Г. М. О преобразовании переменных в кратных интегралах.— ИМИ, 1952, т. V, стр. 241—268.

Харди Г. Расходящиеся ряды. Перевод Д. А. Райкова, предисловие и статья С. Б. Стечкина. М., 1951 (первые две главы содержат исторические сведения).

Чириков М. В. Из истории асимптотических рядов.— ИМИ, 1960, т. XIII, стр. 441—472.

Шатунова С. Е. Теория пределов Симона Люилье.— ИМИ, 1966, т. XVII, стр. 325—331.

Юшкевич А. П. О возникновении понятия об определенном интеграле Коши.— Труды ИИЕ, 1947, вып. I, стр. 373—411.

Юшкевич А. П. О развитии понятия функции.— ИМИ, 1966, т. XVII, стр. 123—150.

Burkhardt H. Über den Gebrauch divergenter Reihen in der Zeit von 1750—1860.— Math. Ann., 1911, Bd. 70, S. 169—206.

Burkhardt H. Trigonometrische Reihen und Integrale. Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, II A, 1, 2.

Cajori F. A history of the conceptions of limits and fluxions in Great Britain from Newton to Woodhouse. Chicago — London, 1919.

Eneström G. Über eine von Euler aufgestellte allgemeine Konvergenzbedingung.— BM (3), 1906, Bd. 6, S. 186—189.

Eneström G. Zur Vorgeschichte der Entdeckung des Taylorschen Lehrsatzes.— BM (3), 1911—1912, Bd. 12, S. 333—336.

Enneper A. Elliptische Funktionen. Theorie und Geschichte. Halle a. S., 1876.

Faber G. Übersicht über die Bände 14, 15, 16, 16*, der ersten Serie. In: *Euler L.* Opera omnia. Series I, v. 16—II. Basileae, 1935, p. VII—CXII. (Обзор работ Эйлера по теории рядов).

Grattan-Guinness I. The development of the foundations of mathematical analysis from Euler to Riemann. Mass. Technol. Inst. Press, 1970.

Hofmann J. E. Um Eulers erste Reihenstudien.— In: Sammelband der zu Ehren des 250. Geburtstages Leonhard Eulers... Berlin, 1959, S. 139—208.

Juschkewitsch A. P. Euler und Lagrange über die Grundlagen der Analysis, Sammelband der zu Ehren des 250. Geburtstages Leonhard Eulers... Berlin, 1959, S. 224—244.

Koppelman E. The calculus of operations and the rise of abstract algebra.— AHES. 1971, v. 8, № 3, p. 155—242.

Landau E. Euler und die Funktionalgleichung der Riemannschen Zetafunktion.— BM (3), 1907, Bd. 7, S. 69—79.

Pringsheim A. Zur Geschichte des Taylorschen Lehrsatzes.— BM (3), 1900, Bd. I, S. 433—479.

Pringsheim A. Über ein Eulershes Konvergenzkriterium.— BM (3), 1906, Bd. 6, S. 252—256.

Youschkevitch A. P. Lazare Carnot and the competition of the Berlin Academy in 1786 on the mathematical theory of infinite.— In: *Ch. C. Gillispie.* Lazare Carnot Savant. Princeton, 1971, p. 149—168.

12. Литература к VIII—IX главам

Симонов Н. И. О научном наследии Л. Эйлера в области дифференциальных уравнений.— ИМИ, 1954, т. VII, стр. 513—595.

Симонов Н. И. О первых исследованиях Ж. Даламбера и Л. Эйлера по теории линейных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.— ИМИ, 1956, т. IX, стр. 789—803.

Симонов Н. И. Об исследованиях Л. Эйлера по интегрированию линейных уравнений и систем линейных уравнений с частными производными.— ИМИ, 1957, т. X, стр. 327—362.
Симонов Н. И. Прикладные методы анализа у Эйлера. М., 1957.
Симонов Н. И. Об исследованиях Л. Эйлера по обыкновенным дифференциальным уравнениям и уравнениям математической физики.— Труды ИИЕТ, 1959, т. 28, стр. 138—187.
Симонов Н. И. О первых исследованиях по дифференциальным уравнениям в Петербургской Академии наук (укр.).— IМЗ, 1963, вып. 4, стр. 104—111.
Франкль Ф. И. Об исследованиях Л. Эйлера в области теории уравнений в частных производных.— ИМИ, 1954, т. VII, стр. 596—624.
Burkhardt H. Entwicklungen nach oszillierende Funktionen und Integration der Differentialgleichungen der mathematischen Physik. Jahresbericht d. Deutschen Math. Verein., Bd. 10. Leipzig, 1908.
Eneström G. Sur la découverte de l'intégrale complète des équations différentielles linéaires à coefficients constants.— BM (2), 1897, Bd. 11, S. 43—50.
Rothenberg S. Geschichtliche Darstellung der Entwicklung der Theorie der singulären Lösungen totaler Differentialgleichungen von der ersten Ordnung mit zwei variablen Grössen.— AGMW, 1908, Bd. 20.
Truesdell C. The rational mechanics of flexible or elastic bodies. 1638—1788 (*Euler L.* Opera omnia. Series II, v. 11—II. Turici, 1960.— Содержит среди прочего детальный анализ работ Даламбера, Эйлера, Д. Бернулли, Лагранжа и др. о колебании струн).

13. Литература к X главе

Александрова Н. В. Некоторые вопросы истории вариационного исчисления в XVIII—XIX вв.— Труды ИИЕТ, 1959, т. 22, стр. 251—271.
Александрова Н. В. К истории вариационного исчисления.— Труды ИИЕТ, 1959, т. 28, стр. 219—236.
Дорофеева А. В. Развитие вариационного исчисления как исчисления вариаций.— ИМИ, 1961, т. XIV, стр. 101—180.
Кошляков Н. С. Вариационное исчисление Эйлера.— В сб.: Леонард Эйлер. М., 1935, стр. 39—50.
Рыбников К. А. Первые этапы развития вариационного исчисления.— ИМИ, 1949, т. II, стр. 355—498.
Dietz P. Die Ursprünge der Variationsrechnung bei Jacob Bernoulli. Basel, 1959.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ[1]

[1] В скобках указано: 1) более точное — в сравнении с принятым у нас — русское написание некоторых английских и голландских фамилий; 2) другое написание фамилий; 3) более полное написание фамилий и имен; 4) даты рождения и смерти или примерное время жизни упомянутого лица.

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ
С ДРЕВНЕЙШИХ ВРЕМЕН ДО НАЧАЛА XIX СТОЛЕТИЯ

Том III

МАТЕМАТИКА XVIII СТОЛЕТИЯ

Утверждено к печати
Институтом истории естествознания и техники
Академии наук СССР

Редактор ***А. Ф. Лапко***
Художник *М. К. Шевцов*
Художественный редактор ***Н. И. Власик***
Технический редактор *П. С. Кашина*

Сдано в набор 17/I-1972. Подписано к печати 30/VI—1972 г.
Формат 70×100[1]/[16]. Усл. печ. л. 39,9. Уч.-изд. л. 35,3 Тираж 7200. Бумага № 1
Тип. зак. 80 Т-09752 Цена 2 р. 84 к.

Издательство «Наука»
Москва, К-62, Подсосенский пер., 21

2-я типография издательства «Наука».
Москва, Г-99, Шубинский пер., 10

ОПЕЧАТКИ И ИСПРАВЛЕНИЯ

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
13	17 сн.	гипотезы	гипотез
68	6 св.	$n+1$	$n-1$
305	2 сн.	еще	еще в 1684 г.
305	1 сн.	v. 4,	v. 4, p. 606—607
308	15 сн.	$22n$	$22n^{22}$
343	10 сн.	применил	также применил
354	9 сн.	$\frac{1}{(1+x)\sqrt[3]{1-x^2}}$	$\frac{1}{(1+x)\sqrt[3]{1-x^3}}$
477	20 сн.	А. М. Лурье	А. И. Лурье
486	6 св. левый столбец	Vallé	Vallée
488	28 св. левый столбец	Durer	Dürer
490	1 сн. правый столбец	Лурье А. М. 477	Вычеркнуть этот текст
493	9 сн. левый столбец	Eugéne Rouche	Eugène Rouché